Feuille d'exercices n°2 : Séries

Calcul de sommes par télescopage

Exercice 1. (☆) (COURS)

a. Montrer que pour $k > 0$: $0 \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b. En déduire une minoration de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ puis la nature de $\sum \dfrac{1}{k}$.

Exercice 2. (★)

Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3. (★)

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

a. Quelle est la nature de cette série ?

b. Calculer sa somme.
$\left(\textit{on pourra mettre } u_n \textit{ sous la forme } \ u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2} + \dfrac{c}{n+3}\right)$

Exercice 4. (★)

Calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{4n^2-1}$ *(cf exercice précédent).*

Exercice 5. (★★) *(d'après* EDHEC 1998 (S)*)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

1) a. Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

2) a. Montrer que (v_n) est strictement négatif.

b. Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$.

d. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra que :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{4} \leqslant 1 - \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leqslant x^2$$

3) a. En déduire la nature de la série $\sum {u_n}^2$.

b. En utilisant le résultat de l'exercice 10, déterminer la nature de $\sum u_n$.

(☆): application directe du cours, (★): pas de difficulté majeure, (★★): plus difficile, (★★★): costaud

Exercice 6. (★)

On considère la suite (a_n) est définie par : $\begin{cases} a_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = e^{-a_n}\, a_n \end{cases}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.

b. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

d. On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n.

e. En déduire la nature de $\sum a_n$.

Exercice 7. (★★)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

b. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

c. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$ et donner sa somme, si elle existe.

d. Prouver que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.

e. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Calcul de sommes par linéarité

Exercice 8. (★)

On admet que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

Calcul de sommes à vue (sommes usuelles)

Exercice 9. (★)

Étudier la nature et calculer la somme (si elle existe) des séries suivantes (on pourra discuter selon la valeur de x, dans les questions où un x intervient).

a. $\sum \dfrac{7}{2^{2n-5}}$

b. $\sum \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

c. $\sum \dfrac{n}{2^n}$

d. $\sum n^2 x^n$

e. $\sum \dfrac{n}{3^{2n+1}}$

f. $\sum \dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$

g. $\sum \dfrac{4n^2+5n}{5^n}$

h. $\sum \dfrac{n-1}{3^n}$

i. $\sum \dfrac{2n^2}{n^3-1}$

j. $\sum \dfrac{3(-2)^n}{n!}$

k. $\sum \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

l. $\sum \dfrac{n+7}{2^n n!}$

m. $\sum \dfrac{n(n-1)x^n}{n!}$

n. $\sum \dfrac{n^2 8^n}{n!}$

o. $\sum \dfrac{(-1)^n}{4^n}$

p. $\sum \dfrac{2^{n+2}}{(n+1)!}$

q. $\sum \dfrac{n(n+3)}{3^{n+2}}$

r. $\sum \dfrac{n^2-n}{(n+3)!}$

Séries à termes positifs et critères de convergence des séries

Exercice 10. (★)

a. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $0 \leqslant x^2 \leqslant x$.

b. On considère (x_n) une suite de réels positifs tel que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer que : $\sum x_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum x_n^2$ converge.

Exercice 11. (★★)

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \lambda \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$.

Note

Cet exercice est un cas particulier du **critère de d'Alembert**.

Soit (u_n) une suite de réels.

On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0, +\infty]$.

Alors :

- si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge,
- si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement),
- si $\ell = 1$ alors on ne peut conclure (par ce critère) sur la nature de $\sum u_n$.

Exercice 12. (★★)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On suppose que les séries $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent.

a. Démontrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ 2\,ab \leqslant a^2 + b^2$.

b. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que la série $\sum u_n\, v_n$ est (absolument) convergente.

Exercice 13. (★★★)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1) ***a.*** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leqslant t$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} u_n}$.

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

3) ***a.*** Montrer, à l'aide de la question 2b, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

c. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2^n \ell}$.

Nature d'une série

Exercice 14. (★★)
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

b. $\sum \dfrac{n+1}{(n+3)^2}$

c. $\sum n^4\,\mathrm{e}^{-n}$

d. $\sum n^n\,\mathrm{e}^{-n}$

e. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

f. $\sum \dfrac{1}{n\,2^n}$

g. $\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}$

h. $\sum \dfrac{1}{3^n - 2^n}$

i. $\sum \dfrac{n+2}{n^3+1}$

j. $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

k. $\sum \dfrac{n}{\ln(n)}$

l. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$

m. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

n. $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$

o. $\sum \dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{n}$

p. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$

Exercice 15. (★★)
Déterminer la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme.

a. $\sum \dfrac{1}{n^2-n}$

b. $\sum \dfrac{1}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$

c. $\sum \dfrac{1}{n^4 - 3^n}$

d. $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n^4}{2n^4}\right)$

e. $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3-5n+1}}$

f. $\sum \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

g. $\sum \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

h. $\sum \left(\dfrac{5n+1}{6n+2}\right)^n$

Reste d'une série

Exercice 16. (★)
On considère $\sum u_n$ une série convergente.
On appelle **reste d'ordre** n de la série $\sum u_n$ et on note R_n la quantité :

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$$

a. Cette quantité est-elle bien définie ?

b. Écrire la quantité R_n en fonction de S, somme de la série $\sum u_n$ et de S_n, somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.

c. En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Critère des séries alternées

Exercice 17. (★★)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant 0$,
- (u_n) est décroissante,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\sum (-1)^n\,u_n$ est convergente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\ u_k$.

a. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b. En déduire que la série $\sum (-1)^n\,u_n$ est convergente. On note S sa somme.

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.

d. Montrer que S vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant u_{n+1}$.
(on pourra traiter séparément le cas n pair et le cas n impair)

Application :

e. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$?
Donner un majorant de son reste d'indice n.

f. La série précédente est-elle absolument convergente ?

Comparaison séries intégrales

Exercice 18. (★)
On définit la fonction :

$$f \ : \ [2,+\infty[\ \to \ \mathbb{R}, \quad x \ \mapsto \ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\ dx$.

a. En utilisant l'inégalité de la question ***1.***, démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$$

b. On définit la fonction F suivante :

$$F \ : \ [2,+\infty[\ \to \ \mathbb{R}, \quad x \ \mapsto \ \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Calculer la dérivée de F.
En déduire une expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 19. (★★)
Soit $\alpha > 1$. On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$.

a. Montrer que la fonction f est décroissante.

b. Montrer que : $\forall k \geqslant 1,\ f(k+1) \ \leqslant \ \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt \ \leqslant \ f(k)$.
Faire apparaître sur une même représentation graphique ces quantités.

c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant \ \int_1^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant \ \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

d. En déduire que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ sont de même nature.

e. Calculer $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\ dt$.
En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ et de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

f. En conclure que : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \ \alpha > 1$.

Exercice 20. (★★) *(d'après* `EML 1992`*)*
On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

2) Montrer que : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

c. Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5) ***a.*** Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$: $0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(indication : on pourra commencer par démontre que $v_n - \ell \leqslant v_n - u_n$)

b. En déduire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Suites adjacentes

Exercice 21. (★★)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1) ***a.*** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.

b. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et une suite (α_n) de limite nulle tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \alpha_n$$

(le réel γ est appelé constante d'Euler)

2) ***a.*** Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\gamma - u_n| \leqslant |v_n - u_n|$.

c. Écrire un programme **Scilab** qui affiche une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

Énoncés de concours

Exercice 22 (★)*(d'après* `EML 2010`*)*
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

1. ***a)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

3. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

4. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

5. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

6. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.