Feuille d'exercices n°3 : Espaces vectoriels

Sous-espace vectoriel (sev)

Exercice 1. (★)
Pour chacun des espaces vectoriels E et des parties F, dire si F est un sous-espace vectoriel de E.

a. E est l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(= \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.
F est l'ensemble des fonctions paires.

b. E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites divergentes.

c. E est l'ensemble des suites réelles.
F est l'ensemble des suites convergentes.

d. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
F est l'ensemble des fonctions f vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
(autrement dit, des fonctions f telles que $f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x)$).

e. $E = \mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes.
F est l'ensemble contenant le polynôme nul et les polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

Sev engendré par une partie

Exercice 2. (★)
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On considère $\overrightarrow{u} = (2, 1, -3)$, $\overrightarrow{v} = (3, 2, -1)$, $\overrightarrow{s} = (1, 0, -5)$ et $\overrightarrow{t} = (1, 1, 2)$.
Montrer : $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\right)$.

Exercice 3. (★)
On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (-4, 4, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-3, 2, 1)$, $\overrightarrow{s} = (-1, 2, 2)$ et $\overrightarrow{t} = (-1, 6, 7)$ dans $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer : $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\right)$.

b. Déterminer une base de $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 4. (★)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E.

a. Montrer que si $\overrightarrow{w} \in \text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ alors $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

b. Montrer : $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w})$.

c. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle libre ?

Espaces vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 5. (★)
Déterminer une base et la dimension des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :

a. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.

b. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.

c. Compléter la base de F_1 en une base de $\mathbb{R}^3$.

d. Compléter la base de F_2 en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. (★)
Soient $v_1 = (2, 1, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 2, 3, 0)$, $v_4 = (2, -1, 3, 7)$, $v_5 = (4, 4, 6, 5)$ et $v_6 = (2, 2, 3, -5)$ six vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
On note $E = \text{Vect}\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

a. La famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_4, v_5, v_6)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

b. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de E.

c. Donner les coordonnées du vecteur v_6 dans cette base.

d. Déterminer un vecteur v_7 tel que (v_1, v_2, v_3, v_7) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7. ($\bigstar$)
On note $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{w} = (-1,1,-1)$.

a. Montrer que $\mathscr{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ dans la base $\mathscr{B}$.
En déduire les coordonnées de (x,y,z) dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 8. ($\bigstar$)
Pour chaque famille A_k suivante, déterminer si elle est libre, le rang de la famille, puis si c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

a. $A_1 = ((1,2),(1,-1))$.

b. $A_2 = ((1,4))$.

c. $A_3 = ((0,0))$.

d. $A_4 = ((1,-2),(2,3),(1,0))$.

Exercice 9. ($\bigstar$)

a. Montrer que $(\,(2,1),(1,1)\,)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer les coordonnées de $(1,-3)$ dans cette base.

Exercice 10. ($\bigstar$)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

a. Montrer que $((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$ en est une base.

b. Quelles sont les coordonnées de $(1,0,0,-1)$ dans cette base ?

Espace vectoriel défini par un système d'équations linéaires

Exercice 11. ($\bigstar\bigstar$)
Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions (x,y,z,t) du système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & t & & & = & 0 \\ x & - & 3y & & & + & 9z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & - & t & + & 18z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 12. ($\bigstar\bigstar$)
Toutes les réponses devront être justifiées.

1) Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

a. $A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\big\}$

b. $B = \big\{(x+y, x-y, 2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\}$

c. $C = \big\{(2x-3y, x+1, -x+3y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\}$

d. $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 3z\big\}$.

2) Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel réel.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$ est-il un espace vectoriel réel ?

Espaces vectoriels de polynômes

Exercice 13. ($\bigstar\bigstar\bigstar$)
On note $E = \mathbb{R}_4[X]$.

- On dit qu'un polynôme P est pair s'il définit une fonction polynomiale paire *i.e.* si : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(-x)$.
  On définit de manière similaire les polynômes impairs.
- Si F et G sont deux ev, on note $F + G = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \in F\ \overrightarrow{v} \in G\}$.

a. Montrer que l'ensemble F des polynômes pairs de E est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

b. Même question avec l'ensemble G des polynômes impairs de E.

c. Montrer : $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

Exercice 14. (★)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$.

a. Montrer que $(1, 1+X, (1+X)^2, (1+X)^3)$ en est une base.

b. Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

c. Montrer que :
$((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$
est aussi une base.

d. Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 15. (★★)
Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.
Si oui, en donner une base et la dimension.

a. $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ 2P(x) - xP'(x) = 0\}$.

b. $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) + 5P'(x) + 3x = 0\}$.

c. $H_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 2\,P(1)\}$.

d. $H_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

e. $H_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 1\}$.

f. $H_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$.

g. $H_7 = \big\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - (x-1)P'(x) = (2x^2 - 3x + 4)P''(x)\big\}$.

h. $H_8 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geqslant 3\}$

Exercice 16. (★)
On considère les polynômes :

$$P(X) = X,\ Q(X) = X - 1 \ \text{ et } \ R(X) = (X-1)(X-2)$$

a. Montrer que la famille (P, Q, R) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Soient a, b, c trois réels. Déterminer un polynôme $T \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$T(1) = a,\ T(2) = b,\ T(3) = c$$

Exercice 17. (★)
On considère les polynômes :

$$P_1(X) = 1 + X + X^2,\ P_2(X) = X + X^2 \ \text{ et } \ P_3(X) = X^2$$

a. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer les coordonnées de $P(X)$ dans la base (P_1, P_2, P_3).

Exercice 18. (★)

a. Montrer que $\big(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. Déterminer les coordonnées de X^3 dans cette base.

c. Plus généralement, déterminer les coordonnées de :

$$P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$$

dans cette base.

Exercice 19. (★)
Pour chaque famille A_k suivante, déterminer si elle est libre, le rang de la famille puis si c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
On notera (e_0, e_1, e_2) ou $(1, X, X^2)$ la base canonique de $R_2[X]$.

a. $A_1 = (P_1, P_2, P_3)$ où les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont définis par :
- × $P_1(X) = -1 + 3X + X^2$,
- × $P_2(X) = 4 - 2X + 3X^2$,
- × $P_3(X) = 4 - 3X - 2X^2$.

b. $A_2 = (P_1, P_2, P_3)$ où les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont définis par :
- × $P_1(X) = -5 + 2X$,
- × $P_2(X) = 6 - X^2$,
- × $P_3(X) = 27 - 6X - 2X^2$.

Exercice 20. (★★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $(X^{n-k}(1-X)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ suivante :

$$(X^n, X^{n-1}(1-X), X^{n-2}(1-X)^2, \ldots, X(1-X)^{n-1}, (1-X)^n)$$

a. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer les coordonnées de 1 et de $\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^n$ dans cette base.

Exercice 21. (★★)

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille :

$$(X,\ X(X-1),\ X(X-1)(X-2),\ \ldots,\ X(X-1)\ldots(X-n))$$

est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

On peut généraliser le résultat obtenu dans la question précédente. On dit qu'une famille finie de polynôme $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est **échelonnée en degré** lorsque les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont de degrés deux à deux distintcs.

b. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que toute famille de n polynômes non nuls et de degrés echelonnés est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
(quitte à renuméroter les polynômes, on pourra supposer que :
$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_n)$*)*

Espaces vectoriels de suites

Exercice 22. (★★)
On considère E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

b. Montrer que $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une famille libre de E.

c. En déduire la dimension de E.

Exercice 23. (★★)

1) Montrer que $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} - 2u_n\right\}$ est un espace vectoriel réel.

2) Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui ont une structure d'espace vectoriel réel ? Justifier votre réponse.

a. L'ensemble des suites réelles à termes positifs.

b. L'ensemble des suites réelles bornées.

c. L'ensemble des suites réelles convergentes.

d. L'ensemble des suites réelles divergentes.

e. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge.

Espaces vectoriels de fonctions

Exercice 24. (★★)
On considère l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs réelles.
On définit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_1(x) = \ln(x),\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = e^x,\ f_4(x) = e^{x+3},\ f_5(x) = \frac{1}{x}$$

a. La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?

b. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$.

Exercice 25. (★)

a. Montrer que $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)\right\}$ est un espace vectoriel réel.

b. Montrer que $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$ est un espace vectoriel réel.

Exercice 26. (★★★)
On note $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

a. Montrer que $\mathscr{C}$ est un espace vectoriel réel.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = e^{nx}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathscr{C}$.
En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ n'est pas de dimension finie.

c. En déduire que l'espace vectoriel $\mathscr{F}$ n'est pas de dimension finie.

Remarque

- À l'aide d'un raisonnement analogue, on montre que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie, en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre.
- De même, on montre que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles n'est pas de dimension finie, en montrant, par exemple, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la famille $((1)_{n\in\mathbb{N}},\ (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots,\ (p^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Espaces vectoriels de matrices colonnes

Exercice 27. (★)
On se place dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère les matrices colonne

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B} = (X_1, X_2, X_3)$.

En déduire les coordonnées de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 28. (★)
On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
On considère les vecteurs de E :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_4 \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où m désigne un paramètre réel.

a. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (X_1, X_2, X_3, X_4) est une famille génératrice de E.

b. Lorsque $\mathrm{Vect}\,(X_1, X_2, X_3, X_4) \neq E$, déterminer sa dimension.

c. Lorsque $m = -3$, déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathrm{Vect}\,(X_1, X_2, X_3, X_4)$ extraite de la famille (X_1, X_2, X_3, X_4).
Compléter la base $\mathscr{B}$ en une base de E.

d. Lorsque $m = 1$, déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathrm{Vect}\,(X_1, X_2, X_3, X_4)$ extraite de la famille (X_1, X_2, X_3, X_4). Compléter la base $\mathscr{B}$ en une base de E.

Espaces vectoriels de matrices

Exercice 29. (★)
Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre 2.

a. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2c \right\}$

b. $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

c. $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 1 \right\}$

Exercice 30. (★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M \right\}$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles d'ordre n :

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M \right\}$$

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Justifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont de dimension finie.
On note alors $\mathscr{B}_s$, respectivement $\mathscr{B}_a$, une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, resp. de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$.

a. Déterminer une base $\mathscr{B}_s$ de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

b. Déterminer une base $\mathscr{B}_a$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

4) Montrer : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puis : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.

5) En déduire que la famille de matrices $\mathscr{B}$ obtenues en réunissant les matrices des bases $\mathscr{B}_s$ et $\mathscr{B}_a$ forme une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6) Déterminer $\dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) + \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)$.
Déterminer $\dim\big(S_n(\mathbb{R})\big)$, puis $\dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)$.

Exercice 31. (★) *(d'après* `EML - Maths I - 2004`*)*
On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles :

$$\begin{aligned} & E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A\,M = M\} \\ \text{et} \quad & E_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie 1

1) Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des espaces vectoriels réels.

2) **a.** Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$

b. Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$

3) **a.** Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$

b. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie 2

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $F_2 = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 2X\}$ est un espace vectoriel réel. Déterminer une base de F_2.

2) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3) Calculer la matrice $D = P^{-1}CP$.

4) **a.** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer : $M \in E_1(C) \Leftrightarrow P^{-1}M \in E_1(D)$.

b. Montrer que, pour tout $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})(\mathbb{R})$, $N \in E_1(D)$ si, et seulement si, il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$. Quelle est la dimension de $E_1(C)$?

d. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base de $E_2(C)$. Quelle est la dimension de $E_2(C)$?
A-t-on $E_1(C) = E_2(C)$?

5) **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $C^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice C^n en fonction de n.

Exercice 32. (★)
On définit les trois matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}\,(A, B, C)$.

Exercice 33. (★)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.
Si oui, en donner une base et la dimension.

a. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.

b. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB$.

c. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = B$.

d. L'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AM = M$.

Exercice 34. (★)
On considère les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a. La famille (M_1, M_2, M_3) est-elle libre ?

b. La famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est-elle libre ?

Exercice 35. (★)
On considère $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a-b & b & a \\ 2a & 2b & 2a-b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer la dimension de $\mathcal{E}$.

Union, intersection et somme d'ev

Exercice 36. (★★)
On considère : $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 4z = 0\big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 0))$.

1) Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F et une base $\mathscr{B}_G$ de G.

3) Déterminer la dimension de F et la dimension de G.

4) Montrer que la famille obtenue en réunissant les vecteurs des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

5) Montrer : $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$.

6) Soit un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de F et un vecteur $\overrightarrow{v}$ de G tels que $(a, b, c) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^3$.

b. En utilisant 5, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont uniques.

Exercice 37. (★★)
Soit E un espace vectoriel réel.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a. Démontrer que $F \cap G$ de F et G est un sous-espace vectoriel de E.
On rappelle que $F \cap G = \{x \in E \mid x \in F \text{ et } x \in G\}$.

b. Démontrer que l'ensemble $F + G = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$ est un sous espace vectoriel de E.

c. Démontrer que, de manière générale, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
(on pourra considérer $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ *et* $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$*)*

d. Démontrer l'équivalence :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \ \Leftrightarrow\ (F \subset G \ \texttt{OU} \ G \subset F)$$

On rappelle : $F \cup G = \{x \in E \mid x \in F \ \texttt{OU} \ x \in G\}$.

Exercice 38. (★★)
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On pose $\varepsilon_1 = 2e_4 - e_3$ et $\varepsilon_2 = e_2 + e_3$, et $F = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

a. Déterminer la dimension de F.

b. Compléter la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en une base de $\mathbb{R}^4$.
On note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base obtenue et $G = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

c. Montrer : $F \cap G = \{(0,0,0,0)\}$.

d. Montrer que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Théorème de la base incomplète

Exercice 39. (★★★)
Soit E un espace vectoriel et $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une famille libre de E.

a. Montrer que si $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ n'est pas génératrice de E, alors il existe un vecteur $\overrightarrow{f} \in E$ tel que $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f})$ est encore libre.

b. On suppose que E est de dimension finie n.
Montrer qu'on peut compléter la famille de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ en une base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_{n-p}})$ de E.

Exercice 40. (★★)
Soient E un espace vectoriel, F et G deux sev tels que $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
Soient $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F et $(\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_q})$ une base de G.

a. Démontrer que $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_q})$ est une famille libre.

b. Démontrer que $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_q})$ est une base de $F + G$.
(on pourra utiliser le résultat de l'Exercice 41)

Exercice 41. (★★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On cherche à établir la formule suivante :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

où $F + G$ est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F + G = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \in F \text{ et } \overrightarrow{v} \in G\}$$

On note $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de $F \cap G$.

a. Montrer qu'il existe une base de F de la forme $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_q})$.
Montrer de même qu'il existe une base de G de la forme $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_r})$.
(on pourra utiliser le résultat de l'Exercice 39)

b. Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_q}, \overrightarrow{g_1}, \ldots, \overrightarrow{g_r})$ est une base de $F + G$.

c. Conclure.

Exercice 42. (★★★)
Soit E un espace vectoriel de dimension 4. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension 3 tels que $E_1 \neq E_2$.

1) Montrer : $\dim(E_1 \cap E_2) \leqslant 2$.
(on pourra utiliser le résultat de l'Exercice 41)

2) On suppose que $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$.

a. Montrer qu'il existe cinq vecteurs $\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v_2}$ tels que $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})$ forme une base de E_1 et $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2})$ forme une base de E_2.
(on pourra utiliser le résultat de l'Exercice 39)

b. Montrer que la famille $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2})$ forme une famille libre de E.

c. En déduire que $\dim(E_1 \cap E_2) \neq 1$.

3) Montrer de façon analogue que $\dim\,(E_1 \cap E_2) \neq 0$.

4) En déduire la dimension de $E_1 \cap E_2$.