CH IV : Espaces probabilisés sur un univers fini ou infini

I. Espaces probabilisables - cas général

I.1. Notion de tribu

Définition

On appelle **espace probabilisable** la donnée d'un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où :

- Ω est un ensemble appelé **univers** (ou univers des possibles).
  C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- $\mathscr{A}$ est une **tribu** (on parle aussi de **σ-algèbre**) sur Ω.

  Une tribu $\mathscr{A}$ est un ensemble vérifiant :

  (0) $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
  ($\mathscr{A}$ est constitué de parties de Ω)

  (i) $\Omega \in \mathscr{A}$

  (ii) $\forall A \in \mathscr{A},\ \bar{A} \in \mathscr{A}$
  (stabilité par passage au complémentaire)

  (iii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.
  (stabilité par union dénombrable)

  On peut remplacer ***(iii)*** par :

  (iii') Pour tout $I \subset \mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements de $\mathscr{A}$ on a :

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{A}$$

  (stabilité par union au plus dénombrable)

Exemple de tribus

- Si $\Omega \neq \varnothing$, $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, parfois appelée tribu grossière.
  Cette tribu contient seulement deux événements : l'événement impossible et l'événement certain.
- Si $\Omega \neq \varnothing$, $A \subset \Omega$, $A \neq \varnothing$ et $A \neq \Omega$, alors $\{\varnothing, \Omega, A, \bar{A}\}$ est une tribu sur Ω. C'est la plus petite tribu qui contient A.

Vocabulaire

- Les éléments de $\mathscr{A}$ sont alors appelés des **événements**.
- L'événement $\varnothing$ (*c'est un élément de $\mathscr{A}$*) est l'**événement impossible**.
- L'événement Ω est l'**événement certain**.
- L'événement $\bar{A}$ est appelé **événement contraire** de A.

Exemple

1) Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce.
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
- $\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$ (choisi comme tribu).

2) Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé 6.
- Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  Univers : l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
  Tribu : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *(c'est ici l'ensemble de tous les événements).*
- Exemple d'événement A : « le résultat est pair ».
  Un événement apparaît donc sous la forme d'une proposition définie sur l'expérience. En réalité, rigoureusement, un événement c'est l'ensemble des tirages qui réalisent cette proposition.
  Ici : $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
  Un événement est un élément de la tribu.
- Notons ω le résultat de l'expérience.
  On dira que l'événement A est réalisé si le résultat de l'expérience vérifie l'événement. Autrement dit, si : $\omega \in A$.
  Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

3) Expérience : on lance indéfiniment un dé 6.

- Univers : $\Omega = [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}^*}$, ensemble des suites à valeur dans $[\![1,6]\!]$.
  (les éléments de Ω seront appelés des ∞-lancers)
- Considérons l'événement F_i : « on obtient 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
  L'ensemble $F_i \subset [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}^*}$ est un ensemble de suites : il est constitué de toutes les suites dont le $i^{\text{ème}}$ élément est 6.
  Un ∞-lancer ω qui réalise F_i est un ∞-lancer dont le $i^{\text{ème}}$ lancer est un 6. Autrement dit ω est de la forme :
  $$\omega \quad = \quad (\underbrace{\star\ , \quad \star\ , \quad \dots, \quad \star\ ,}_{i \text{ premiers lancers}} \quad 6, \quad \star\ , \quad \dots \quad)$$
  où chaque $\star$ désigne un entier de $[\![1,6]\!]$.
- Notons G l'événement :
  G : « on obtient (au moins une fois) 6 lors des 10 premiers lancers ».
  Il s'écrit $G = \bigcup\limits_{i=1}^{10} F_i$.
  Cet événement est réalisé si 6 *est obtenu soit lors du* 1^{er} *lancer, soit lors du* $2^{ème}$*, ..., soit lors du* $10^{ème}$ *lancer.*
  Un ∞-lancer ω réalisant G est un ∞-lancer dont l'un (au moins) des 10 premiers lancers est un 6.
- Considérons H : « on obtient 6 (au moins une fois) lors de la partie ».
  Cet événement s'écrit $H = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} F_i$.
  Cet événement est réalisé si 6 *est obtenu lors du* 1^{er} *lancer, ou lors du* $2^{ème}$*, ou lors du* $3^{ème}$ *lancer ...*
  Un ∞-lancer ω réalisant H est un ∞-lancer dont l'un (au moins) des lancers est un 6.
- De même, on peut considérer l'événement : $S = \bigcap\limits_{i=1}^{4} F_i$
  Cet événement est constitué de l'ensemble des suites dont les 4 premiers éléments sont 6.
  Un ∞-lancer ω qui réalise S est un ∞-lancer dont les quatre premiers lancers sont des 6. Autrement dit ω est de la forme :
  $$\omega \quad = \quad (\underbrace{6\ , \quad 6\ , \quad 6\ , \quad 6\ ,}_{4 \text{ premiers lancers}} \quad \star\ , \quad \star\ , \quad \dots \quad)$$
- On considère enfin l'événement : $T = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}^*} F_i$.
  Cet événement est constitué de l'ensemble des suites dont les tous éléments sont 6 *: il est donc réduit à la suite constante de valeur* 6.
  Le seul ∞-lancer ω réalisant T est :
  $$\omega = (6\ , 6\ , 6\ , \dots\ , 6\ , \dots)$$
- Considérons maintenant $U = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j\geqslant i} F_j$ et notons $C_i = \bigcap\limits_{j\geqslant i} F_j$.
  Un ∞-lancer ω réalise $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} C_i$ si ω réalise C_i pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$.
  Autrement dit : $\omega \in \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} C_i \ \Leftrightarrow\ \exists i \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in C_i$.
  Or : $\omega \in C_i \ \Leftrightarrow\ \omega \in \bigcap\limits_{j\geqslant i} F_j \ \Leftrightarrow\ \forall j \geqslant i,\ \omega \in F_j$.
  En résumé : $\boxed{\omega \in U = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j\geqslant i} F_j \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N}^*,\ \forall j \geqslant i,\ \omega \in F_j}$
  L'∞-lancer ω réalise U s'il existe un rang $i \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel ω réalise tous les événements F_j.
  Autrement dit, un rang i à partir duquel ω ne contient que des 6.
  U est donc composé de tous les ∞-lancers qui contiennent une infinité successive de 6.

- Considérons maintenant $V = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j \geqslant i} F_j$ et notons $D_i = \bigcup\limits_{j \geqslant i} F_j$.

  Un ∞-lancer ω réalise $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} D_i$ si ω réalise tous les événements D_i.

  Autrement dit : $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} D_i \ \Leftrightarrow\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in D_i$.

  Or : $\omega \in D_i \ \Leftrightarrow\ \omega \in \bigcup\limits_{j \geqslant i} F_j \ \Leftrightarrow\ \exists j \geqslant i,\ \omega \in F_j$.

  En résumé : $\boxed{\omega \in V = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j \geqslant i} F_j \ \Leftrightarrow\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \exists j \geqslant i,\ \omega \in F_j}$

  L'∞-lancer ω réalise V si pour n'importe quel rang $i \in \mathbb{N}^*$, il est possible de trouver un rang supérieur j tel que ω réalise F_j. Ainsi, pour n'importe quel lancer de l'∞-lancer ω on peut trouver un lancer ultérieur qui est un 6.
  U est donc composé de tous les ∞-lancers qui contiennent une infinité (pas forcément successive !) de 6.

Définition

Soit Ω un ensemble et soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$).

Notons $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{A}$ ($\forall i \in I,\ A_i \in \mathscr{A}$).

a) Alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$ (c'est un événement) est défini par :

$$\boxed{\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I,\ \omega \in A_i\}}$$

L'événement $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est réalisé si l'un des événements A_i est réalisé.

Ce qui s'écrit : $\omega \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I,\ \omega \in A_i$.

b) Alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$ (c'est un événement) est défini par :

$$\boxed{\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I,\ \omega \in A_i\}}$$

L'événement $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est réalisé si tous les événements A_i est réalisé.

Autrement dit : $\omega \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I,\ \omega \in A_i$.

On déduit de ces définitions les notations utilisées dans l'exemple.

- Lorsque $I = \mathbb{N}$, ces événements sont notés : $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$ et $\bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.

- $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j \geqslant i} A_j \in \mathscr{A}$ (c'est un événement) est défini par :

  $$\boxed{\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j \geqslant i} A_j = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j=i}^{+\infty} A_j = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N}^*,\ \forall j \geqslant i,\ \omega \in A_j\}}$$

  L'événement $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j \geqslant i} A_j$ est réalisé par ω s'il existe un rang $i \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel ω réalise tous les événements A_j.
  Ainsi, ω réalise une infinité successive d'événements A_j.

  Autrement dit : $\omega \in \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{j \geqslant i} A_j \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N}^*,\ \forall j \geqslant i,\ \omega \in A_j$.

- $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j \geqslant i} A_j \in \mathscr{A}$ (c'est un événement) est défini par :

  $$\boxed{\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j \geqslant i} A_j = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j=i}^{+\infty} A_j = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \exists j \geqslant i,\ \omega \in A_j\}}$$

  L'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j \geqslant i} A_j$ est réalisé par ω si pour tout rang $i \in \mathbb{N}^*$, il est possible de trouver un rang supérieur j tel que ω réalise A_j.

  Ainsi, ω réalise une une infinité (pas forcément successive !) de A_j.

  Autrement dit : $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j \geqslant i} A_j \ \Leftrightarrow\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \exists j \geqslant i,\ \omega \in A_j$.

I.2. Propriétés des tribus

Propriété

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

1) $\varnothing \in \mathscr{A}$.

2) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a :

$$\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.}$$

3) Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$, on a :

$$\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i \ \text{ et } \ \bigcap_{i \in I} A_i \ \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.}$$

Démonstration.

1) $\Omega \in \mathscr{A}$ et $\varnothing = \overline{\Omega}$ donc $\varnothing \in \mathscr{A}$.

2) Si $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on considère la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

- × $C_0 = A$,
- × $C_1 = B$,
- × et $C_k = \varnothing$ pour tout $k \geqslant 2$.

On a alors : $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} C_i = A \cup B \ \in \ \mathscr{A}$.

On en déduit que $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \ \in \ \mathscr{A}$ car $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont dans $\mathscr{A}$.

3) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$ on considère la suite $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

- × $C_i = A_i$ si $i \in I$,
- × et $C_i = \varnothing$ pour tout $i \notin I$.

On a alors : $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} C_i = \bigcup\limits_{i \in I} A_i \ \in \ \mathscr{A}$.

On en déduit que $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} \bar{A}_i} \ \in \ \mathscr{A}$ car tous les $\bar{A}_i$ sont dans $\mathscr{A}$.

□

Résumé des propriétés de stabilité.
Une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω :

- × contient l'événement impossible $\varnothing$ et l'événément certain Ω,
- × est stable par union finie et stable par union dénombrable,
- × est stable par intersection finie et stable par intersection dénombrable,
- × est stable par passage au complémentaire.

Ainsi, si $\mathscr{A}$ est une tribu, on pourra toujours considérer l'événément obtenu par une union au plus dénombrable d'événements de $\mathscr{A}$, par une intersection au plus dénombrable d'événements de $\mathscr{A}$, ou encore comme complémentaire d'un événement de $\mathscr{A}$. Tous ces événements sont dans $\mathscr{A}$.

Intérêt de la notion de tribu

Une tribu est un modèle d'ensemble regroupant les événements. Ce modèle définit les propriétés raisonnables que doivent vérifier les événements (propriétés de stabilité définie au-dessus).

- Dans le cas où Ω est fini, on choisit toujours $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu (c'en est une) qui fait de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable.
- Dans le cas où Ω est infini, $\mathcal{P}(\Omega)$ est encore une tribu (elle contient **tous** les événements que l'on peut définir sur Ω) donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est bien un espace probabilisable. Deux cas se présentent alors :
  - × si Ω est infini dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{N}$), on choisit toujours $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
  - × si Ω est infini dénombrable (typiquement $\Omega = \mathbb{R}$), la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas pertinente. Elle est trop grosse pour qu'on puisse en mesurer les éléments de manière non triviale. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$, on fait alors le choix d'une tribu plus petite (celle engendrée par les intervalles de la forme $]a, b[$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$). Cette tribu est suffisamment grosse pour définir des événements d'intérêt et suffisamment petite pour que l'on puisse définir dessus une probabilité intéressante $\mathbb{P}$ qui permettra de mesurer les événements définis. Mais on s'égare ...

I.3. Système complet d'événements

Définition *(Événements incompatibles)*

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ un couple d'événements.

Les événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

Il ne faut pas confondre la notion d'incompatibilité de deux événements avec la notion d'indépendance de deux événements.

- La notion d'incompatibilité est intrinsèque aux événements.
- La notion d'indépendance dépend fortement de la probabilité $\mathbb{P}$ choisie. En toute rigueur, on parle d'indépendance de deux événements pour la probabilité $\mathbb{P}$ (*cf* plus loin).

Définition *(Système complet d'événements)*

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si :

1) Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $\ A_i \cap A_j = \varnothing$.
(les événements sont deux à deux incompatibles)

2) $\Omega = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Exemple

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et soit A un événement.
La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

Remarque

- Si on sait de plus que : $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, on obtient une partition de Ω.
  On peut faire l'analogie avec un puzzle. Les événements A_i sont les pièces.
  1) Deux pièces ne se chevauchent jamais.
  2) Toutes les pièces mises côte à côte permettent de reconstituer le dessin qui n'est autre que Ω.
- On peut aussi relier la notion de système complet d'événements à celle de raisonnement par disjonction de cas (*resp.* faire le parallèle avec les structures conditionnelles).
  1) Le caractère disjoint des cas étudiés : deux cas ne peuvent être vrais en même temps.
  (*resp.* à l'aide de l'instruction `elif`, le $2^{\text{ème}}$ branchement n'est considéré que si la condition de la $1^{\text{ère}}$ branche n'est pas vérifiée et ainsi de suite)
  2) Le caractère exhaustif de la recherche : si on regroupe tous les cas étudiés, on obtient tous les cas possibles.
  (*resp.* on utilise l'instruction `else` (sans condition) dans la dernière branche ce qui assure qu'au moins un des blocs est exécuté)

Exercice

On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000.
Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

× si une personne est malade, le test est positif à 99%,

× si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

Quelle est la probabilité qu'une personne testée ait un test positif ?

II. Espace probabilisé

II.1. Probabilité

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- Une probabilité est un application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que :
  1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
  2) $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$
  (la probabilité de l'événement certain est 1)
  3) Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles ($\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$), on a :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$
  (cette propriété est appelée σ-additivité)
- Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Remarque

- La propriété de σ-additivité peut se noter de manière générale comme suit. Soit $I \subseteq N$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles. Alors :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)}$$
- En particulier, lorsque I fini ($I = [\![1,m]\!]$), on récupère la propriété d'additivité. Si $(A_1, \dots, A_m)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors :
  $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)}$$
- Dans la définition, il est sous-entendu que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est une série convergente. Si on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ alors il est simple de démontrer que (S_n) est une suite croissante et majorée par 1 :
  × $S_{n+1} - S_n = \mathbb{P}(A_{n+1}) \geqslant 0$
  × $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant 1$

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Un événement A est dit **négligeable** ou **quasi-impossible** si : $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Un événement A est dit **quasi certain** si : $\mathbb{P}(A) = 1$.
- Si $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ vérifie la propriété $\mathcal{P}\}$ et $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée **presque sûrement**.

Remarque

Avec cette définition, les propriétés suivantes sont vérifiées.

- L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable (quasi-impossible).
- L'événément certain Ω est quasi-certain.
- Attention ! A quasi certain ($\mathbb{P}(A) = 1$) n'implique pas $A = \Omega$.
- Attention ! A quasi-impossible ($\mathbb{P}(A) = 0$) n'implique pas $A = \varnothing$.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant en 1 lancer d'un dé à 6 faces. L'univers associé est $\Omega = [\![1,6]\!]$. On munit l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{2}$.

- Obtenir un résultat inférieur à 4 est un événement A quasi-impossible.
  $A = \{1,2,3,4\} \neq \varnothing$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 est un événement B quasi-certain.
  $B = \{5,6\} \neq \Omega$ et $\mathbb{P}(B) = 1$.

On retiendra au passage que la notion d'événement quasi-certain (resp. quasi-impossible) est dépendante de la probabilté $\mathbb{P}$ choisie.

II.2. Propriétés des probabilités

II.2.a) Propriétés générales

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit A, B, C des événements ($(A, B, C) \in \mathscr{A}^3$).

1) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $A \subset B \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)

4) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

5) $$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}}$$

(formule du crible)

Démonstration.

1) On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ (réunion disjointe). Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

2) On a : $(A \setminus B) \;\cup\; (A \cap B) = A$ (réunion disjointe).
Ainsi, par additivité :

$$\mathbb{P}((A \setminus B) \;\cup\; (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$$

3) Supposons $A \subset B$.
D'après le point précédent : $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)$.
Or, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$$

4) On a : $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ (la deuxième réunion est disjointe).
On en déduit, à l'aide du point *2)* que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B) & = & \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\ & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}$$

5) Généralisation de la formule précédente :

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{\mathbb{P}(A \cup B \cup C)} \\ = & \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & - \left(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \right) \\ = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}$$

$\square$

II.2.b) Propriété de la limite monotone

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{A}$.

1) *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ($\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$) alors :*

a) *la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,*

b) $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

2) *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ($\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$) alors :*

a) *la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge,*

b) $$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Démonstration.
On montre seulement la propriété ***1)***.
La démonstration de la propriété ***2)*** est analogue.

a) Comme $A_n \subset A_{n+1}$, on a $\mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_{n+1})$. Ainsi, la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ est croissante. Elle est de plus majorée par 1 ($\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) \leqslant 1$) donc convergente vers $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

b) Afin de pouvoir utiliser la σ-additivité de l'application $\mathbb{P}$, on construit une suite (B_n) d'événements deux à deux incompatibles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$.

(ce qui implique $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k$)

Pour cela, on pose :

- $B_0 = A_0$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{k-1}) = A_k \setminus A_{k-1}$
  car $A_0 \cup \dots \cup A_{k-1} = A_{k-1}$ puisque (A_n) est une suite croissante.

Ainsi on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$

or : $$\left| \begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B_k) & = & \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_k \cap A_{k-1}) \\ & = & \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}) \\ \multicolumn{3}{l}{\textit{(pour } k \geqslant 1\textit{)}} \end{array}\right.$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) \\ &= \mathbb{P}(B_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \\ &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})) \\ &= \cancel{\mathbb{P}(A_0)} + (\mathbb{P}(A_n) - \cancel{\mathbb{P}(A_0)}) \ = \ \mathbb{P}(A_n) \end{aligned}$$

Et ainsi, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

□

Remarque
Ce résultat est appelé « propriété de la limite monotone » car il traite de la limite d'une suite croissante (et majorée).

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements de* $\mathscr{A}$*.*

(on ne suppose pas ici que la suite (A_n) *est monotone !)*

1) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$

2) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)}$

Démonstration.

1) Posons $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$. La suite (B_n) ainsi construite est une suite croissante d'événements et vérifie : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$. En effet :

× $A_n \subset B_n$ donc $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$

× $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ et donc $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent à la suite (B_n).

2) Démonstration analogue en posant $B_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k$. □

Remarque

- Il faut bien noter que l'on ne suppose pas, dans ce résultat, que la suite (A_n) est croissante. Pour pouvoir utiliser le théorème de la limite monotone on a donc construit la suite auxiliaire $\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$ qui est une suite croissante d'événements.
- L'intérêt de ces théorèmes est de ramener un calcul de probabilité d'une intersection (resp. union) infinie au calcul de probabilité d'une intersection (resp. union) finie.

Exercice

On reprend l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé 6 équilibré. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

a. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors de la partie ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir une infinité successive de 6 lors de la partie ?

d. Quelle est la probabilité d'obtenir une infinité de 6 lors de la partie ?

Démonstration.

Tous les raisonnements sur les exercices de probabilité commencent par :

1) une formalisation avec nommage des événements les plus basiques,

2) une décomposition de l'événement dont on cherche la probabilité en fonction des événements précédents.

Dans le cadre de cet exercice :

1) On note F_i : « on obtient 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

2) Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ». On a alors :

$$A \ = \ \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$$

Notons B : « on obtient au moins un 6 lors de la partie ». On a alors :

$$B \ = \ \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i$$

Notons C : « on obtient une infinité successive de 6 lors de la partie ». On a alors :

$$C \ = \ \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j=i}^{+\infty} F_j$$

Notons D : « on obtient une infinité de 6 lors de la partie ». On a alors :

$$D \ = \ \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} F_j$$

a. D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right)$. Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } \tfrac{1}{6} \in\,]-1,1[\textit{)} \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(A) = 0$. *(l'événement A est négligeable)*

b. D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$$

- Les événements de la suite (F_i) ne sont pas deux à deux incompatibles (si i et j sont différents, on peut obtenir un 6 à la fois au $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lancers). On ne peut donc pas appliquer la propriété d'additivité.
- La suite (F_i) n'est pas croissante ($F_i \not\subset F_{i+1}$: si on a obtenu 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage, on n'est pas obligé de l'obtenir au suivant).

Par contre :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right) && \textit{(loi de de Morgan)} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{F_i}) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 && \textit{(car } \tfrac{5}{6} \in\,]-1,1[\textit{)} \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(B) = 1$ *(l'événement B est quasi-certain).*

c. • On note $C_i = \bigcap\limits_{j=i}^{+\infty} F_j$. D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(C) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j=i}^{+\infty} F_j\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)$$

C_i est l'événement : « on n'obtient que des 6 à partir du $i^{\text{ème}}$ lancer ».
La suite (C_i) est une suite croissante d'événements.
En effet, si $i \in \mathbb{N}^*$, $C_i \subset C_{i+1}$: si on n'obtient que des 6 à partir du $i^{\text{ème}}$ lancer, c'est aussi le cas à partir du $i+1^{\text{ème}}$ lancer.
Ainsi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i = C_n$ et :

$$\mathbb{P}(C) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

• D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(C_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} F_j\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{m} F_j\right)$$

Enfin, les lancers étant indépendants :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{m} F_j\right) \;=\; \prod_{j=n}^{m} \mathbb{P}(F_j) \;=\; \left(\frac{1}{6}\right)^{m-n+1} \;=\; \frac{(\frac{1}{6})^m}{(\frac{1}{6})^{n-1}} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

• On en conclut : $\mathbb{P}(C) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} 0 \;=\; 0$

d. • On note $D_i = \bigcup\limits_{j=i}^{+\infty} F_j$. D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(D) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} F_j\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} D_i\right) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} D_i\right)$$

La suite (D_i) est une suite décroissante d'événements.
Ainsi $\bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i = D_n$ et : $\mathbb{P}(D) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

- D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(D_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n}^{+\infty} F_j\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n}^{m} F_j\right)$$

On procède comme en ***b.***

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n}^{m} F_j\right) &= 1-\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{j=n}^{m} F_j}\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{m} \overline{F_j}\right) && \textit{(loi de de Morgan)} \\
&= 1-\prod_{j=n}^{m} \mathbb{P}(\overline{F_j}) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{m-n+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1 && \textit{(car } \tfrac{5}{6} \in\,]-1,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin : $\mathbb{P}(D) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) \;=\; \lim\limits_{n\to+\infty} 1 \;=\; 1.$

e. Question subsidiaire : obtient-on les mêmes résultats si on considère un dé truqué ? □

À RETENIR

L'étape de décomposition des événements est primordiale.

Toute démonstration qui ne contient pas cette étape est fausse.

On retiendra qu'on raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

II.3. Le cas de l'équiprobabilité (rappel sur le cas Ω fini)

Lorsque l'on travaille sur un univers fini, il est fréquent de considérer l'application probabilité pour laquelle toutes les issues ont la même probabilité de se produire. Rappelons la définition de cette application.

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
Ainsi $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

- *Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires i.e. telle que :*

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) \;=\; \dots \;=\; \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

- *Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P} \;:\; \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\textit{nombre d'issues réalisant } A}{\textit{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}}$$

Démonstration.
Il suffit de vérifier les axiomes des probabilités.
L'additivité provient de l'additivité de l'application Card. □

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement

Exemple
On considère un jeu de 32 cartes.
L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes.
L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Autrement dit, Ω contient toutes les mains possibles.
Ainsi, $\text{Card}\,\Omega = \binom{32}{5}$.

Les tirages étant considérés comme équiprobables, l'univers Ω est muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage contenant un carré ?

Démonstration.
On note A l'événement : « le tirage obtenu contient un carré ».

- Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant A est entièrement déterminé par :
  × le choix de la hauteur du carré : $\binom{8}{1} = 8$.
  × le choix de la carte restante : $\binom{28}{1} = 28$.
  (la carte restante n'est pas une des 4 cartes du carré)
- On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{8 \times 28}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{8 \times \cancel{28}}{\frac{32\times31\times30\times29\times\cancel{28}}{5!}} \\
&= \frac{8 \times 5!}{32 \times 31 \times 30 \times 29} = \frac{\cancel{8} \times 5 \times \cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{32} \times 31 \times 30 \times 29} \\
&= \frac{\cancel{5 \times 3 \times 2}}{31 \times \cancel{30} \times 29} = \frac{1}{31 \times 29}
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de A est de $\dfrac{1}{899} = 0,0011$. □

2) Et celle d'obtenir un tirage contenant exactement un pique ?

Démonstration.
On note B : « le tirage obtenu contient exactement un pique ».

- Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant B est entièrement déterminé par :
  × le choix de la hauteur du pique : $\binom{8}{1} = 8$.
  × le choix des 4 cartes restantes : $\binom{24}{4}$.
  (les 4 cartes restantes ne sont pas des piques)
- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{8 \times \frac{24!}{4!\ 20!}}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{8 \times \frac{24\times23\times22\times21}{4!}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5!}} \\
&= \frac{\cancel{8} \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times \cancel{5!}}{\cancel{32} \times 31 \times \cancel{30} \times 29 \times 28 \times 4!} = \frac{\cancel{24} \times 23 \times 22 \times 21}{31 \times 29 \times 28 \times \cancel{4!}} \\
&= \frac{23 \times 22 \times 21}{31 \times 29 \times 28} = \frac{23 \times 22 \times 3}{31 \times 29 \times 4} = \frac{23 \times 11 \times 3}{31 \times 29 \times 2}
\end{aligned}$$

La probabilité de B est donc de $\dfrac{23 \times 11 \times 3}{31 \times 29 \times 2} \simeq 0,42$. □

Exemple
On effectue 6 lancers d'un dé cubique équilibré.
L'univers est ici $\Omega = [\![1,6]\!]^6$.
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = 6^6$.
Il est muni de la probabilité uniforme (dé non truqué).

On considère les événements :
A : « On n'obtient aucun 6 lors des lancers »
B : « On obtient les 6 chiffres (dans un ordre quelconque) lors des lancers »

Calculer la probabilité de ces deux événements.

Démonstration.
On a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5^6}{6^6} = \frac{15625}{46656} \simeq 0,33$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{A_6^6}{6^6} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{3 \times 3 \times 6^2} = \frac{5}{324} \simeq 0,015$$

□

Exemple
Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires.
On considère l'expérience consistant à tirer une boule dans cette urne.
On fait l'hypothèse de l'équiprobabilité des résultats.

a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

b) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

Démonstration.

a) Notons A : « tirer une boule rouge ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{10}$$

b) Notons B : « tirer une boule rouge ». Alors :

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$$

□

III. Probabilité conditionnelle

III.1. Définition

Théorème 4.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
On considère l'application $\mathbb{P}_A$ suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A & : & \mathscr{A} & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}} \end{array}$$

- *$\mathbb{P}_A$ est une probabilité, appelée* **probabilité conditionnelle** *relative à A.*
- *Pour tout événement B, $\mathbb{P}_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.*

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que $\mathbb{P}_A$ vérifie les axiomes d'une probabilité.

1) Soit $B \in \mathscr{A}$.

- Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(A) > 0$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), on a : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \geqslant 0$.
- Comme $A \cap B \subset A$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc : $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant 1$.

2) $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.

3) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Alors :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)}$$

Notons alors $C_n = A \cap B_n$.
Les événements de la suite (C_n) sont deux à deux incompatibles.
En effet, si $i \neq j$:

$$C_i \cap C_j = (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = A \cap \varnothing = \varnothing$$

Par σ-additivité de $\mathbb{P}$, on a alors : $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)$.

Et ainsi :

$$\mathbb{P}_A(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A \cap B_n)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n)$$

□

Exemple

On considère le résultat d'un dé 6 équilibré.
L'univers est donc $[\![1, 6]\!]$ et est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
On considère les événements suivants.
A : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 3 »
B : « on obtient 5 » et C : « on obtient 2 »
Calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_A(C)$.

Démonstration.
$\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé. Sachant que le résultat du tirage est inférieur à 3, il n'y a aucune chance pour que le résultat soit égal à 5.
On retrouve ce résultat par calcul :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = 0$$

Concernant $\mathbb{P}_A(C)$, deux manières de voir les choses.

1) On peut tout d'abord réaliser le calcul :

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

2) On peut aussi voir ce résultat comme suit. Si A est réalisé, c'est que le résultat du lancer est un élément de $\{1, 2, 3\}$. Les résultats étant équiprobables, la probabilité de tirer 2 avec cet univers des possibles est $\frac{1}{3}$. □

L'application $\mathbb{P}_A$ étant une probabilité, elle vérifie l'ensemble des propriétés que nous avons listé au paragraphe II.2.a).

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Pour tout événement B et tout événement C, on a :

1) $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ donc $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$

2) $\mathbb{P}_A(B \setminus C) = \mathbb{P}_A(B \setminus (B \cap C)) = \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$

3) $B \subset C \;\Rightarrow\; \mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$

4) $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$

5) Si (B_n) suite d'événements , on a :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$$

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$$

Démonstration.
L'application $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
Elle vérifie donc l'ensemble des propriétés des probabilités. □

III.2. Formules liées à la probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle étant posée, on s'intéresse maintenant à comment l'utiliser pour nous aider à réaliser des calculs de probabilité.

III.2.a) Formule des probabilités composées

Ce premier résultat stipule que la donnée de $\mathbb{P}_A(B)$ nous enseigne la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Théorème 5.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements.

1) *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut écrire :* $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

2) *Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire :* $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A)}$

3) *On a alors, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$:* $\boxed{\mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

Démonstration.
C'est la définition de probabilité conditionnelle ! □

Théorème 6. *(Formule des probabilités composées)*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathscr{A}$.

On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$.

On a alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ \dots\ \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)}$$

Démonstration.

- On note tout d'abord que, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$B_{m-1} = A_1 \cap \dots \cap A_{m-1} \ \subset \ A_1 \cap \dots \cap A_k = B_k$$

  On a donc $\mathbb{P}(B_k) \geqslant \mathbb{P}(B_{m-1}) > 0$ (car $\mathbb{P}(B_{m-1}) \neq 0$) et ainsi $\mathbb{P}(B_k) \neq 0$. On peut donc considérer $\mathbb{P}_{B_k}$ pout tout $k \in [\![1, m-1]\!]$.

- Démontrons par récurrence que : $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(m)$
  où $\mathcal{P}(m)$: « toute famille $(A_1, \dots, A_m)$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$ vérifie : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$ »

  ▸ **Initialisation** :
  La propriété est vraie au rang 2, car si $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$, on a par définition : $\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}$ et donc $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \ = \ \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}_{A_1}(A_2)$.

  $\mathcal{P}(2)$ est donc vérifiée.

  ▸ **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
  Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$.
  On considère donc une famille $(A_1, \dots, A_{m+1})$ de $m+1$ événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$. Avec les notations précédentes :

$$A_1 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1} = B_m \cap A_{m+1}$$

  On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1}) = \mathbb{P}(B_m \cap A_{m+1}) = \mathbb{P}(B_m) \times \mathbb{P}_{B_m}(A_{m+1})$$

  (par application de la propriété au rang 2 sachant que $\mathbb{P}(B_m) \neq 0$)
  Or, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$$

  Ce qui démontre $\mathcal{P}(m+1)$ en réinjectant dans l'identité précédente.

  Par principe de récurrence, on a donc : $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(m)$. □

Exemple
Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires.
L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

1) Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

Démonstration.

- On note B_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».
- On note N_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».

Sous réserve que l'on puisse écrire chacun des éléments, la formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$$

On a : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{5}{13}$ $(\neq 0)$.

Le terme $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$ représente la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{4}{12}$.
On a alors :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{5 \times 4}{13 \times 12} \neq 0$$

et on peut calculer $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$, la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 3 blanches et 8 noires. D'où $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{3}{11}$.
On a donc :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}}{13 \times \cancel{12} \times 11} = \frac{5}{11 \times 13} \simeq 0,035$$

$\square$

2) Quelle est la probabilité qu'une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage ?

Démonstration.
Avec les mêmes notations, et sous réserve que l'on puisse écrire chacun des termes, on a :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(N_2)$$

Le terme $\mathbb{P}_{B_1}(N_2)$ représente la probabilité de tirer une boule noire dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \dfrac{8}{12}$.
On a donc :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{5 \times 8}{13 \times 12} = \frac{5 \times 2}{13 \times 3} = \frac{10}{39} \simeq 0,256$$

$\square$

III.2.b) Formule des probabilités totales

Théorème 7. *Formule des probabilités totales*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de $\mathscr{A}$.

Pour tout événement B, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \; = \; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}$$

(on teste B par rapport à chaque A_i)

Si on suppose de plus : $\forall i \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \; = \; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

Démonstration.

- Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements : $\Omega = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$.
  Ainsi, on a : $B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)$.
  (la distributivité, les lois de de Morgan se généralisent au cas dénombrable)
- Et comme $(B \cap A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles :
  $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$
- Enfin, si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, on a : $\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i) \, \mathbb{P}_{A_i}(B)$.
  Et ainsi :
  $$\mathbb{P}(B) \; = \; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

□

Cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A est un événement $(A \in \mathscr{A})$.
La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements.
Pour tout $B \in \mathscr{A}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \; = \; \mathbb{P}(A \cap B) \; + \; \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}$$

Si de plus $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \; = \; \mathbb{P}(A) \ \mathbb{P}_A(B) \; + \; \mathbb{P}(\bar{A}) \ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}$$

Exemple

On considère de nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage ?

La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements $(\overline{B_1} = N_1)$.
Ainsi, par la formule des probabiltiés totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) \\
&= \mathbb{P}(B_1) \ \mathbb{P}_{B_1}(N_2) + \mathbb{P}(N_1) \ \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \\
&= \frac{5}{13} \ \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \ \frac{7}{12} \\
&= \frac{5 \times 2 + 2 \times 7}{3 \times 13} = \frac{24}{3 \times 13} = \frac{8}{13}
\end{aligned}$$

2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

Il suffit de remarquer : $B_2 = \overline{N_2}$. On a donc directement :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\overline{N_2}) = 1 - \mathbb{P}(B_2) = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$$

(évidemment, on pouvait de nouveau appliquer la FPT mais ce n'est pas la solution adaptée)

Exercice
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.

a) Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

b) Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.

c) Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Remarque

- La difficulté de cet exercice réside dans le fait que la modélisation mathématique est absente. On insiste ici sur le raisonnement à mener qui est assez naturel et très fréquent dans les exercices.
- La probabilité de tirer 2 boules blanches dépend de l'urne dans laquelle s'effectue le tirage :
  - × soit on tire dans l'urne 1 et dans ce cas ...
  - × soit on tire dans l'urne 2 et dans ce cas ...
  - × ...
  - × soit on tire dans l'urne n et dans ce cas ...
- On voit clairement apparaître un raisonnement par disjonction de cas, ce qui signifie qu'il y a un système complet d'événements sous-jacent.
- L'idée ici est de tester l'événement « obtenir 2 boules » suivant chacun des cas listés précédemment.
  Cela correspond à utiliser la formule des probabilités totales.

Il n'y a plus qu'à formaliser ces idées.

Démonstration.
On note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k » (pour $k \in [\![1,n]\!]$).
On note B : « on tire deux boules blanches ».

a) La famille $(A_1,\dots,A_n)$ est un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(A_k)=\tfrac{1}{n}\neq 0\textit{)}\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{k!}{\cancel{2!}(k-2)!} \times \frac{\cancel{2!}(n-2)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

En effet, si A_k est réalisé, le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Un 2-tirage contenant 2 boules blanches est entièrement déterminé par :
× *le choix des 2 boules blanches parmi les k présentes : $\binom{k}{2}$ possibilités.*
Il y a donc $\binom{k}{2}$ tels 2-tirages.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)} = \frac{1}{n^2\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1) \\ &= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\ &= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} \left((2n+1)-3\right) = \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)}\, 2(n-1) \\ &= \frac{\cancel{n}(n+1)}{6\,n^{\cancel{2}}\,\cancel{(n-1)}}\, 2\cancel{(n-1)} = \frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

b) Par le même raisonnement, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(A_k) = \tfrac{1}{n} \neq 0\textit{)}\end{aligned}$$

Dans le cas d'un tirage successif avec remise, on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) = \frac{k \times k}{n \times n}$$

En effet, si A_k est réalisé, le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Un 2-tirage contenant 2 boules blanches est entièrement déterminé par :

- *le choix de la première boule blanche tirée parmi les k présentes : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.*
- *le choix de la deuxième boule blanche tirée parmi les k présentes : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.*

Il y a donc $k \times k$ tels 2-tirages.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{\cancel{k} \times k}{n \times n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} \frac{n+\frac{1}{2}}{n}\end{aligned}$$

c) $\dfrac{1}{3} \dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3} \dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3} \dfrac{n+1}{n} \dfrac{n+\frac{1}{2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3} \dfrac{n}{n} \dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{3}$

Dans les deux cas, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{3}$. □

III.2.c) Formule de Bayes

Théorème 8. *Formule de Bayes*
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de $\mathscr{A}$.
Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}}$$

(on peut notamment appliquer cette formule pour $A = A_j$ où $j \in [\![1, n]\!]$)

Si on suppose de plus : $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}}$$

Démonstration.
La première égalité n'est autre que la formule 3) de la proposition 5.
La seconde égalité est une conséquence directe de la FPT. □

Cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A est un événement $(A \in \mathscr{A})$.
La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements.
Pour tout $B \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Si de plus $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)\ +\ \mathbb{P}(\bar{A})\ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}}$$

Exemple
On considère de nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires. Le second tirage ayant donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

Démonstration.
La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements ($\overline{B_1} = N_1$).
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \ + \ \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) \\
&= \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \ + \ \mathbb{P}(N_1)\ \mathbb{P}_{N_1}(B_2) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(N_1) \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{5}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{13} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{13 \times 3}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{B_2}(B_1) &= \frac{\mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\frac{5}{13} \times \frac{4}{12}}{\frac{15}{13 \times 3}} \\
&= \frac{5 \times 4}{\cancel{13} \times 12} \times \frac{\cancel{13} \times 3}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

Formule des causes
La formule $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$ est connue sous le nom de « formule des causes ». Si l'on considère l'événement B comme étant postérieur à l'événement A, cette formule peut paraître étonnante puisqu'elle ne suit pas l'ordre chronologique. On calcule en effet la probabilité de l'événement A (antérieur à B) sachant que B est réalisé.

Exercice
Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche.
Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Exercice
On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000.
Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%,
- si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test s'est révélé négatif soit en réalité malade ?

IV. Indépendance en probabilité

IV.1. Indépendance de deux événements

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Deux événements A et B sont dits indépendants **pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

Remarque

- Il ne faut pas confondre cette propriété, **liée à une probabilité** $\mathbb{P}$ avec celle d'incompatibilité qui ne dépend que des événements !
- Mieux : deux événements A et B incompatibles ne sont généralement pas indépendants (sauf si …).

Théorème 9.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements.

1) Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors on a :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)}$$

2) Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors on a :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)}$$

La notion d'indépendance n'est pas une notion intrinsèque aux événements : elle dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité et dépendants pour une autre.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé 6 :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- On note A : « le résultat obtenu est inférieur à deux ».
- On note B : « le résultat obtenu est supérieur à quatre ».

On cherche à déterminer si A et B sont indépendants suivant deux probabilités différentes.

Cas 1 : dé équilibré

L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est donc muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}^1$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}^1(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

On a $\mathbb{P}^1(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues totales}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \neq 0.$

- On peut donc calculer ${\mathbb{P}^1}_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2. On a donc ${\mathbb{P}^1}_A(B) = 0$.
- Or $\mathbb{P}^1(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \neq {\mathbb{P}^1}_A(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont « dépendants » pour la probabilité $\mathbb{P}^1$.

Cas 2 : dé pipé

Le dé considéré permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.
Autrement dit, l'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}^2$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \ldots = \mathbb{P}^2(\{6\}) = 0$$

- On a $\mathbb{P}^2(A) = 1$, on peut donc calculer ${\mathbb{P}^2}_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2.
  On a donc encore ${\mathbb{P}^2}_A(B) = 0$.
- Or, étant donné le dé considéré, la probabilité d'obtenir un résultat supérieur 4 est $\mathbb{P}^2(B) = 0 = {\mathbb{P}^2}_A(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^2$.

Remarque

- Dans l'exemple précédent A et B sont incompatibles mais non indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^1$. C'est une illustration de la propriété suivante.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ incompatibles} \quad \not\Rightarrow \quad A \text{ et } B \text{ indépendants (pour } \mathbb{P})}$$

- La réciproque n'est pas vérifiée non plus. Plus précisément :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ incompatibles} \quad \not\Leftarrow \quad A \text{ et } B \text{ indépendants (pour } \mathbb{P})}$$

Illustrons cette propriété dans l'exemple suivant.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6.

On note A : « le premier chiffre est pair ».

On note B : « le second chiffre est impair ».

L'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
Le dé est supposé équilibré : on munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.
Démontrons que A, B sont indépendants.

- $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

  De même : $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times \cancel{6}}{6 \times \cancel{6}} = \dfrac{1}{2}$.

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

En effet : $A \cap B = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5)\}$.

On en déduit au passage que A et B ne sont pas incompatibles.

Proposition 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements indépendants.

1) *Les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.*

2) *Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.*

3) *Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration.

1) Démontrons que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B})\end{aligned}$$

2) Supposons A et B indépendants.
On a évidemment B et A indépendants.
Ainsi, par la propriété ***1)***, on obtient que B et $\overline{A}$ sont indépendants.

3) Supposons A et B indépendants.
Par la propriété ***1)***, on a : A et $\overline{B}$ indépendants.
Par la propriété ***2)***, on a : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants. □

Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

a. Supposons $\mathbb{P}(A) = 0$.
Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

b. Supposons $\mathbb{P}(A) = 1$.
Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

Démonstration.

a. En effet, on a $A \cap B \subset A$.
On en déduit donc que : $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$.
Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Ce qui démontre que A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

b. • Tout d'abord, notons que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$ donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

• Comme $A \cup \overline{A} = \Omega$, on a : $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = \Omega \cap B = B$.
D'où, par additivité ($(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B) & = & \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\ & = & \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) \quad \textit{(car } \overline{A} \textit{ et } B \textit{ sont indépendants)} \end{array}$$

D'où : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$. Enfin, comme $\mathbb{P}(A) = 1$, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

□

IV.2. Indépendance deux à deux

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **deux à deux indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si pour tout $(i, j) \in I^2$, tel que $i \neq j$:

$$\boxed{\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}(A_j)}$$

IV.3. Indépendance mutuelle d'une famille d'événements

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$.

- On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont **mutuellement indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\forall J \subset N, \quad \left.\begin{array}{c} J \textbf{ fini} \\ J \subset I \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)}$$

Pour bien comprendre la différence entre ces deux notions, intéressons-nous à ce qu'elles signifient pour une petite valeur de m.

Cas particulier : $m = 3$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1) Les événements A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants si :

a) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_3)$

c) $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\, \mathbb{P}(A_3)$

2) Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

a) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2)$

b) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_3)$

c) $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\, \mathbb{P}(A_3)$

d) $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2)\, \mathbb{P}(A_3)$

Remarque

Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fausse.
(*on aurait sinon deux noms différents pour la même notion !*)

$$\boxed{\text{indépendance mutuelle} \quad \Rightarrow \quad \text{indépendance 2 à 2}}$$

$$\boxed{\text{indépendance mutuelle} \quad \not\Leftarrow \quad \text{indépendance 2 à 2}}$$

Exemple
On considère de nouveau l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6. On rappelle et complète la liste des événements considérés.

On note A : « le premier chiffre est pair ».

On note B : « le second chiffre est impair ».

On note C : « la somme des chiffres est paire ».

1) Démontrons que A, B et C sont deux à deux indépendants.

- On a déjà démontré que A et B sont indépendants.
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{\text{Card}(B \cap C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
- La famille $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements.
  Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{P}(C) & = & \mathbb{P}(A \cap C) & + & \mathbb{P}(\overline{A} \cap C) & & \\ & = & \dfrac{1}{4} & + & \dfrac{1}{4} & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

- On a alors : $\mathbb{P}(A \cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$
- On a alors : $\mathbb{P}(B \cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$

2) Démontrons que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

- On a $A \cap B \cap C = \varnothing$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Or $\mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Théorème 10.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ une famille d'événements.

Notons $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.
(autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$).

1) Si $A_1, \ldots, A_m$ sont deux à deux indépendants, alors $B_1, \ldots, B_m$ sont deux à deux indépendants.

2) Si $A_1, \ldots, A_m$ sont mutuellement indépendants, alors $B_1, \ldots, B_m$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration.

1) C'est un corollaire direct de la Proposition 1.

2) On commence par démontrer que si $A_1, \ldots, A_m$ sont mutuellement indépendants, il en est de même pour $A_1, \ldots, A_{k-1}, \overline{A_k}, A_{k+1}, \ldots, A_m$ où $k \in [\![1, m]\!]$. Pour ce faire, on prend $I \subset [\![1, m]\!]$ et on distingue :

- × le cas où $k \notin I$ (facile !),
- × le cas où $k \in I$ (plus technique).

Une fois ce résultat démontré, il suffit de l'appliquer pour tous les événements contraires apparaissant dans la famille $(B_1, \ldots, B_m)$. □

Exercice
Soient A, B et C des événements mutuellement indépendants.
Montrer que A et $B \cup C$ sont indépendants.