Feuille d'exercices n°3 : Espaces vectoriels

Sev engendré par une partie

Exercice 4. (★)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E.

a. Montrer que si $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ alors $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Démonstration.
Soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{w} = \lambda\,\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{v}$.
On procède par double inclusion.

($\subseteq$) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
Il existe donc $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{x} = \alpha_1\,\overrightarrow{u} + \alpha_2\,\overrightarrow{v} + \alpha_3\,\overrightarrow{w}$.
On en déduit que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= \alpha_1\,\overrightarrow{u} + \alpha_2\,\overrightarrow{v} + \alpha_3\,(\lambda\,\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{v}) \\ &= (\alpha_1 + \lambda\,\alpha_3)\,\overrightarrow{u} + (\alpha_2 + \mu\,\alpha_3)\,\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

Et donc $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

($\supseteq$) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Il existe donc $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{x} = \alpha_1\,\overrightarrow{u} + \alpha_2\,\overrightarrow{v}$.
Ce qu'on peut écrire : $\overrightarrow{x} = \alpha_1\,\overrightarrow{u} + \alpha_2\,\overrightarrow{v} + 0\,\overrightarrow{w}$.
Ainsi $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

(la démonstration a été faite de manière plus générale dans le cours) □

b. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w})$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subseteq$) Démontrons tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont dans l'ev $F = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w})$.

- $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}) - \dfrac{1}{2}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \in F$
- $\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{w} \in F$
- $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v} \in F$

Soit $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
Alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{x} = \alpha_1\,\overrightarrow{u} + \alpha_2\,\overrightarrow{v} + \alpha_3\,\overrightarrow{w}$.
D'après ce qui précède, $\overrightarrow{x}$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de F. Ainsi $\overrightarrow{x} \in F$.

($\supseteq$) On procède de même.
Les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$, et $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$ sont tous des éléments de $E = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ car s'écrivent comme combinaison linéaire de vecteurs de E.
Tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs et donc comme combinaison linéaire d'éléments de E.
Ainsi, tout vecteur de F est dans E. □

c. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est-elle libre ?

Démonstration.
La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée. En effet : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
(je reconnnais que les démos du CH ev sont difficiles)
Il existe donc une relation de dépendance linéaire non triviale entre $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ que l'on peut écrire : $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} + 0\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. □