CH II : Séries réelles - révisions, compléments

I. Notion de séries à termes réels

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

- On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général S_n est défini par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- La suite (S_n) est appelée **suite des sommes partielles** associée à la série $\sum u_n$. Son terme général S_n est appelé **somme partielle d'ordre** n associée à la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **divergente** si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
- Lorsque $\sum u_n$ converge, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série** et est (souvent) notée S. On a alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

- Déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarque

- On ne change pas la nature d'une suite (u_n) en modifiant un nombre fini de ses termes. Par exemple, la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = \sqrt{2},\ v_1 = 42,\ v_2 = \mathrm{e} \ \text{ et } \ : \forall n \geqslant 3,\ v_n = u_n$$

  est de même nature que la suite (u_n).
  (note : on aurait pu changer d'autres termes que les premiers)
  Elle admet notamment la même limite, si elle existe, que la suite (u_n).
- On ne modifie pas non plus la nature d'une suite en supprimant un nombre fini de ses termes. La suite (u_{n+1}) n'est autre que la suite (u_n) privée de son premier terme. Ces deux suites sont donc de même nature et ont même limite, si cette limite existe.
- Cela s'applique évidemment à une suite de sommes partielles (S_n).
  Cette suite est de même nature que (S_{n+1}), (S_{n+2}) ...
- Pour les séries, on peut aussi se poser une autre question, à savoir : qu'advient-il si on somme à partir de 3 et plus de 0 ?
  Il suffit de remarquer que :

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - (u_0 + u_1 + u_2)$$

  Ainsi $(\sum\limits_{k=3}^{n} u_k)$ et $(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k)$ sont de même nature (on peut par exemple démontrer que si l'une converge, l'autre aussi). Par contre, dans le cas où il y a convergence, ces deux suites n'ont évidemment pas la même limite :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) - (u_0 + u_1 + u_2)$$

À RETENIR

On ne modifie pas la nature d'une série en commençant la sommation en n_0 (au lieu de 0) mais, en cas de convergence, on modifie évidemment la somme obtenue ! De manière générale : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \neq \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

II. Méthodes pour déterminer la nature d'une série

II.1. Une condition NÉCESSAIRE de convergence

Théorème 1.

Soit (u_n) une suite de réels.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Pour qu'une série converge, il **faut** *que son terme général tende vers* 0.

Démonstration.

Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Ainsi, la suite (S_n) est convergente vers un réel $S \in \mathbb{R}$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Comme $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on obtient : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Autrement dit, on peut trouver une suite (u_n) telle que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \sum u_n \text{ converge}$$

☞ $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Théorème 2.

Soit (u_n) une suite de réels.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}}$$

Pour qu'une série diverge, il **suffit** *que son tg ne tende pas vers* 0.

Démonstration.

C'est la contraposée de l'énoncé précédent. □

Définition

Soit (u_n) une suite de réels.

On dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si son terme général u_n est tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Remarque

- Le théorème précédent stipule que si une série est grossièrement divergente alors elle est divergente.
- Cet énoncé permet d'établir la divergence de séries. Par exemple, les séries :

$$\sum 1, \ \sum n, \ \sum n^2, \ \sum n^3 \ \text{ et } \ \sum q^n \text{ avec } |q| \geqslant 1$$

  sont (grossièrement) divergentes.
- L'idée derrière ce théorème est que pour assurer la convergence d'une série $\sum u_n$, *i.e.* pour pouvoir faire une somme infinie des termes de la suite (u_n), il faut que les termes de cette suite (u_n) soient « suffisamment petits ».
- On notera au passage qu'une suite (u_n) qui converge vers $\ell \neq 0$ est « trop grosse » pour qu'on puisse espérer effectuer la somme (infinie) de tous ses termes *(attention à bien lire l'énoncé du théorème !)*.

Plusieurs notions différentes entrent en jeu dans ce chapitre.

- Il ne faut pas confondre la notion de nature d'une série $\sum u_n$ et la notion de nature de la suite (u_n).
- Il ne faut pas confondre les notations :
  - × $\sum u_n$ qui désigne la série de terme général u_n,
  - × $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ qui est la somme partielle d'ordre n de cette série,
  - × $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui désigne, SI LA SÉRIE EST CONVERGENTE, la somme de cette série (*i.e.* la limite finie ($\in \mathbb{R}$) de la suite (S_n)).

☞ On n'écrira $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ qu'APRÈS avoir prouvé la convergence de $\sum u_n$.

II.2. Technique de télescopage

II.2.a) Un lien de convergence entre suites et séries

Théorème 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1}-u_n) \text{ converge}}$$

Démonstration.
Notons $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Par définition, la série $\sum v_n$ est convergente si sa suite des sommes partielles (T_n) est convergente. Or :

$$T_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} v_k \ = \ \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1}-u_k) \ = \ u_{n+1} - u_0$$

($\Leftarrow$) Si (u_n) converge, il en est de même de (u_{n+1}) (sous-suite de (u_n)).
Ainsi, par l'inégalité précédente, la suite (T_n) est convergente.

($\Rightarrow$) Si $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge, *i.e.* si (T_n) converge, l'égalité :

$$u_{n+1} = T_n + u_0$$

permet d'affirmer que (u_{n+1}) converge et donc (u_n) converge. □

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} \ = \ u_n - {u_n}^2 \end{cases}$

a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,1]$.

b. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

c. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

d. Prouver que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

e. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exemple

1) À l'aide d'un télescopage, on démontre la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

En effet, le terme général de cette série vérifie :

$$v_n \ = \ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \ = \ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \ = \ \ln(n+1) - \ln n$$

Ainsi, la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$ est :

$$S_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} v_k \ = \ \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \ = \ \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente.

2) On peut aussi montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

Remarquons que : $\forall k\geqslant 2,\ \dfrac{1}{k(k-1)} \ = \ \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. On a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \ = \ \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \ = \ 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque

- Il faut savoir repérer la technique de télescopage même lorsqu'elle est cachée comme dans le point ***1)***.
- Le point ***2)*** illustre quant à lui la technique de décomposition en élément simple (DES) qu'il est fréquent de voir associée à un télescopage.

Exercice

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

a. Quelle est la nature de cette série ?

b. Déterminer la somme de cette série.

$\left(\textit{on pourra mettre } u_n \textit{ sous la forme } \ u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n+3}\right)$

Application de l'exercice précédent : nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

1) Montrons, à l'aide du résultat précédent, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

- On remarque tout d'abord que :

$$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \ \leqslant\ x$$

L'inégalité de droite est une inégalité de convexité.
En effet, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave.
Sa courbe est donc située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente en 0, droite d'équation :

$$y = f'(0)\ (x-0) + f(0) = x$$

(évidemment, on peut aussi démontrer cette inégalité en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$)

- Cette inégalité étant vraie en $x = \frac{1}{k} \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\forall k \geqslant 1,\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \ \leqslant\ \frac{1}{k}$$

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \ln(n+1)$$

- Or : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  On en déduit par théorème de comparaison que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

2) Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

- Remarquons tout d'abord que : $\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k^2} \ \leqslant\ \frac{1}{k(k-1)}$ $\quad(\star)$.
- Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, on obtient par sommation :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$$

- La suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est :

  × croissante puisque pour tout $n \geqslant 2$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$,

  × majorée par 1.

  La suite (S_n) est donc convergente.

  Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque

- Dans le point *2)*, on compare la taille d'une suite (v_n) à la taille d'une suite (u_n) (inégalité $(\star)$) pour démontrer la convergence de la série $\sum v_n$ sachant que la série $\sum u_n$ converge.
- En utilisant cette idée, on peut facilement démontrer que pour tout $\alpha \geqslant 2$, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
- Cette idée permet de préciser le résultat énonçant la condition nécessaire de convergence. On sait déjà que pour assurer la convergence d'une série $\sum u_n$, il faut que les termes de la suite (u_n) soient « suffisamment petits ». On peut maintenant ajouter que :

  × la suite $(\frac{1}{n})$ est « trop grosse » pour que l'on puisse sommer tous ses termes,

  × la suite $(\frac{1}{n^2})$ et toutes les suites plus petites sont « suffisamment petites » (on peut sommer tous leurs termes).

II.3. Calcul direct des sommes partielles : séries usuelles

II.3.a) Sommes des puissances d'entiers

1) Somme des n premiers entiers

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$S_n - S_{m-1} = \boxed{\sum_{k=m}^{n} k \ = \ \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}}$$

Remarque
La formule donnant la valeur de $S_n - S_{m-1}$ peut se retenir comme étant le résultat du **demi-produit** :

× **du nombre de termes** de la somme $(n-m+1)$,

× **par la somme** $(n+m)$ formée **du 1^{er} terme** m **et du dernier** n.

2) Sommes des n premiers carrés d'entiers

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \ = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3) Sommes des n premiers cubes d'entiers

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \ = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} \ = \ {S_n}^2$$

Remarque

- Même si les formules font apparaître des divisions par 2, 6 et 4, il est évident que la somme des n premiers entiers, carrés, ou encore cubes a un résultat entier.
- Généralement, on démontre ces résultats par récurrence.
- On peut aussi démontrer ces formules de manière directe. Par exemple, pour la somme des n premiers entiers, on commence par remarquer que :

$$(k+1)^2 - k^2 \ = \ 2k+1$$

On en déduit que : $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right)}_{= (n+1)^2 - 1^2} \ = \ \underbrace{2 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1}_{= 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) + n}$$

et enfin que :

$$\begin{aligned} 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \ &= \ (n+1)^2 - 1^2 - n \ = \ n^2 + 2n + \cancel{1} - \cancel{1} - n \\ &= \ n^2 + n \ = \ n(n+1) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

II.3.b) Séries géométriques et ses dérivées

Théorème 4.

Soit $q \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\sum q^n \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

2) $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 1} n\ q^{n-1} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

3) $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 2} n(n-1)\ q^{n-2} \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1}$

De plus, si $|q| < 1$ (i.e. si $q \in\ ]-1,1[$), on obtient les sommes suivantes.

a. $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}}$ ***b.*** $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ q^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}}$

c. $\boxed{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\ q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}}$

Remarque

- Les séries de la forme $\sum q^n$ sont appelées séries géométriques.
- Les séries de la forme $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\ q^{n-1}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} n(n-1)\ q^{n-2}$ sont appelées séries géométriques dérivées.
- Les formules précédentes de sommes restent valables avec une initialisation à $n = 0$ puisque les termes ajoutés sont nuls.
- On aurait pu calculer la dérivée $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$ ...

Application

Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître les séries géométriques et géométriques dérivées et savoir calculer leur somme.

1) Montrer que $\sum \dfrac{n}{3^{2n+1}}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = \dfrac{k}{3^{2k+1}} = k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2k+1} = \dfrac{1}{3}\ k \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right)^k$.

On a donc : $S_n = \dfrac{1}{3} \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{1}{9}\right)^k = \dfrac{1}{27} \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{1}{9}\right)^{k-1}$

C'est la somme partielle d'une série géométrique dérivée qui est convergente car de raison $\dfrac{1}{9} \in\ ]-1,1[$.

Ainsi : $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{27} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{9}\right)^2} = \dfrac{1}{3 \times \cancel{9}} \dfrac{9^{\cancel{2}}}{8^2} = \dfrac{3}{64}$.

2) Montrer que $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = k^2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

En écrivant : $k^2 = k(k-1) + k$, on obtient :

$$u_k = k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k + k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4}\ k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2}\ k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

On a donc : $S_n = \dfrac{1}{4} \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1) \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée et la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde toutes deux convergentes car de raison $\dfrac{1}{2} \in\ ]-1,1[$.

Ainsi : $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4} \dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{2^4}{4} + \dfrac{2^2}{2} = 4 + 2 = 6$

II.3.c) Série exponentielle

Théorème 5.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge et :* $\boxed{e^x \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}$

Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$

Démonstration.
Admis. □

Un mot sur ce type d'objets (CULTURE)

- L'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un polynôme de degré ∞.
- On appelle cet objet une **série entière** et on dit alors que la fonction exponentielle est développable en série entière (DSE). Toutes les fonctions ne sont pas développables en séries entières. L'intérêt de ce type de développement est la relative simplicité de l'objet $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et notamment son bon comportement vis à vis de certaines opérations telles que la dérivation.
- Ce type d'objet n'est au programme ni en première ni en deuxième année.

Remarque
Comme précisé, nous n'étudierons pas les outils pour montrer la convergence de la série exponentielle. Cependant nous pouvons quand même vérifier que cette série n'est pas grossièrement divergente :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad u_n \ = \ \frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(on peut notamment le montrer à l'aide du critère de d'Alembert)

Application
Dans les exercices, il faudra savoir reconnaître la série exponentielle et calculer la somme associée.

Montrer que $\sum \frac{n+7}{2^n \ n!}$ est convergente est calculer sa somme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $u_k = \frac{k+7}{2^k \ k!} = \frac{k \ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ + \ 7 \ \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!}$.

On a donc : $S_n \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k \ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ + \ 7 \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!}$.

Étudions séparément ces deux sommes.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k \ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ &= \ \sum_{k=1}^{n} \frac{k \ (\frac{1}{2})^k}{k!} \ = \ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- D'autre part, on a : $7 \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 7 \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

On en conclut que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{15}{2} \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2} \sqrt{\mathrm{e}}$.

II.4. Les séries de Riemann

Théorème 6.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

Démonstration.

- Si $\alpha \leqslant 0$: alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est (grossièrement) divergente.

- Si $\alpha > 0$: deux cas se présentent.

  × cas $0 < \alpha \leqslant 1$: alors pour tout $k \geqslant 1$, on a :

  $$\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par sommation :

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

  Or, on a déjà démontré que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  On en déduit, par le théorème de comparaison que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

  × si $\alpha > 1$:

  (*i*) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

  Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$:

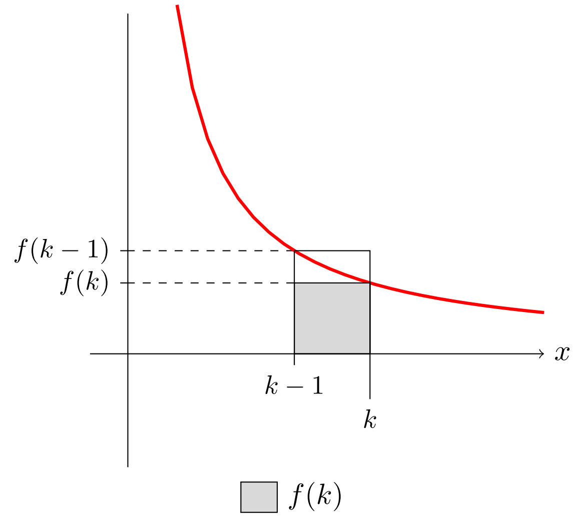
  $$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}$$

  Comme $x^{-\alpha-1} > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $-\alpha$.
  Or : $\alpha > 1 \geqslant 0$. On en déduit que la fonction f est (strictement) décroissante sur $]0, +\infty[$.

  (*ii*) La deuxième étape de la démonstration consiste à démontrer que :

  $$\forall k \geqslant 2,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leqslant f(k-1)$$

  Cette inégalité se comprend (mais cela ne constitue pas une démonstration !) à l'aide de la représentation graphique suivante.



  Démontrons cette inégalité.

Soit $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [k-1, k]$:

$$\begin{array}{lccccc} & k-1 & \leqslant & t & \leqslant & k \\ \text{donc} & f(k-1) & \geqslant & f(t) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

(car f est décroissante sur $]0, +\infty[$)

$$\text{et} \quad \int_{k-1}^{k} f(k-1)\, dt \;\geqslant\; \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \;\geqslant\; \int_{k-1}^{k} f(k)\, dt$$

(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$)

$$\text{i.e.} \quad f(k-1) \;\geqslant\; \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \;\geqslant\; f(k)$$

(*iii*) Ainsi, par sommation des inégalités de droite, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n} f(k)}_{= S_n - 1} \;\leqslant\; \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt}_{= \int_1^2 f(t)\, dt + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt} \;=\; \int_1^n f(t)\, dt$$

(par relation de Chasles)

Or, comme $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

Enfin $\dfrac{1}{\alpha-1} > 0$ (car $\alpha > 1$) et $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} > 0$ ce qui permet de conclure :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{et} \quad S_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

(*iv*) La suite (S_n) est :

× croissante puisque pour tout n : $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$,

× majorée par $1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$.

Elle est donc convergente.

Ce qui signifie que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente. □

Remarque

- Il faut savoir reconnaître ce type de séries dans les exercices. Par exemple :
  × les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ sont convergentes.
  × les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sont divergentes.
- Cette démonstration est une illustration de la technique dite de comparaison séries / intégrales.

Comparaison séries / intégrales

- On considère une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.
- On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{f(k) \;\leqslant\; \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \;\leqslant\; f(k-1)}$$

On en déduit, par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) \;\leqslant\; \int_0^n f(t)\, dt \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n} f(k-1)}$$

Enfin : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = S_n - f(0)$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k) = S_{n-1}$

(prudence lors de la sommation : sur quels entiers k peut-on sommer ?)

Exercice *(d'après* `EML 1992`*)*
On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer que : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Démonstration.

1)
- La fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ est C^∞ sur $]1,+\infty[$ comme produit de fonctions C^∞ sur cet intervalle.
- La fonction f est elle aussi C^∞ sur $]1,+\infty[$ comme inverse de la fonction g qui ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$ puisque $\ln(x) > 0$ sur cet intervalle.
- Soit $x > 1$. On a

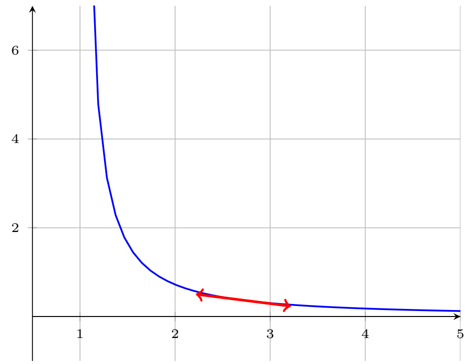
$$f'(x) = -\frac{\ln(x) + \frac{x}{x}}{(x\ln(x))^2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$$

Comme $(x\ \ln(x))^2 > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $-(\ln(x)+1)$.
Or : $\ln(x) + 1 > 1 > 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|$	$-$
Variations de f	$+\infty$	0

- La courbe représentative de f admet pour tangente en e la droite d'équation : $y = f'(\mathrm{e})\ (x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$. Or : $f'(\mathrm{e}) = -\frac{2}{\mathrm{e}^2} \simeq -0,27$.



2) Soit $k \geqslant 3$. Pour tout $t \in [k-1,k]$:

$$k-1 \leqslant t \leqslant k$$

donc $$f(k-1) \geqslant f(t) \geqslant f(k)$$

(car f est décroissante sur $]0,+\infty[$)

et $$\int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt \geqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\ dt$$

(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$))

i.e. $$f(k-1) \geqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \geqslant f(k)$$

3) ***a.*** Soit $n \geqslant 3$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![3, n]\!],\ f(k) \ \leqslant\ \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \ \leqslant\ f(k-1)$$

En sommant ces $n-2$ inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=3}^{n} f(k) & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} f(k-1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ S_n - f(2) & & \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt & & S(n) - f(n) \end{array}$$

(relation de Chasles)

La dernière égalité est obtenu par décalage d'indice :

$$\sum_{k=3}^{n} f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = S_n - f(n)$$

On obtient bien les inégalités souhaitées.

b. Soit $n \geqslant 3$.
D'après la question précédente :

× $S_n \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{2\ln(2)}$ *(inégalité de gauche)*,

× $S_n \geqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \int_2^n f(t)\ dt$ car $\dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.
(inégalité de droite)

On en déduit que :

$$\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{n\ln(n)} \ \leqslant\ S_n \ \leqslant\ \int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Il reste alors à calculer :

$$\int_2^n f(t)\ dt = \int_2^n \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\ dt = \int_2^n \frac{u'(t)}{u(t)}\ dt \quad \text{avec} \quad u(t) = \ln(t)$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$ est une primitive de f sur $[2, +\infty[$.
On en déduit :

$$\int_2^n f(t)\ dt = [\ \ln(|\ln(t)|)\ ]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

En remplaçant $\displaystyle\int_2^n f(t)\ dt$ par sa valeur dans les inégalités précédentes, on a bien :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \ \leqslant\ S_n \ \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

c. Comme $n \geqslant 3$, on a $n > \mathrm{e}$ et donc $\ln(\ln(n)) > \ln(\ln(\mathrm{e})) = 0$.
En divisant l'encadrement de la question précédente par $\ln(\ln(n))$:

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \ \leqslant\ \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \ \leqslant\ 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)}\,\frac{1}{\ln(\ln(n))}$$

Comme $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit, par théorème de composition des limites $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Enfin :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = 1$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \dfrac{1}{2\ln(2)}\,\dfrac{1}{\ln(\ln(n))} = 1$.

D'après le théorème d'encadrement des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$$

Autrement dit : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

□

II.5. Le cas particulier des séries à termes positifs

II.5.a) Les résultats fondamentaux

Théorème 7.

Soit $\sum u_n$ une série et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite des sommes partielles associée.

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0) \quad \Rightarrow \quad (S_n) \text{ est croissante}}$$

Démonstration.
Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, (S_n) est croissante. □

Remarque

- Ce résultat peut en fait s'énoncer sous forme d'équivalence. En effet, si (S_n) est croissante, alors : $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On en conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0$.
- On insiste donc dans l'énoncé sur le sens le plus important.

Théorème 8.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

1) $\boxed{(S_n) \text{ est majorée} \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ converge}}$

2) $\boxed{(S_n) \text{ non majorée} \ \Rightarrow\ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

Démonstration.
C'est une conséquence directe du théorème de convergence monotone.
La suite (S_n) est croissante.

- Si elle est majorée, elle est convergente.
- Si elle est non majorée, elle tend vers $+\infty$. □

II.5.b) Critère de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 9.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Supposons : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

Alors ***1)*** $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow$ $\sum u_n$ *converge*

2) $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow$ $\sum v_n$ *diverge*

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$, on en déduit :

- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \ \leqslant\ \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = T_n$,
- (S_n) et (T_n) sont croissantes puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs.

1) Si $\sum v_n$ converge, alors (T_n) est majorée.
Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \ \leqslant\ M$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \ \leqslant\ T_n \ \leqslant\ M$$

ce qui signifie que (S_n) est majorée par M. De plus, (S_n) est croissante.
Elle est donc convergente. On en conclut que $\sum u_n$ converge.

2) Si $\sum u_n$ diverge, la suite croissante (S_n) est non majorée.
On en déduit que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \ \leqslant\ S_n$$

On en déduit que : $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

*(on pouvait aussi remarquer que cet énoncé est la contraposée du **1)**)* □

Remarque

- La conclusion reste valable avec l'hypothèse moins stricte suivante :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.
(la convergence d'une série ne dépend pas des 1^{er} termes $u_0, \ldots, u_{n_0}$)

- Ce théorème est important. Il signifie que pour déterminer la nature d'une série à termes positifs, il suffit de la comparer à des séries de référence (dont on connaît la nature).

II.5.c) Application : critères d'équivalence et de négligeabilité

Théorème 10.
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes (strictement) positifs.

Supposons qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Plus précisément, on a :

1) $\sum u_n$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ *converge*

2) $\sum u_n$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ *diverge*

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, on a : $0 < m\, v_n \leqslant u_n \leqslant M\, v_n$.
Par le théorème 9, on en déduit que :

1) $\sum M\, v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum m\, v_n$ converge,

2) $\sum m\, v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum M\, v_n$ diverge.

Il suffit alors de remarquer que les séries $\sum m\, v_n$, $\sum M\, v_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature puisque $\sum\limits_{k=0}^{n} M\, v_k = M \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. □

Remarque

- La remarque précédente s'applique (ainsi qu'au théorème suivant).
- On peut aussi relâcher l'hypothèse de stricte positivité. Le théorème reste vrai si (u_n) est à termes positifs et (v_n) est une suite de termes positifs qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Théorème 11. *(Critère d'équivalence - critère de négligeabilité)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes (strictement) positifs.

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\ (\geqslant 0) \quad \Rightarrow \quad \sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature*

2)
- $u_n \geqslant 0,\ v_n \geqslant 0$
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$
- $\sum v_n$ *converge*

$\Rightarrow \sum u_n$ *converge*

Démonstration.

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon.$

Par exemple, si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 < \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$$

2) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon.$

Par exemple, si $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant 1$

Autrement dit : $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. □

Exercice
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{n+1}{(n+3)^2}$

b. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

c. $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

d. $\sum n^4 \,\mathrm{e}^{-n}$

e. $\sum n^n \,\mathrm{e}^{-n}$

f. $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

g. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

h. $\sum \dfrac{1}{n\,2^n}$

i. $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

j. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

Démonstration.
À vos stylos ! □

Remarque

- Il est à noter que pour étudier une série $\sum u_n$ à termes négatifs, il suffit d'étudier la série $\sum -u_n$ qui est à termes positifs.
- On aurait donc pu énoncer les Théorèmes 9, 10, 11 sur des séries à termes négatifs. En fait, l'hypothèse adéquate pour ces théorèmes est celle des séries à termes de signe constant.
- Notons que certaines séries ne sont pas à termes de signe constant.
  Un exemple particulier est celui des séries dont les termes sont de signes alternés (comme par exemple $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$). Il existe un résultat de convergence spécifique à ce type de séries nommées **séries alternées** (*cf* TD).

II.6. Notion de convergence absolue

Définition

Soit $\sum u_n$ une série.

- La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 12. *(Inégalité triangulaire)*

Soient $\sum u_n$ une série.

1) $\boxed{\sum u_n \text{ est absolument convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ est convergente}}$

2) Dans le cas de la convergence, on a de plus : $\boxed{\left| \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k|}$

Démonstration.

1) On introduit (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$$v_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

v_n est la partie positive de u_n et w_n est la partie négative de u_n.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant v_n \leqslant |u_n|$.
  - × Par hypothèse, $|u_n|$ est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 9, la série $\sum v_n$ est convergente.
- De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant w_n \leqslant |u_n|$.
  - × Par hypothèse, $|u_n|$ est le terme général d'une suite convergente.
  - × Ainsi, par le théorème 9, la série $\sum w_n$ est convergente.

Enfin, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - w_n$. La série $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes. Elle est donc convergente.

2) Par inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ étant supposées convergentes, on obtient le résultat souhaité par passage à la limite dans cette inégalité. □

Remarque

- La notion d'absolue convergence n'est pas équivalente à la notion de convergence. Plus précisément : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. On parle alors parfois de série **semi-convergente** pour désigner une série convergente mais non absolument convergente.
  ↪ on verra un exemple en TD

Un point sur le BO.

La notion de convergence absolue « est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète ».

III. Bilan du chapitre

Résumé des séries rencontrées

On regroupe dans le tableau ci-dessous les séries rencontrées dans le chapitre (cours et TD). Savoir démontrer les résultats contenus dans ce tableau constitue un excellent exercice de vérification des techniques du chapitre.

$\sum u_n$	Nature de $\sum u_n$
$\sum n^3$	$\sum n^3$ diverge (grossièrement)
$\sum n^2$	$\sum n^2$ diverge (grossièrement)
$\sum n$	$\sum n$ diverge (grossièrement)
$\sum 1$	$\sum 1$ diverge (grossièrement)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$
$\sum q^n$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} n\, q^{n-1}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} n\, q^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)\, q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lvert q\rvert < 1$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge
$\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge
$\sum \mathrm{e}^{-n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-n}$ converge
$\sum \dfrac{x^n}{n!}$	$\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge (pour tout $x \in \mathbb{R}$)
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge mais n'est pas absolument convergente
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est (absolument) convergente

MÉTHODO **Étude de séries** *(bilan du chapitre)*

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) Étude de la suite (u_n)

a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.

La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

2) Si $\sum u_n$ est à termes positifs ($i.e.$ si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant 0$)

On dispose des trois outils suivants.

a) Théorème de comparaison des séries à termes positifs.

b) Théorème d'équivalence des séries à termes positifs.

c) Théorème de négligeabilité des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.
Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence.
(on pensera notamment à des séries de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *dont la nature est donnée par le critère de Riemann)*

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

3) Si $\sum u_n$ « quelconque » ($\sum u_n$ à termes de signe non constant)

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geqslant 0$, les techniques du ***2)*** sont utilisables)

- Si $\sum |u_n|$ est convergente ($i.e.$ $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente *(une étude plus précise doit être réalisée).*

b) On revient à la définition : la série $\sum u_n$ est convergente si la suite (S_n) est convergente.

- On peut calculer S_n :
  - × en reconnaissant des séries usuelles (notamment les séries géométriques et géométriques dérivées premières / deuxième, la série exponentielle).
  - × en reconnaissant une somme télescopique.
- On peut estimer S_n à l'aide d'une inégalité telle que celle fournie par une comparaison séries / intégrales.

Évidemment, les techniques du ***3)b)*** restent utilisables pour une série à termes positifs.