Feuille d'exercices n°2 : Séries

Calcul de sommes par télescopages

Exercice 5. (★★) (d'après EDHEC 1998)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} \bullet \ u_0 = 1 \\ \bullet \ n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

1) ***a.*** Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout entier n :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$$

2) ***a.*** Montrer que v_n est strictement négatif.

Démonstration.

$$v_n \ < \ 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \ < \ 1 \ \Leftrightarrow \ u_{n+1} \ < \ u_n$$

et la dernière inégalité est vérifiée par stricte décroissante de (u_n). □

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente de limite nulle.

Démonstration.

$$v_n \ = \ \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \ = \ \frac{1}{f(u_n)} - 1$$

Or on sait que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f est continue en 0.
On en déduit que la suite $(f(u_n))$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \ = \ f(0) \ = \ 1$$

Ainsi, (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \ = \ \dfrac{1}{f(0)} - 1 \ = \ 1 - 1 \ = \ 0.$ □

c. Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k) \ &= \ \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\cancel{1} + \frac{u_{k+1}}{u_k} - \cancel{1}\right) \\ &= \ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right) \ = \ \ln(u_n) - \ln(u_0) \\ &= \ \ln(u_n) - \cancel{\ln(1)} \ = \ \ln(u_n) \end{aligned}$$

□

3) ***a.*** En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la série $\sum \ln(1+v_n)$ diverge.
  En effet, la suite des sommes partielles associée diverge vers $-\infty$.
  $(\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty)$
- Par ailleurs : $-\ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n \ (< 0)$.
  Ainsi, le théorème d'équivalence des séries à termes positifs assure que $\sum -v_n$ diverge et donc $\sum v_n$ diverge (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $-1 \neq 0$).

Parenthèse - on retiendra que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow\ \ln(1+v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

□

b. Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ -x^2 \leqslant \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} - 1 \leqslant -\dfrac{x^2}{4} \leqslant 0.$

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que : $-x^2 \leqslant \dfrac{2}{e^x+e^{-x}} - 1$. On a :
  - × $\forall x \in [0,1],\ e^x \leqslant 1 + x + x^2$.
    On se contente ici de justifier cette inégalité pour tout $x \in]-\infty, \ln(2)]$ (donc sur $[0, \ln(2)]$). C'est une inégalité de convexité :
    $$e^x - x^2 \leqslant 1 + x$$
    En effet, la fonction $x \mapsto e^x - x^2$ est concave sur $]-\infty, \ln(2)]$ et donc située en dessous de sa tangente en 0 qui est la droite d'équation : $y = 1 + x$.
  - × $\forall x \in [0,1],\ e^{-x} \leqslant 1 - x + x^2$.
    Démonstration analogue : la fonction $x \mapsto e^x - x^2$ est concave sur $[-\ln(2), +\infty[$ (et donc sur $[0,1]$) et donc située en dessous de sa tangente en 0 qui est la droite d'équation : $y = 1 - x$.

  Ainsi : $\forall x \in [0,1],\ e^x + e^{-x} \leqslant 2 + 2\,x^2$.

  On en déduit : $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}} \geqslant \dfrac{2}{2+2\,x^2}$ et $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}} - 1 \geqslant \dfrac{1}{1+x^2} - 1$.

  Il suffit alors de remarquer que :
  $$\begin{array}{cl} & \dfrac{1}{1+x^2} - 1 \geqslant -x^2 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{1+x^2} \geqslant 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow & (1-x^2)(1+x^2) \leqslant 0 \end{array}$$
  Or cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x^2 \in [0,1]$ *(signe du trinôme)*. Elle est donc notamment vérifiée pour tout $x \in [0,1]$.

- Démontrons maintenant que : $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}} - 1 \leqslant -\dfrac{x^2}{4} \leqslant 0$. On a :
  - × $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}$
  - × $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} \dfrac{(-x)^k}{k!}$

  On en déduit que : $e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + \displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} (1+(-1)^k)\, \dfrac{x^k}{k!}$.

  Or : $(1+(-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ 2 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$

  Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=4}^{+\infty} (1+(-1)^k)\, \dfrac{x^k}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} 2\, \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \geqslant 0$ et $e^x + e^{-x} \geqslant 2 + x^2$.

  Et donc : $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}} \leqslant \dfrac{2}{2+x^2}$ et $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}} - 1 \leqslant \dfrac{2}{2+x^2} - 1$.

  Il suffit alors de remarquer que :
  $$\begin{array}{cl} & \dfrac{2}{2+x^2} - 1 \leqslant -\dfrac{x^2}{4} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{2}{2+x^2} \leqslant \dfrac{4-x^2}{4} \\ \Leftrightarrow & (4-x^2)(2+x^2) - 8 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & 2x^2 - x^4 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & x^2\,(2-x^2) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & x^2\,(\sqrt{2}-x)\,(\sqrt{2}+x) \geqslant 0 \end{array}$$
  Or cette dernière inégalité est vérifiée sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ *(signe du trinôme)*. Elle est donc aussi vérifiée sur $[0,1]$. □

c. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

Démonstration.
On sait que (u_n) est décroissante, positive et que $u_0 = 1$.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
D'après la question précédente, on a :

$$-u_n^2 \ \leqslant\ \frac{2}{\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{-u_n}} - 1 \ \leqslant\ -\frac{u_n^2}{4}$$

Or : $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{-u_n}} - 1 \ =\ \dfrac{1}{f(u_n)} - 1 \ =\ v_n$.

Ainsi : $-u_n^2 \ \leqslant\ v_n \ \leqslant\ -\dfrac{u_n^2}{4}$ et : $u_n^2 \ \geqslant\ -v_n \ \geqslant\ 0$.

- × Or $\sum v_n$ diverge donc $\sum -v_n$ diverge (*on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par* $-1 \neq 0$).
- × Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^2$ diverge.

□

d. En utilisant le résultat de l'exercice 10, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Démonstration.
On sait que : $\forall x \in [0,1],\ 0 \ \leqslant\ x^2 \ \leqslant\ x$.
Or, d'après ***b.***, la suite (u_n) est positive et décroissante.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_0 = 1$.
On en déduit que : $0 \ \leqslant\ u_n^2 \ \leqslant\ u_n$.

- × Or $\sum u_n^2$ diverge.
- × Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

□

Critère des séries alternées

Exercice 17. ($\bigstar\bigstar$)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$,
- (u_n) est décroissante,
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

a. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Démonstration.

- La suite (S_{2n}) est décroissante. En effet :
$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} \ &=\ S_{2n+2} - S_{2n} \ =\ \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &=\ (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &=\ u_{2n+2} - u_{2n+1} \ \leqslant\ 0 \end{aligned}$$
- La suite (S_{2n+1}) est croissante. En effet :
$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \ &=\ S_{2n+3} - S_{2n+1} \ =\ \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &=\ (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} \\ &=\ u_{2n+2} - u_{2n+3} \ \geqslant\ 0 \end{aligned}$$
- Enfin on a :
$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} \ &=\ \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \ =\ (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &=\ -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

On en conclut que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
Elles sont donc convergentes et convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. □

b. En déduire que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente. On note S sa somme.

Démonstration.

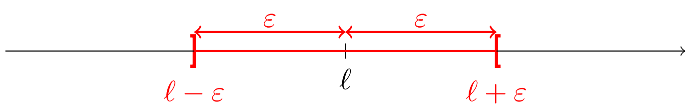
Démonstration formelle « sans les ε » :
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Comme $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indice pair de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indice impair de la suite (S_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.

Démonstration formelle « avec les ε » :
Soit $\varepsilon > 0$.

- On sait que : $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ |S_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_1, tous les éléments de (S_{2n}) sont dans l'intervalle rouge)



- On sait que : $S_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2,\ |S_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_2, tous les éléments de (S_{2n+1}) sont dans l'intervalle rouge)

Notons $N = \max(2n_1, 2n_2{+}1)$. Ces deux inégalités permettent d'affirmer :

$$\forall n \geqslant N,\ |S_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

(ceci signifie qu'à partir du rang N, tous les éléments de (S_n) sont dans l'intervalle rouge)

Ainsi (S_n) est convergente de limite ℓ (notée S). □

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.

Démonstration.

Démonstration hors programme :
Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant respectivement décroissante et croissante, on a :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} S_{2n+1} = S = \inf_{n\in\mathbb{N}} S_{2n}$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.
(les notions de borne supérieure et inférieure ne sont pas au programme)

Démonstration dans le cadre du programme :

- Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $S_{2n_0+1} > S$.
  Comme la suite (S_{2n+1}) est croissante, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ S_{2n+1} \geqslant S_{2n_0+1}$.
  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $S \geqslant S_{2n_0+1}$.
  On en déduit, par transitivité que : $S \geqslant S_{2n_0+1} > S$.
  Impossible !
  Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S$.
- On démontre de même que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S \leqslant S_{2n}$.

□

d. Montrer que S vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant u_{n+1}$.
(on pourra traiter séparément le cas n pair et le cas n impair)

Démonstration.
On distingue deux cas :

- Cas n pair : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.
  On a alors : $S - S_n = S - S_{2p} \leqslant 0$ (d'après la question précédente).

  On en déduit que :
  $$|S - S_n| = S_{2p} - S \leqslant S_{2p} - S_{2p+1} = -(-1)^{2p+1} u_{2p+1} = u_{2p+1} = u_{n+1} \qquad \textit{(car } S \geqslant S_{2p+1}\textit{)}$$

- Cas n impair : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$.
  On a alors : $S - S_n = S - S_{2p+1} \geqslant 0$ (d'après la question précédente).

  On en déduit que :
  $$|S - S_n| = S - S_{2p+1} \leqslant S_{2p+2} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} u_{2p+2} = u_{2p+2} = u_{n+1} \qquad \textit{(car } S \leqslant S_{2p+2}\textit{)}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant u_{n+1}$. □

e. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$?
Donner un majorant de son reste d'indice n.

Démonstration.
Notons (u_n) la suite définie par : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$.
La suite (u_n) vérifie les hypothèses de l'exercice :

× $\forall n \geqslant 2,\ u_n \geqslant 0$,

× (u_n) est décroissante,

× $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est convergente. □

f. La série précédente est-elle absolument convergente ?

Démonstration.
Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $\left|\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| = \dfrac{1}{\ln(n)} \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$.

× Or la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.

× Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{\ln(n)}$ est divergente.

Autrement dit : $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ n'est pas absolument convergente.

(cette série est convergente mais non absolument convergente : elle est dite semi-convergente) □

Exercice 13. (★★★)
On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2 \end{cases}$

1) a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition : $u_{n+1} - u_n = \left(u_n + u_n^2\right) - u_n = u_n^2 \geqslant 0$.
La suite (u_n) est donc croissante. □

b. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée.
Étant croissante, elle est convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Or on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + {u_n}^2$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient que :

$$\ell = \ell + \ell^2$$

D'où $\ell^2 = 0$ et donc $\ell = 0$.
(si on note $f : x \mapsto x+x^2$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et comme f continue en ℓ - car continue sur $\mathbb{R}$ - on obtient, par passage à la limite $\ell = f(\ell)$)

Or, comme (u_n) croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0$.
Par passage à la limite, on obtient : $\ell \geqslant u_0 > 0$.
Ceci contredit $\ell = 0$.

On en déduit que la suite (u_n) n'est pas majorée. Étant croissante, elle tend vers $+\infty$. □

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

a. Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) \leqslant t$.

Démonstration.
La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave. Sa courbe est donc située en dessous de ses tangentes, notamment sa tangente en 0, droite d'équation : $y = f'(0)\ (x-0) + f(0) = x$.

(évidemment, on peut aussi démontrer cette inégalité en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$) □

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1} u_n}$.

Démonstration.
On a montré dans la question ***1)*** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_0 \leqslant u_n$.
On en déduit en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{1}{u_n} > 0$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
Par définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\frac{\ln\left(u_n + u_n^2\right)}{2} - \ln(u_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{\ln\left(u_n^2\,(1+\frac{1}{u_n})\right)}{2} - \ln(u_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{2\ \ln(u_n) + \ln(1+\frac{1}{u_n})}{2} - \ln(u_n)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

- En appliquant l'inégalité de la question précédente à $t = \dfrac{1}{u_n} > 0$, on obtient :
$$\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{u_n}$$
- D'autre part : $\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right) > 0$.

  En effet, $u_n \geqslant u_0 > 0$ (question ***1)***) et donc $\dfrac{1}{u_n} > 0$.

D'où l'inégalité souhaitée. □

c. Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***1)*** : $\dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{u_0}$.
- D'après la question précédente :

$$0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{u_n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{u_0}$$

× Or la série $\sum \frac{1}{2u_0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car, à constante multiplicative près, il s'agit de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $|\frac{1}{2}| < 1$.

× D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum v_{n+1} - v_n$ est donc convergente.

□

d. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par sommation télescopique, on a :

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 \quad \text{ou encore} \quad v_n = v_0 + S_{n-1}$$

La suite (S_n) est convergente par convergence de la série $\sum v_{n+1} - v_n$. Il en est de même de la suite (S_{n-1}). On en déduit que la suite (v_n) est elle aussi convergente. □

3) a. Montrer, à l'aide de la question 2b, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n\, u_n}$$

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.
D'après la question ***2.b***, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{u_k}$$

La suite (u_n) étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant k$: $\dfrac{1}{u_k} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$.
On en déduit que :

$$\forall k \geqslant n,\ 0 \leqslant v_{k+1} - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{u_n}$$

En sommant ces inégalités pour $k \in [\![n, n+p]\!]$, on obtient :

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} (v_{k+1} - v_k) \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

- Or : $\sum\limits_{k=n}^{n+p} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+p+1} - v_n$ par télescopage.
- D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{1}{u_n} \sum_{k=n+1}^{n+p+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{p+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right) \leqslant \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

car : $\dfrac{1}{u_n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$ et : $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1} \leqslant 1$.

D'où l'inégalité souhaitée. □

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.

Démonstration.
La suite (v_n) étant convergente, $v_{n+p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Par passage à la limite, lorsque $p \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient : $0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \dfrac{1}{u_n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. □

c. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n \ell}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'encadrement précédent, on a :

$$0 \leqslant \ell - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}$$

donc $$0 \leqslant 2^n\ell - 2^n v_n \leqslant \frac{1}{u_n}$$ *(car $2^n > 0$)*

et $$0 \leqslant 2^n\ell - \ln(u_n) \leqslant \frac{1}{u_n}$$ *(par définition de v_n)*

ainsi $$1 \leqslant \exp\left(2^n\ell - \ln(u_n)\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}}$$ *(par croissance de la fonction* exp *sur $\mathbb{R}$)*

d'où $$1 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2^n\ell}}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}}$$

- Or $u_n \to +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{u_n}} \to \mathrm{e}^0 = 1$.
- Et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Ainsi, par le théorème d'encadrement, on obtient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2^n\ell}}{u_n} = 1$, ce qui démontre que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{2^n\ell}$. □

Comparaison séries intégrales

Exercice 19. (★★) *(d'après* `EML 1992`*)*
On note f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\,]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

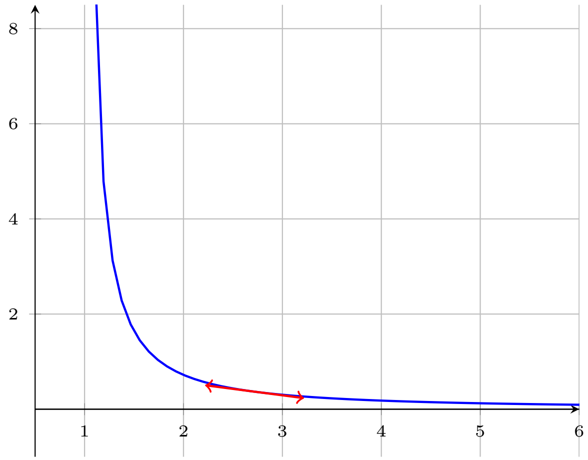
1) Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ est C^∞ sur $]1,+\infty[$ comme produit de fonctions C^∞ sur cet intervalle.
- La fonction f est elle aussi C^∞ sur $]1,+\infty[$ comme inverse de la fonction g qui ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$ puisque $\ln(x) > 0$ sur cet intervalle.
- Soit $x > 1$.
$$f'(x) = -\frac{\ln(x) + \frac{x}{x}}{(x\ln(x))^2} = -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}$$
Comme $(x\ \ln(x))^2 > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $-(\ln(x)+1)$.
Or : $\ln(x)+1 > 1 > 0$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$
Variations de f	$+\infty$ ↘	0

- La courbe représentative de f admet pour tangente en e la droite d'équation : $y = f'(\mathrm{e})\ (x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.
Or : $f'(\mathrm{e}) = -\frac{2}{\mathrm{e}^2} \simeq -0,27$.



□

2) Montrer que : $\forall k \geqslant 3$, on a : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 3$. Soit $t \in [k-1, k]$. On a :

$$k-1 \leqslant t \leqslant k$$

donc $f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$ *(par décroissance de f)*

et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\ dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dt$ *(en intégrant sur $[k-1, k]$ avec $k \geqslant k-1$)*

ainsi $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$

□

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note : $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

3) ***a.*** Montrer que : $\forall n \geqslant 3$, $S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} \leqslant \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt \leqslant S_n - \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.
D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![3, n]\!],\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \leqslant f(k-1)$$

En sommant ces $n-2$ inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=3}^{n} f(k) & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\ dt & \leqslant & \sum\limits_{k=3}^{n} f(k-1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ S_n - f(2) & & \displaystyle\int_{2}^{n} f(t)\ dt & & S(n) - f(n) \end{array}$$

(relation de Chasles)

La dernière égalité est obtenu par décalage d'indice :

$$\sum_{k=3}^{n} f(k-1) = \sum_{k=2}^{n-1} f(k) = S_n - f(n)$$

On obtient bien les inégalités souhaitées. □

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.
D'après la question précédente :
× $S_n \leqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{2\ln(2)}$,
× $S_n \geqslant \displaystyle\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{n\ln(n)}$.
On en conclut que :

$$\int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{n\ln(n)} \ \leqslant\ S_n \ \leqslant\ \int_2^n f(t)\ dt + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Il reste alors à calculer $\displaystyle\int_2^n f(t)\ dt$.
Remarquons que : $\dfrac{\frac{1}{t}}{\ln(t)} = \dfrac{u'(t)}{u(t)}$, avec $u(t) = \ln(t)$, pour tout $t \geqslant 2$.
Ainsi, la fonction $t \mapsto \ln(|\ln(t)|)$ est une primitive de f sur $[2, +\infty[$.
On en déduit : $\displaystyle\int_2^n f(t)\ dt = [\ \ln(|\ln(t)|)\ ]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$.
Ainsi :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n\ln(n)} \ \leqslant\ S_n \ \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

Enfin, comme $n \geqslant 3$, $\ln(n) > 0$ et donc $\frac{1}{n\ln(n)} > 0$.
On en déduit l'inégalité souhaitée. □

c. Établir que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Démonstration.
Comme $n \geqslant 3$, on a $n > \mathrm{e}$ et donc $\ln(\ln(n)) > \ln(\ln(\mathrm{e})) = 0$.
En divisant l'encadrement de la question précédente par $\ln(\ln(n))$, on obtient :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \ \leqslant\ \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \ \leqslant\ 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)}\,\frac{1}{\ln(\ln(n))}$$

Comme $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit, par théorème de composition des limites $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = 1$,
× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} + \frac{1}{2\ln(2)}\,\frac{1}{\ln(\ln(n))} = 1$.
D'après le théorème d'encadrement des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$$

Autrement dit : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

Remarque
Puisque $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. On en déduit que la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

□

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \quad \text{et} \quad v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4) À l'aide de la question 2, montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - (\ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1))) \\ &= f(n+1) - [\ \ln(\ln(t))\ ]_{n+1}^{n+2} \ = \ f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t\ \ln(t)}\ dt \end{aligned}$$

En effet, comme signalé en question ***3)b.***, la fonction $t \mapsto \ln(\ln(t))$ est une primitive de f sur $[2, +\infty[$.

Or $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} f(t)\ dt \ \leqslant\ f(n+1)$ par application de l'inégalité ***2)*** avec $k = n+2 \geqslant 3$. On en déduit que : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est donc croissante.

- En raisonnant de même :
$$v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ 0$$
L'inégalité est issue de l'application de l'inégalité de la question ***2)*** avec $k = n+1 \geqslant 3$. On en déduit que $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est donc décroissante.
- Enfin, on a :
$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))) \ = \ \ln\left(\tfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ \ln\left(\tfrac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \ = \ \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \end{aligned}$$
Or :
× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$
× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$
D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$.
On en conclut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) = \ln(1) = 0$.
Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

Remarque
Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, nous savons qu'elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n - \ell = 0$, nous pouvons écrire que : $v_n - \ell = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Et ainsi : $S_n - \ln(\ln(n)) - \ell = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Par conséquent, on obtient : $S_n = \ln(\ln(n)) + \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

□

5) a. Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$: $\ 0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Démonstration.

- Par l'absurde supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $v_n < \ell$.
Comme (v_n) est décroissante, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \leqslant v_{n_0}$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient que : $\ell \leqslant v_{n_0}$.
D'où : $\ell \leqslant v_{n_0} < \ell$. Impossible !
On en déduit que : $\forall n \geqslant 2,\ v_n \geqslant \ell$.
- On démontre de même que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant \ell$.
- D'où $-\ell \leqslant -u_n$ et $v_n - \ell \leqslant v_n - u_n$ pour tout $n \geqslant 2$.
- Enfin :
$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))) \ = \ \left[\ \ln(\ln(t))\ \right]_n^{n+1} \\ &= \int_n^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{n\ \ln(n)} \end{aligned}$$
L'inégalité provient de l'application du ***2)*** à $k = n+1 \geqslant 3$.

On obtient bien l'encadrement souhaité. □

b. En déduire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Démonstration.
Pour que v_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près, il suffit que n vérifie : $\dfrac{1}{n\ln(n)} \leqslant 10^{-3}$. On calcule alors les valeurs successives de S_n jusqu'à ce que cette inégalité soit vérifiée.

La valeur de v_n est enfin obtenue par sa définition : $v_n = S_n - \ln(\ln(n))$.

```
n = 1
S = 0
while 1 / (n * log(n)) > 10 ^ (-3)
    n = n + 1
    S = S + 1 / (n * log(n))
end
v = S - log(log(n))
disp(v)
```

Remarque

- Pour ce type de questions, on opère souvent comme suit.
  1) On trouve un n_0 tel que : $\dfrac{1}{n_0\ln(n_0)} \leqslant 10^{-3}$.
  2) On détermine, à l'aide d'une boucle `for` la valeur de :
  $$S_{n_0} - \ln(\ln(n_0))$$
- On a choisi ici d'opérer à l'aide d'une boucle `while` (ce qui oblige à mettre à jour un compteur `n`). Ce choix n'en est en fait pas un : on opère ainsi car on ne peut, par des manipulations algébriques basiques, trouver le n_0 du point ***1)***.
- Ces deux présentations (boucle `for` ou `while`) sont évidemment correctes. Le choix de l'une d'elle peut-être dicté par l'énoncé.

□

Exercice 20. (★)
On définit la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 2$.

- Traitons l'inégalité de gauche.

Tout d'abord	$x^2 \geqslant x^2 - 1 \geqslant 3$	*(l'inégalité de droite est vérifiée car $x \geqslant 2$)*
donc	$\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{x^2-1} \geqslant \sqrt{3}$	*(car la fonction racine est croissante)*
ainsi	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	*(par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$)*

$$\boxed{\text{Comme } x \geqslant 2,\ \sqrt{x^2} = x \text{ et ainsi : } \dfrac{1}{x} \leqslant f(x).}$$

- Pour la deuxième inégalité, raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{cll}
 & f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \\
\Leftrightarrow & \sqrt{x^2-1} \geqslant \sqrt{x-1} & \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow & x^2 - \cancel{1} \geqslant x - \cancel{1} & \textit{(par stricte croissance de la fonction élévation au carré sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\Leftrightarrow & x^2 - x \geqslant 0 &
\end{array}$$

Or : $x^2 - x = x\ (x-1)$.
On reconnaît une fonction polynomiale de degré 2 de racines 0 et -1 et dont le cœfficient du terme dominant est positif. On en déduit que :

$$\begin{cases} x\ (x-1) \leqslant 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ x\ (x-1) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La dernière inégalité étant vérifée, la première l'est aussi.

$$\boxed{\text{Ainsi : } f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}$$

□

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\ dx$.

a. En utilisant l'inégalité de la question ***1.***, démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Soit $x \geqslant 2$. D'après la question précédente :

$$f(x) \ \geqslant\ \frac{1}{x}$$

- Ainsi, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($n \leqslant 2$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_2^n f(x)\ dx & \geqslant & \displaystyle\int_2^n \frac{1}{x}\ dx & & \\
\parallel & & \parallel & & \\
I_n & & [\ \ln(|x|)\ ]_2^n & = & \ln(n) - \ln(2)
\end{array}$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n) - \ln(2) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison, } \lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$

□

b. On définit la fonction F suivante :

$$F \ : \ \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

Calculer la dérivée de F.
En déduire une expression de I_n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $[2,+\infty[$ car est la composée $v_2 \circ v_1$ des fonctions :
  - × $v_2 : x \mapsto x^2 - 1$ dérivable sur $[2,+\infty[$ car polynomiale, et telle que $v_2([2,+\infty[) \subset \,]0,+\infty[$ (pour tout $x \geqslant 2$, $x^2 - 1 \geqslant 3 > 0$).
  - × $v_1 : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \geqslant 2$.

$$u'(x) \ = \ \frac{1}{\cancel{2}\,\sqrt{x^2-1}}\,\cancel{2}x \ = \ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

- La fonction F est dérivable sur $[2,+\infty[$ car est la composée $H \circ G$ des fonctions :
  - × $G : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$ dérivable sur $[2,+\infty[$ d'après ce qui précède, et telle que $G([2,+\infty[) \subset \,]0,+\infty[$ (pour tout $x \geqslant 2$, $x + \sqrt{x^2-1} \geqslant x \geqslant 2 > 0$).
  - × $H : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \ = \ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ = \ f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 2,\ F'(x) = f(x)}$$

- On en déduit que F est une primitive de f. Ainsi :

$$I_n \ = \ \int_2^n f(x)\,dx \ = \ [\ F(x)\ ]_2^n \ = \ F(n) - F(2) \ = \ \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\boxed{I_n \ = \ \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3})}$$

□

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} I_n - \ln(n) &= \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(n) - \ln(2+\sqrt{3}) \\ &= \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n}\right) - \ln(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\ \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Ainsi, par composition des limites, la fonction ln étant continue en 2 :

$$\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n - \ln n \ = \ \ln(2) - \ln(2+\sqrt{3}) \ = \ \ln\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)}$$

□

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 3$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est dérivable sur $[2,+\infty[$ comme inverse de la fonction u, dérivable sur $[2,+\infty[$ et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $[2,+\infty[$.
 Soit $x \geqslant 2$.

$$f'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\,(\sqrt{x^2-1})^2} \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est décroissante sur } [2,+\infty[.}$$

- Pour tout $x \in [k-1,k]$:

$$\begin{array}{lccccc} & k-1 & \leqslant & x & \leqslant & k \\ \text{donc} & f(k-1) & \geqslant & f(x) & \geqslant & f(k) \end{array}$$

(car $k-1 \geqslant 2$ et que f est décroissante sur $[2,+\infty[$)

$$\text{et} \quad \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx \geqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx$$

(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$))

$$\textit{i.e.} \quad f(k-1) \geqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant f(k)$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 3$: $f(k-1) \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant f(k)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } f(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx.}$$

- On procède de même sur $[k,k+1]$.
 On démontre alors que pour tout $k \geqslant 3$: $f(k) \geqslant \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.}$$

Remarque
Pour le calcul de f', on pouvait remarquer : $\forall x \geqslant 2,\ f(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$.
Ainsi :

$$f'(x) = -\frac{1}{\cancel{2}}\,(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\,\cancel{2}\,x = -x\,(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)} \quad \square$$

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- En sommant les inégalités précédentes, vérifiées pour tout $k \geqslant 3$:

$$\sum_{k=3}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

$$\text{donc} \quad \int_{3}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,dx$$

- Tout d'abord : $\displaystyle\int_{3}^{n+1} f(x)\,dx = \int_{2}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{2}^{3} f(x)\,dx$.

- Et comme $\displaystyle\int_2^{n+1} f(x)\,dx = I_{n+1}$, on obtient :

$$\left(f(2) - \int_2^3 f(x)\,dx\right) + I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + f(2)$$

- Puis, comme f est décroissante sur $[2,+\infty[$: $f(x) \leqslant f(2)$.
Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2 \leqslant 3$), on obtient :

$$\int_2^3 f(x)\,dx \leqslant \int_2^3 f(2)\,dx = f(2)$$

et donc $f(2) - \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx \geqslant 0$.

- On calcule enfin : $f(2) = \dfrac{1}{\sqrt{4-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

□

c. Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- Comme $\ln(n) > 0$, on déduit de la question précédente que :

$$\frac{I_{n+1}}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{I_n}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{3}\,\ln(n)}$$

Or :

$$\begin{aligned} I_n &= \ln(n+\sqrt{n^2-1}) = \ln\left(n\left(1+\sqrt{1-\tfrac{1}{n^2}}\right)\right) \\ &= \ln(n) + \ln\left(1+\sqrt{1-\tfrac{1}{n^2}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{\ln(n)} &= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

En effet, $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par théorème de composition, la fonction ln étant continue en 2 :

$$\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+\sqrt{1}) = \ln(2)$$

- De même :

$$\begin{aligned} \frac{I_{n+1}}{\ln(n)} &= \frac{\ln(n+1) + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

En effet, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\,\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$

- En conclusion :

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{I_{n+1}}{\ln(n)} & \leqslant & \dfrac{S_n}{\ln(n)} & \leqslant & \dfrac{I_n}{\ln(n)} + \dfrac{1}{\sqrt{3}\,\ln(n)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty} \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

Ainsi, par le théorème d'encadrement : $\dfrac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{Ce qui démontre que : } S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

4. On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Cherchons a et b tels que spécifiés. Tout d'abord :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a\,(k+1)+b\,(k-1)}{k^2-1} = \frac{(a+b)\,k+(a-b)}{k^2-1}$$

En identifiant les polynômes de chaque numérateur, on obtient le système : $(S) \left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=1 \end{array}\right.$. Or :

$$(S) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 0 \\ & & 2b & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcr} 2a & = & -1 \\ 2b & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Les réels } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ conviennent.}}$$

- On considère maintenant $\alpha = 1$. On a :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{-\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1}\right) + 1 + \frac{1}{2} - \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}}$$

□

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Démonstration.
Procédons par disjonction de cas.

- Si $\alpha < 0$ alors :

$$\frac{1}{(n^2-1)^\alpha} = (n^2-1)^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{(n^2-1)^\alpha}$ est donc (grossièrement) divergente.

$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ diverge si } \alpha < 0.}$$

- Si $\alpha \geqslant 0$ alors :

$$\frac{1}{(n^2-1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}} \ (\geqslant 0)$$

En effet : $\dfrac{\frac{1}{(n^2-1)^\alpha}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \dfrac{n^{2\alpha}}{(n^2-1)^\alpha} = \dfrac{n^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente si et seulement si $2\alpha > 1$ autrement dit si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ en tant que série de Riemann d'exposant 2α.

On en déduit, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{(n^2-1)^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$ □

Énoncés de concours

Exercice 22 (★)*(d'après* `EML 2010`*)*
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1+x^2)$$

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

1. a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h \circ g$ des fonctions :
  × $g : x \mapsto 1+x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0,+\infty[$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geqslant 1 > 0$).
  × $h : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
- On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}\, 2x = \frac{(1+x^2)-2x}{1+x^2} = \frac{1-2x+x^2}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}}$$ □

b) En déduire le sens de variation de f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme $1+x^2 > 0$, la quantité $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$ est du signe de $(1-x)^2$.
  On en déduit le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$+$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  – Déterminons tout d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Si $x > 0$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) &= \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \\ &= 2\ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln(1+x^2) \\ &= x - 2\ \ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x\left(1 - 2\ \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \end{aligned}$$

Or : $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Et : $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ et $x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

– Déterminons maintenant $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Remarquons que :

× $x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$

× comme $1+x^2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, par théorème de composition des limites : $-\ln(1+x^2) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Remarque

- On utilise dans cette démonstration l'égalité : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Insistons sur le fait que cette égalité n'est vérifiée que lorsqu'on peut l'écrire. Autrement dit, cette égalité est vérifiée seulement lorsque $x > 0$ (la quantité $\ln(x)$ est alors bien définie).
- Dans le cas où $x < 0$ on peut écrire :

$$\ln(x^2) = \ln((-x)(-x)) = \ln(-x) + \ln(-x) = 2\ln(-x)$$

□

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

Démonstration.
Par le même raisonnement qu'en ***1.a)***, on démontre que la fonction f est deux fois dérivable (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\ (1-x)(-1)(1+x^2) - (1-x)^2\ 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -2\ (1-x)\ \frac{(1+x^2) + x\ (1-x)}{1+x^2} \\ &= -2\ (1-x)\ \frac{1+\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^2} = -2\ (1-x)\ \frac{1+x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2\ (x-1)\ \frac{1+x}{(1+x^2)^2}}$$

□

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.
Cette question a été résolue en ***1.b)***.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Remarque

- En question ***1.b)***, il est demandé de donner les variations de f. Formellement, on ne demande donc pas le tableau de variations. On l'a fait car c'est le bon outil pour représenter graphiquement les choses. Dans ce cas, on doit exposer les calculs de limite en ***1.b)***.
- Il faut veiller à éviter de renvoyer le correcteur à une autre page / question pour la résolution d'une question. Il faut au contraire toujours faciliter la lecture pour le correcteur. En commençant par respecter scrupuleusement la numérotation des questions.

- L'ordre des questions de l'énoncé n'était peut-être pas heureux mais en lisant l'énoncé jusqu'au bout, on évite de répondre aux questions au mauvais endroit. On s'efforcera de respecter au maximum l'esprit de l'énoncé. □

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

3. Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \leqslant 0$$

En effet, $1+x^2 \geqslant 1$ et donc, par croissance de la fonction ln, $\ln(1+x^2) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On appplique l'inégalité précédente à $x = u_n \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bien décroissante.}}$$

□

4. Établir que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que :

$$f([0, +\infty[) \ = \ [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)[\ = \ [0, +\infty[$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \ f(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 0$.
  - ▶ **Initialisation** :
    Par définition : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
    On en déduit $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 0$.
    En appliquant l'inégalité au-dessus à $x = u_n \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n)$.

- La suite (u_n) est :
  × décroissante,
  × minorée par 0.

  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

- La fonction f étant continue en ℓ, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

  Ainsi, ℓ est un point fixe de f.

- Déterminons alors l'ensemble des points fixes de f.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Leftrightarrow \quad \cancel{x} - \ln\left(1+x^2\right) = \cancel{x} \\ & \Leftrightarrow \quad \ln\left(1+x^2\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \exp\left(\ln\left(1+x^2\right)\right) = \exp(0) \\ & \Leftrightarrow \quad \cancel{1} + x^2 = \cancel{1} \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) converge vers 0, seul point fixe de f. □

5. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

```
n = 0
u = 1
while u > 10 ^ (-3)
    n = n + 1
    u = u - log(1 + u^2)
end
disp(n)
```

Remarque

- D'après la question précédente, on sait que la suite (u_n) converge vers 0. On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - 0| \leqslant 10^{-3}$$
Toujours d'après la question précédente : $|u_n - 0| = |u_n| = u_n$ car $u_n \geqslant 0$.
- Ainsi, on est assuré de la terminaison de la boucle `while`. Le programme consiste en fait à rechercher le premier rang n_0 tel que l'inégalité $u_n \leqslant 10^{-3}$ est vérifiée. □

6. a) Établir : $\forall x \in [0;1], \ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$.

- Raisonnons par équivalence :
$$f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow\ \cancel{x} - \ln(1+x^2) \leqslant \cancel{x} - \frac{1}{2}\,x^2 \ \Leftrightarrow\ 2\,\ln(1+x^2) \geqslant x^2 \ \Leftrightarrow\ 2\,\ln(1+x^2)$$
- On considère alors la fonction $g : x \mapsto 2\ \ln(1+x^2) - x^2$.
Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ car $x \mapsto \ln(1+x^2)$ l'est.
$$g'(x) = 2\,\frac{1}{1+x^2}\,2x - 2x = 2x\,\frac{2}{1+x^2} - 1 = 2x\,\frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} = 2x\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$$
- Tout d'abord : $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$.
Comme $x \in [0,1]$, $2x \geqslant 0$ et ainsi la quantité $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$ et est nulle si $x = 0$. On reconnaît l'expression d'un polynôme du second degré de racines évidentes -1 et 1 et dont le cœfficient du terme de plus haut degré est négatif. Ainsi :
$$\forall x \in [-1,1], \ g'(x) \geqslant 0$$
- La fonction g est donc croissante sur $[0,1]$. On en déduit que :
$$\forall x \in [0,1], \ g(x) \geqslant g(0) = 2\ \ln(1+0^2) - 0^2 = 0$$

Cette inégalité étant équivalente à celle qu'on souhaite montrer, on a bien :
$$\forall x \in [0,1], \ f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\,x^2$$
□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :
$$\begin{array}{rl} & f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}\, x^2 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2}\, x^2 \leqslant x - f(x) \\ \text{ainsi} & x^2 \leqslant 2\ (x - f(x)) \end{array}$$
$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ x^2 \leqslant 2\ (x - f(x))}$$
- On a démontré en question ***2.*** que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
On sait de plus, d'après la question ***1.***, que la suite (u_n) est décroissante. On en déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0 = 1$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n \in [0,1]$, on obtient :
$$u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - f(u_n))$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - u_{n+1}).}$$

$\square$

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
Pour ce faire, on étudie la suite de ses sommes partielles (S_n) :
$$S_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \ = \ u_0 - u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u_0 - 0 = 1$$
$$\boxed{\text{La série } \sum (u_n - u_{n+1}) \text{ est convergente (de somme 1).}}$$
- – D'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - u_{n+1})$$
  – Or la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel).
  – On en déduit, par le critère de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum\ u_n^2$ est elle aussi convergente.
$$\boxed{\text{La série } \sum\ u_n^2 \text{ est convergente.}}$$

$\square$