Feuille d'exercices n°6 : Variables aléatoires discrètes

Fonction de répartition

Exercice 1. ($\bigstar$)
La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

a. Dessiner le graphe de F_X.
b. Sachant que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$, déterminer la loi de X.

Exercice 2. ($\bigstar$)
Soit un réel $p \in]0,1[$.
La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_X(n) = 1 - (1-p)^n$$

- Donner la loi de X.

Loi de probabilité paramétrée

Exercice 3. ($\bigstar$)
Soit Y une v.a.r. telle que :
1) $Y(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} \mid k \in [\![1, n]\!] \right\}$
2) $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = y]) = \alpha\, y$.
- Déterminer α pour que l'on ait bien défini une loi de probabilité.

Exercice 4. ($\bigstar$)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = a\, 3^{-k}$$

a. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.
b. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
c. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
d. On considère la v.a.r. $Y = X(X-1)$.
Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Loi, espérance et variance de X v.a.r. discrète finie

Exercice 5. ($\bigstar$)
Pour chaque variable aléatoire X suivante, donner $X(\Omega)$.
Si elle est discrète finie, donner la loi de X sous forme de tableau et tracer sa fonction de répartition.
a. X_1 est le nombre de « piles » obtenus en lançant quatre pièces de monnaie.
b. X_2 est le minimum de deux dés à six faces.
c. X_3 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche (on tire sans remise des boules dans une urne contenant 4 boules noires et 2 boules blanches).
d. X_4 est le produit de 4 nombres entiers tirés uniformément entre 0 et 2.

Exercice 6. ($\bigstar$)
Pour chacune des variables aléatoires de l'exercice précédent, calculer les moments d'ordre 1, 2 et 3, et donner espérance et variance.

Exercice 7. ($\bigstar$)
Un paquet de 10 cartes contient 5 as, 3 rois et 2 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points et celui d'une dame coûte 1 point.
Du paquet on tire simultanément et au hasard 2 cartes.
On désigne par X la v.a.r. discrète égale au total des points marqués.
- Calculer la loi de X, son espérance et son écart type.

Exercice 8. (★)
On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

- Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 9. (★)
Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de champagne. On fixe un entier $1 \leqslant n \leqslant 25$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de champagne découvertes.

- Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 10. (★)
Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'une équipe arrive en retard à la suite d'un appel est $p = 1/4$.

1) Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.
  - ***a.*** Reconnaître la loi de probabilité de X.
  - ***b.*** Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

2) On considère un ensemble de 8 clients différents, 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.
  - ***a.*** Quelle est la loi de M ? L'expliciter sous forme de tableau.
  - ***b.*** Calculer $\mathbb{E}(M)$.

Loi hypergéométrique

Exercice 11. (★)
Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules vertes. On pioche simultanément 6 boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.

- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de R (resp. V).

Exercice 12. (★)
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1) On suppose que les tirages sont sans remise.
  - ***a.*** Déterminer la loi de B (resp. N).
  - ***b.*** Calculer $\mathbb{E}(B)$, $\mathbb{V}(B)$ (resp. $\mathbb{E}(N)$, $\mathbb{V}(N)$).

2) Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 13. (★)
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement avec remise 5 boules. Chaque fois qu'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

a. Déterminer la loi de X, puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
b. Exprimer Y en fonction de X.
c. En déduire la loi de Y, puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
d. Que deviennent les résultats précédents si le jeu est sans remise ?

Lois discrètes infinies

Exercice 14. (☆)
On effectue des lancers d'une pièce équilibrée.
On note X le nombre de lancers de pièces nécessaires pour obtenir pile.
Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Exercice 15. (★)
On joue avec deux dés équilibrés à 6 faces.
On jette un premier dé et on note sa valeur. On jette ensuite le deuxième dé jusqu'à ce qu'il indique le même numéro que le premier.
Soit X le nombre de fois qu'il faut lancer le deuxième dé pour qu'il indique le même numéro que le premier.

a. Établir la loi de probabilité de X.

b. Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 16. (★)
On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la v.a.r. dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) En utilisant une approximation (que l'on justifiera) calculer les probabilités des événements suivants.

  a. Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.

  b. Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

Exercice 17. (★)
Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit X_1 la v.a.r. égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1 en une heure.

a. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.

b. Quelle est la proba qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet 1 ?

c. Calculer $\mathbb{P}_{[N=n]}([X_1 = k])$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Et pour $k > n$?

d. Justifier que $\mathbb{P}([X_1 = k]) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{[N=n]}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}([N = n])$ puis montrer que $\mathbb{P}([X_1 = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \left(\dfrac{1}{10}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{9}{10}\right)^n \dfrac{\lambda^n}{n!}$.

e. En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Connaître les caractéristiques des lois usuelles

Exercice 18. (☆)
Calculer l'espérance et la variance de X dans les cas suivants :

a. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-5, 10]\!])$ ***b.*** $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(20, \frac{3}{7}\right)$ ***c.*** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\pi)$

Transformation d'une v.a.r. X

Exercice 19. (★)
Soient $p \in]0, 1[$ et X une v.a.r. dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([X = -1]) = \frac{p}{2}, \qquad \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}([X = 1]) = \frac{p}{2}$$

- Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 20. (★)
On suppose que X est une v.a.r. dont la loi est donnée par

1) $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2) $\mathbb{P}([X = -2]) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}([X = -1]) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{5}$, et $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{2}{5}$.

- Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 21. (★)
On suppose que X est une v.a.r. dont la loi est donnée par :

1) $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$

2) $\mathbb{P}([X = -1]) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{4}$.

- Déterminer la loi de $Y = X^2$ et $Z = \mathrm{e}^X$.

Théorème de transfert

Exercice 22. (★)
Soit X une v.a.r. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Déterminer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.
(on pourra utiliser la formule : $\forall x \in]-1, 1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1 - x)$*)*

Exercice 23. ($\bigstar$)
Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- Déterminer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 24. ($\bigstar$)
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n,p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

- Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Exercice 25. ($\bigstar$)
Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

- Calculer $\mathbb{E}\left(2^X\right)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Fonction génératrice

Exercice 26. ($\bigstar\bigstar$)
Soit X une variable aléatoire discrète. On définit la *fonction génératrice* G associée à X par :

$$G(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=k])\ t^k$$

pour tous les réels x tels que la série converge (si convergence il y a).

Déterminer la fonction génératrice de X dans les cas suivants :

a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ où $p \in \,]0,1[$.

b. $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$.

d. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in \,]0,1[$.

e. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 27. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) ***(Fonction génératrice d'une variable aléatoire)***
Soient a, b, et N trois entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs dans cette urne, au hasard et avec remise en procédant de la façon suivante :

× si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'une avant de procéder au tirage suivant ;

× si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche dans cette urne, et l'on procède au tirage suivant.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Déterminer la loi de Y. Montrer alors que :

$$\forall k \in \llbracket 1,b \rrbracket,\ \mathbb{P}([Y=k]) = \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right)$$

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \sum_{k \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y=k])\, x^k$$

On dit que G est la fonction génératrice de la variable aléatoire Y.

a) Justifier l'égalité : $G(x) = E\left(x^Y\right)$.

b) Quelle est la valeur de $G(1)$?

c) Exprimer $E(Y)$ en fonction de $G'(1)$.

d) Exprimer la variance de Y en fonction de $G'(1)$, et de $G''(1)$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = 1 + \dfrac{b!}{N^b}(x-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{b} \dfrac{N^{b-k}}{(b-k)!}\, x^k$.

4. En déduire l'espérance de Y.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

5. De même calculer la variance de Y à l'aide de la fonction génératrice G.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Exercice 28. (★★★) `(ECRICOME 2008)`
Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant une probabilité $1/N$ de tomber dans chacune des N cases (et les lancers de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n, égale au nombre de cases non vides après n lancers.

a. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.

b. Donner les lois de T_1 et de T_2.

c. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $\mathbb{P}([T_n = 1])$, $\mathbb{P}([T_n = 2])$ et $\mathbb{P}([T_n = n])$ (en distinguant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).

d. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\mathbb{P}([T_{n+1} = k]) \ = \ \frac{k}{N}\,\mathbb{P}([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}([T_n = k-1])$$

e. On considère dans les questions qui suivent le polynôme :

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])\, x^k$$

Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

f. Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.

g. En utilisant la relation démontrée à la question ***d.***, montrer que

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)\, G_n'(x) + x\, G_n(x)$$

h. Dériver l'expression précédente et en déduire que

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(T_n) + 1$$

i. Prouver enfin que : $\quad \mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$

et déterminer la limite de $\mathbb{E}(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Utilisation de la formule des probabilités totales

Exercice 29. (★★)
Une pièce de monnaie est déséquilibrée de telle sorte que la probabilité d'apparition de Pile est égale à $\dfrac{1}{3}$. On effectue avec cette pièce une suite de lancers indépendants et on considère, pour tout $n \geqslant 2$, l'événement :

A_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{2^k}{3^n}$. Calculer a_n, pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer la probabilité que la séquence Pile-Face n'apparaisse jamais.

4. On considère alors la variable aléatoire X égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'apparaisse pour la première fois la séquence Pile-Face. Déterminer la loi de X et son espérance.

5. ***a)*** Écrire un programme en **Scilab** qui simule la v.a.r. X.

b) Comment obtenir, informatiquement, une valeur approchée de $\mathbb{E}(X)$?

6. ***a)*** Soit, pour tout $n \geqslant 2$, B_n l'événement

B_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer, et il n'y a pas eu avant de séquence Face-Pile »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note b_n la probabilité de l'événement B_n.
Calculer b_n, pour tout $n \geqslant 2$.

b) En déduire la probabilité pour que la première séquence Pile-Face apparaisse avant la première séquence Face-Pile.

Exercice 30. (★★) *(d'après* `HEC 1982 Maths III`*)*
On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2.

- Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir « face » est p_1 (avec $0 < p_1 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_1 = 1 - p_1$.
- De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir « face » est p_2 (avec $0 < p_2 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante :

× à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce ;
  si le résultat est « face », on joue la deuxième partie avec A_1,
  si le résultat est « pile », on joue la deuxième partie avec A_2 ;

× ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$:
  si on a obtenu « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_1,
  si on a obtenu « pile » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_2.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie.

   a) Exprimer u_1, puis u_2 en fonction de p_1 et p_2.

   b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera.
   Dans quels cas a-t-on $u = \frac{1}{2}$?

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « face », la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « pile ».

   a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances.

   b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 31. (★★★)
Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite suivant la procédure suivante :

× au départ la puce est en O ;

× si, à un instant, la puce est sur la case d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit sur la case d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit sur la case $k+2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

× les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. On note X_n la v.a.r. égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
Exprimer X_n en fonction de S_n.
En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts qu'il a fallu à la puce pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n au cours des n premiers sauts.

   a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

   b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$P([Y_n = k]) = \frac{1}{2}\, P([Y_{n-1} = k-1]) + \frac{1}{2}\, P([Y_{n-2} = k-1])$$

   c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$

$$E(Y_n) = \frac{1}{2}\, E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\, E(Y_{n-2}) + 1$$

4. Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = E(Y_n) - na$$

vérifie une relation récurrente linéaire d'ordre 2.
Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n, puis $E(Y_n)$ en fonction de n.