CH V : Variables aléatoires - généralités

I. Notion de variable aléatoire réelle

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire réelle** définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  (i) X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ ($X : \Omega \to \mathbb{R}$)
  (ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ \leqslant\ x\} \in \mathscr{A}$
- L'image de Ω par l'application X, est notée $X(\Omega)$.
  Cet ensemble image $X(\Omega)$ est, par définition, l'ensemble des valeurs que peut prendre l'application X.

Le terme de « variable aléatoire réelle » peut paraître trompeur :

- X n'est pas une variable, c'est une fonction !
- X n'a rien d'aléatoire, la notion de probabilité n'entre même pas en jeu dans sa définition !

Notation $X(\Omega)$

Il est important de bien comprendre la notation $X(\Omega)$.

- Si on considère E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
  Alors, pour tout $G \subset E$, $f(G)$ est l'image de l'ensemble G par f.
  En particulier, si $G = E$, $f(E) = \mathrm{Im}(f)$ (image de l'application f).
- L'ensemble image $X(\Omega)$ c'est l'image de l'application X. Dans le monde des v.a.r. , on préfère la notation $X(\Omega)$ à la notation $\mathrm{Im}(X)$.
  $\hookrightarrow$ $X(\Omega)$ est bien l'ensemble des valeurs que peut prendre X.

Remarque

- Reprenons la définition. X est une variable aléatoire si :
  (i) X est une fonction,
  (ii) X est une machine à créer des événements.
  (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x]$ est un événement)
- Dans ce chapitre s'opère un changement de point de vue par rapport au précédent : on s'intéressait précédemment aux événements (des ensembles), l'objet de base est maintenant celui de variable aléatoire (des applications).
- Si la définition de v.a.r. ne met pas en jeu de probabilité $\mathbb{P}$, il faut bien comprendre que les v.a.r. ne s'étudient que dans un contexte aléatoire (un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$).
  Ceci légitime donc, a posteriori, le nom de variable aléatoire.
- Dans ce contexte, étudier une v.a.r. X, c'est essentiellement étudier sa loi. Cela peut se faire à l'aide de sa fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On est donc ramené à l'étude de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À terme, on se servira donc de résultats issus des chapitres d'analyse sur les fonctions.
- Dans cette définition, on présente la notion de v.a.r. sous sa formulation la plus générale. L'ensemble des résultats de ce chapitre peut donc s'appliquer aux v.a.r. discrètes comme aux v.a.r. à densité, comme aux v.a.r. quelconques. On en profite pour insister sur le fait qu'il existe des v.a.r. qui ne sont ni discrètes ni à densité. On place ci-dessous l'exemple de telles v.a.r. (on y reviendra en temps voulu).

Exercice

Soit X une v.a.r. admettant une fonction paire f pour densité.
On définit la v.a.r. Y par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases}$$

Montrer que la v.a.r. Y n'est ni une v.a.r. à densité, ni une v.a.r. discrète.

Exercice
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.
Déterminer la fonction de répartition de Y.
Représenter graphiquement cette fonction de répartition.
Y est-elle une v.a.r. à densité ?

Exemple

1) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à effectuer 2 lancers successifs d'un même dé à 6 faces.

- $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$.
- L'univers Ω étant fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- On considère la v.a.r. X égale à la somme des deux résultats obtenus :

$$X \ : \ \left|\begin{array}{ccc} [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] & \to & \mathbb{R} \\ (i \quad , \quad j) & \mapsto & i+j \end{array}\right.$$

  Cette variable aléatoire est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  On peut préciser l'image de cette v.a.r. : $X(\Omega) = [\![2,12]\!] \subseteq \mathbb{R}$

- L'ensemble $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 4\}$ est un bien un événement :
  A : « la somme des deux dés est inférieur à 4 ».
  $A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\} \quad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$
  On notera : $A = [X \leqslant 4] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 4\}$

  L'ensemble $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$ est aussi un événement :
  B : « la somme des deux dés est strictement supérieur à 10 »
  $B = \{(5,6),(6,6),(6,5)\} \quad (B \in \mathcal{P}(\Omega))$
  On notera : $B = [X > 10] = \overline{[X \leqslant 10]} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 10\}$

  De même, on peut considérer les événements :

  × $[2 < X \leqslant 7] = [X > 2] \cap [X \leqslant 7]$,
  × $[2 \leqslant X < 7] = [X \leqslant 2] \cap [X < 7]$,
  × $[2.3 \leqslant X < 7.5] = [3 \leqslant X \leqslant 7]$,
  × $\left[-32 \leqslant X < \mathrm{e}^{27}\right] = [2 \leqslant X \leqslant 12]$,
  × ...

2) On s'intéresse à l'expérience aléatoire consistant à observer le résultat de 4 lancers successifs d'1 dé à 6 faces.

- $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^4$.
- L'univers étant fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- On considère la v.a.r. X égale au nombre de Pile obtenus lors du lancer.
- L'ensemble $C = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant 2\}$ est un bien un événement :
  C : « le lancer a produit, au plus, deux Pile ».
  Des lancers tels que $(\text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face})$, $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face})$, ou $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face})$ réalisent cet événement.
  On notera $C = [X \leqslant 2]$.

  On peut aussi considérer les événements :
  × $[X = 2]$: « le lancer contient exactement 2 Pile ».
  × $[1 < X \leqslant 3]$: « le lancer contient soit 2 Pile soit 3 Pile ».

3) On effectue maintenant une infinité de lancers successifs d'1 dé à 6 faces.

- $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$.
- On considère la v.a.r. X égale au rang d'apparition du premier Pile.
- Dans la suite, on considère les événements :
  × P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ tirage »,
  × F_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ tirage ».
- Ces événements permettre de décrire précisément les événements construits à l'aide de X. Par exemple :
  × $[X = 3] = F_1 \cap F_2 \cap P_3$. Cet événement est réalisé par les tirages :
  $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Face}, \text{Face}, \ldots)$,
  $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \ldots)$,
  $(\text{Face}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \ldots)$, ...
  i.e. par tous les tirages qui commencent par Face, Face, Pile.
  (ne pas confondre événement et tirages réalisant cet événement)
  × $[X \geqslant 8] = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_7$.
  × $[X \geqslant 2] = P_1 \cup (F_1 \cap P_2)$.
  (contient les tirages qui commencent par Pile ou par (Face, Pile))

Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{\text{Pour tout } I \text{ intervalle de } \mathbb{R},\ \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \in \mathscr{A}}$$

Plus précisément, les ensembles suivants sont des événements :

- $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X \geqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X < x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X > x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ *où* $x \in \mathbb{R}$
- $[x \leqslant X \leqslant y] = \{\omega \in \Omega \mid x \leqslant X(\Omega) \leqslant y\}$ *où* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- ...

Démonstration.

- $[X \leqslant x]$ est un événement par définition de v.a.r.
- $[X \geqslant x] = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left[X > x - \frac{1}{n}\right]$.
  C'est la seule difficulté de la démonstration.
  (⊂) Soit $\omega \in [X \geqslant x]$. Ceci signifie que $X(\omega) \geqslant x$.
  Soit $n \geqslant 1$. Comme $x > x - \frac{1}{n}$, on a :
  $$X(\omega) \geqslant x > x - \frac{1}{n}$$
  Ainsi, $\omega \in \left[X > x - \frac{1}{n}\right]$.
  (⊃) Soit $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left[X > x - \frac{1}{n}\right]$.
  Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ X(\omega) > x - \frac{1}{n}$.
  Démontrons alors que :
  $$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ X(\omega) > x - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow X(\omega) \geqslant x$$
  On procède par contraposée. Autrement dit, on démontre que :
  $$X(\omega) < x \Rightarrow \left(\exists n_0 \in \mathbb{N},\ X(\omega) \leqslant x - \frac{1}{n_0}\right)$$
  Supposons $X(\omega) < x$. Notons $\varepsilon = x - X(\omega)$.
  Comme $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0$, $|\frac{1}{n} - 0| \leqslant \varepsilon$.
  En particulier, on a donc : $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon = x - X(\omega)$.
  Et ainsi : $X(\omega) \leqslant x - \frac{1}{n_0}$.

Pour les autres ensembles, on utilise les propriétés de stabilité de la tribu $\mathscr{A}$.

- $[X = x] = [X \leqslant x] \cap [X \geqslant x] \in \mathscr{A}$.
- $[X < x] = [X \leqslant x] \setminus [X = x] \in \mathscr{A}$.
- $[X > x] = [X \geqslant x] \setminus [X = x] \in \mathscr{A}$.
- $[x \leqslant X \leqslant y] = [x \leqslant X] \cap [X \leqslant y] \in \mathscr{A}$.
- ... □

II. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **fonction de répartition de** X et on note F_X l'application :

$$\boxed{F_X \ : \left| \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array} \right.}$$

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

La fonction de répartition F_X vérifie les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1.$

2) *F_X est croissante.*

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1}$

4) *F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.*

Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)}$

5) *F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) \ = \ F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])}$$

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x] \in [0, 1]$ par définition de $\mathbb{P}$.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$. Alors $[X \leqslant x] \subseteq [X \leqslant y]$.
Par croissance des fonctions probabilités, on a alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ \leqslant \ \mathbb{P}([X \leqslant y]) = F_X(y)$$

3) On démontre $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ (même idée pour l'autre propriété).
La fonction F_X est croissante et majorée par 1.
Elle admet donc une limite finie en $+\infty$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X \leqslant n])$$

Or, comme $([X \leqslant n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X \leqslant n]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]\right)$$

Il reste alors à démontrer que : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n] \ = \ \Omega.$

$(\subset)$ $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]$ est un événement donc $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n] \subset \Omega.$

$(\supset)$ Soit $\omega \in \Omega$. Notons $m = \lceil X(\omega) \rceil$.
Par définition, $X(\omega) \leqslant \lceil X(\omega) \rceil = m$.
Ainsi, $\omega \in [X \leqslant m] \subset \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X \leqslant n]$.

4) La fonction F_X est croissante sur $[x, +\infty[$ et minorée par 0.
Elle admet donc une limite à droite en x et :

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x + \frac{1}{n}]\right)$$

Or, comme $\left(\left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x + \frac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x + \frac{1}{n}]\right)$$

Et enfin (par double inclusion ...), on a :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x + \frac{1}{n}] = [X \leqslant x]$$

5) La fonction F_X est croissante sur $] - \infty, x]$ et majorée par 1.
Elle admet donc une limite à gauche en x et :

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x - \frac{1}{n}]\right)$$

Or, comme $\left(\left[X \leqslant x - \frac{1}{n}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left([X \leqslant x - \frac{1}{n}]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x - \frac{1}{n}]\right)$$

Et enfin (par double inclusion ...), on a :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant x - \frac{1}{n}] = [X < x]$$

□

Corollaire 1.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

$$\boxed{F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \mathbb{P}([X = x]) = 0}$$

Démonstration.
Par définition :

$$F_X \text{ continue en } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x) = \lim_{t \to x^-} F_X(t)$$

Or, comme vu dans le théorème précédent : $\lim\limits_{t \to x^-} F_X(t) = \mathbb{P}([X < x])$.
De plus, $\mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x])$.
(puisque $[X \leqslant x] \ = \ [X < x] \cup [X = x]$ et que $\mathbb{P}$ est additive)
Ainsi, $F_X(x) = \lim\limits_{t \to x^-} F_X(t)$ signifie que :

$$\mathbb{P}([X < x]) + \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$

ce qui équivaut à : $\mathbb{P}([X = x]) = 0$. □

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)}$$

Démonstration.
On remarque tout d'abord que :

$$[a < X \leqslant b] \ = \ [X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]$$

On en déduit que : $\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant b]) - \mathbb{P}([X \leqslant a] \cap [X \leqslant b])$.
Enfin, comme $a < b$, on a $[X \leqslant a] \cap [X \leqslant b] \ = \ [X \leqslant a]$. □

III. Loi d'une variable aléatoire

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **loi de** X la donnée de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X \in A])$ où A est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Remarque

Cette définition théorique (valable pour toute v.a.r.) n'est pas un attendu du programme. Il faut par contre savoir comment elle s'exprime dans le cas des v.a.r. discrètes et dans le cas des v.a.r. à densité (on y reviendra).

Théorème 3.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{c}X \text{ et } Y \text{ ont même} \\ \text{fonction de répartition}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ \text{de probabilité}\end{array}}$$

Démonstration.
Admis. □

Remarque

- Évidemment, ce résultat est une équivalence.
Ce théorème stipule alors que la fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X caractérise sa loi (d'où l'importance de l'étude de F_X).
- Comme annoncé en début de chapitre, l'essence aléatoire de l'objet v.a.r. X est contenu dans la notion de loi. La loi de X est donnée par F_X : cette fonction donne la répartition des images de X pour la probabilité $\mathbb{P}$. Autrement dit, F_X définit la répartition aléatoire de X et permet ainsi d'expliquer le terme de variable aléatoire.

IV. Indépendance de variables aléatoires

IV.1. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

- Les **v.a.r.** X **et** Y **sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :
$$\forall I \subset \mathbb{R}, \forall J \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$$
où I et J désignent des intervalles.
- Autrement dit, les v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, les événements $[X \in I]$ et $[Y \in J]$ sont indépendants.

IV.2. Indépendance mutuelle de variables aléatoires

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ (avec $n \geqslant 2$) des variables aléatoires réelles.

- Les v.a.r. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall I_1 \subset \mathbb{R}, \dots, \forall I_n \subset \mathbb{R}, \text{ (où } I_1, \dots, I_n \text{ sont des intervalles)} \\ \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \in I_i]\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \in I_i])\end{array}}$$

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de var aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables (mutuellement) indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :
$$\forall n \geqslant 2,\ \text{ les variables } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes}$$

Théorème 4 (Lemme des coalitions)**.**

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

Soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- *Cas de 2 v.a.r.*

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes}}$$

- *Généralisation à n v.a.r.*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. .

Soient $f_1 : X_1(\Omega) \to \mathbb{R}, \dots, f_n : X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ des fonctions.

$X_1, \dots, X_n$ v.a.r. mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	*$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ v.a.r. mutuellement indépendantes*

$X_1, \dots, X_n$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	*Toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_{p+1}, \dots, X_n$ (pour $p \in [\![2, n-1]\!]$)*

Exemple

- Soient $X_1, \dots, X_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :
  - × les v.a.r. X_1, ${X_2}^2$, $2\,X_3$, $\mathrm{e}^{X_4} - 1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.
  - × les v.a.r. $2\,X_1X_3 - X_5$ et ${X_2}^2$ sont indépendantes.
  - × les v.a.r. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes.

  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que X et Y ne le sont pas non plus.

IV.3. Lien entre indépendance et espérance

Théorème 5.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

On suppose que :
- *X et Y admettent une espérance.*
- *X et Y sont indépendantes.*

Alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

IV.4. Lien entre indépendance et variance

Théorème 6.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

On suppose que :
- *X et Y admettent un moment d'ordre 2.*
- *X et Y sont indépendantes.*

Alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Remarque

- Ces deux théorèmes sont valables pour des variables aléatoires discrètes, à densité, ou quelconques.
- Cependant, concernant les v.a.r. quelconques, on ne sait, en voie ECE, exprimer la notion d'espérance / variance. On joue donc un peu les apprentis sorciers en énonçant ces résultats.
- Dans le cas où X est une v.a.r. discrète et Y est une v.a.r. à densité, le produit XY et la somme $X + Y$ sont des v.a.r. qui peuvent être discrètes, à densité ou quelconques. Qu'importe : si on sait de plus que X et Y sont indépendantes, on pourra déterminer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{V}(X+Y)$.
- Attention, la réciproque est fausse : on peut avoir $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ (resp. $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$) sans que X et Y soient indépendantes.