Feuille d'exercices n°7 : Applications linéaires

Généralités : définition, noyau, image

Exercice 1. (★★)

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y) \end{array}$

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer le noyau et l'image de f.

c. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer f^{-1}.

Exercice 2. (★)

Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x+y-t, x+8y-9z-2t, x-2y+3z) \end{array}$$

a. Montrer que u est une application linéaire.

b. Déterminer le noyau de u, noté $\ker(u)$, et déterminer son image, notée $\mathrm{Im}(u)$. On donnera une base de ces espaces vectoriels.

Exercice 3. (★)

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On considère l'application u définie par :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM \end{array}$$

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Donner une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.

c. Calculer $u(M)$, lorsque $M \in \mathrm{Im}(u)$. Que peut-on en déduire pour u^2 ?

Exercice 4. (★)

On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+2z \\ -x+2y+z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b. Quelle est la matrice A canoniquement associée à l'endomorphisme f ?

c. Déterminer le noyau de f. On en donnera une base.

d. Déterminer l'image de f. On en donnera une base.

Exercice 5. (★)

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = Q \ \text{ où } \ Q(X) = XP(X+1) - (X+1)P(X)$$

a. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

b. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6. (★★★)

E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & \Phi(f) \end{array}$$

où $\Phi(f)$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b. Φ est-il injectif ? Φ est-il surjectif ? Que peut-on en déduire ?

Exercice 7. (★)
Soient u et v deux applications définies par :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X\,P(X) \end{array} \qquad v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'(X) \end{array}$$

a. Montrer que u et v sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.

b. Déterminer $v \circ u - u \circ v$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$.

Noyau, image , théorème du rang

Exercice 8. (★)
Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On considère le sous ensemble F de E formé des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

a. Montrer que F est un espace vectoriel réel.

b. On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} F & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

c. Montrer que Φ est un isomorphisme.

d. En déduire que F est de dimension finie, et donner la dimension de F.

e. Déterminer deux suites géométriques non nulles $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F.

f. Montrer que $\left(({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de F.
Pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F, donner ses coordonnées dans la base obtenue.

Exercice 9. (★★★)
Partie 1 : étude d'un exemple
Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E.

1) Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

On suppose que f vérifie : $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\ker(f) \subset \text{Im}(f)$.

2) Montrer l'implication : $\dim(\text{Im}(f^2)) = 0 \ \Rightarrow\ \text{Im}(f) = \ker(f)$.
Que peut-on en déduire ?

3) Montrer les implications :

$$\dim(\text{Im}(f^2)) = 2 \ \Rightarrow\ \ker(f) = \ker(f^2) \ \Rightarrow\ \text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$$

Que peut-on en déduire ?

4) Déterminer la dimension de $\text{Im}(f^2)$ et de $\ker(f^2)$.

Partie 2 : Noyaux itérés
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) ***a.*** Montrer :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \ker(f^i) \subset \ker(f^{+1})$$

b. Montrer :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \text{Im}(f^{i+1}) \subset \text{Im}(f^i)$$

2) Montrer, en considérant les dimensions de $\ker(f^k)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, qu'il existe un entier $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.
En déduire qu'alors $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$.

3) Montrer que pour tout entier $k \geqslant p$:

$$\ker(f^k) = \ker(f^p) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$$

4) Montrer que $\ker(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exercice 10. (★★★)
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. On note Id l'endomorphisme identité de E.
On suppose que f vérifie : $f^2 - 2f - 3Id = 0$.

a. Montrer que f est un automorphisme de E.

b. Montrer que $\text{Im}(f - 3Id) \subset \ker(f + Id)$ et que $\text{Im}(f + Id) \subset \ker(f - 3Id)$.

c. Trouver deux réels α et β tels que pour tout vecteur $x \in E$, on ait : $x = \alpha(f + Id)(x) + \beta(f - 3Id)(x)$.

d. En déduire que $E = \ker(f - 3Id) + \ker(f + Id)$.

e. Montrer que $\ker(f - 3Id) \cap \ker(f + Id) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

f. Montrer que $\text{Im}(f - 3Id) = \ker(f + Id)$.
En déduire que : $\dim(\ker(f + Id)) + \dim(\ker(f - 3Id)) = \dim(E)$.

Applications linéaires et matrices associées

Exercice 11. (★★)
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

b. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $f - 4id$.
En déduire le noyau de $f - 4id$.

c. Déterminer un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ de première composante égale à 1 tel que $f(v) = 4v$.

d. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit
$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. (★★)
On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 à coefficients réels. On considère l'application f définie par :

$$f \; : \; \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X-1)\,P'(X) - P(X) \end{array}$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de E.

b. Écrire la matrice associée à f dans la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E.

c. Déterminer le noyau de f, ainsi que la dimension de $\ker(f)$.

d. Préciser le rang de f, et déterminer l'image de f.

e. Déterminer l'endomorphisme f^2.

Exercice 13. (★)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Écrire la matrice C de φ dans la base canonique

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Déterminer le noyau de φ, en utilisant la matrice C.

4) On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

a. Montrer que $\mathscr{C}$ est un espace vectoriel réel.

b. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
On déterminera une base de $\mathscr{C}$.

Exercice 14. (★★)
Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On définit l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$\varphi(e_i) = e_{i+1}, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant 3 \text{ et } \varphi(e_4) = e_1$$

a. Montrer sans calcul que φ est un automorphisme.

b. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique.

c. Déterminer l'isomorphisme réciproque de φ.
En déduire la matrice de A^{-1}.

Exercice 15. (★★)
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par f^n l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

× $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$

× $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère les vecteurs $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer $f(u), f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.
Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

c. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ f^n = (2^n - 1)\, f + (2 - 2^n)\, \mathrm{id}$.

e. Montrer que la famille (f, id) est libre dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. Que peut-on en déduire concernant la décomposition obtenue à la question 4 ?

Exercice 16. (★)
On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X) + P'(X) \end{array}$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

c. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer la matrice canoniquement associée à φ^{-1}.
En déduire l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(X) + P'(X) = 1 - X^2$.

Exercice 17. (★★)
$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} \end{array} \right.$$

1) Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer le noyau de f.

3) Calculer $f^2(\overrightarrow{i})$, $f^3(\overrightarrow{i})$, $f^2(\overrightarrow{j})$, $f^3(\overrightarrow{j})$, $f^2(\overrightarrow{k})$ et $f^3(\overrightarrow{k})$.

4) Montrer que $\left(id, f, f^2\right)$, où id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

5) Montrer que $\left(\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), f^2(\overrightarrow{i})\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) Écrire la matrice de f relativement à la base $\left(\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), f^2(\overrightarrow{i})\right)$ de $\mathbb{R}^3$.

7) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

a. Justifier qu'il existe un unique triplet (a, b, c) de réels tel que $g(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + bf(\overrightarrow{i}) + cf^2(\overrightarrow{i})$.

b. Démontrer qu'alors $g = a\, id + bf + cf^2$.

Exercice 18. (★★)
Soit f l'application définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+4y+2z, -3y-2z, 4y+3z) \end{array}$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer le noyau de f.

d. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Qu'en déduit-on ?

Matrice de passage, formule de changement de base

Exercice 19. (★★) *(d'après* `EDHEC 2006`*)*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.
On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2,1,-2)$.

1) a. Montrer que $\ker(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.

b. La matrice A est-elle inversible ?

2) a. Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ième}}$ coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

b. Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ième}}$ coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0,1,-1)$.

c. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Expliciter la matrice P.

3) a. Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

b. Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}.
En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0$.

4) On note $\mathscr{C}_N$ (respectivement $\mathscr{C}_A$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement avec A).

a. Montrer que $\mathscr{C}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet que $\mathscr{C}_A$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer que : $\mathscr{C}_N = \mathrm{Vect}\left(I, N, N^2\right)$.

c. Établir que : $M \in \mathscr{C}_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathscr{C}_N$.
En déduire que : $\mathscr{C}_A = \mathrm{Vect}\left(I, A, A^2\right)$.
Quelle est la dimension de $\mathscr{C}_A$?

Exercice 20. (★★) *(d'après* `EML 1999`*)*
On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = (1, -\sqrt{2}, 1)$, $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (1, \sqrt{2}, 1)$.

1) Montrer que (u,v,w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Justifier que la matrice P est inversible.

3) Montrer que la matrice $P^{-1}JP$ est une matrice diagonale D que l'on explicitera.

4) Calculer J^2, et exprimer J^2 en fonction de I et de K. En déduire que $P^{-1}KP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

5) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'élément suivant de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

a. Montrer que M s'exprime simplement à l'aide de I, J, K et a, b, c.

b. En déduire que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

6) Trouver une matrice X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 21. (★★) *(d'après* `EDHEC 2005`*)*
On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)\, I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) **a.** Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4.

b. Écrire la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).

3) **a.** Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Écrire la matrice D de f dans cette base.

c. En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$

4) **a.** Déterminer la matrice P^{-1}.

b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

c. En déduire explicitement la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. (★★) *(d'après* `ESSEC 2007 - Maths III`*)*
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0,$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ &\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ &\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Enfin, on note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) **a.** Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit $A\, X_n$.

b. En déduire l'expression de X_n, en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.

2) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

a. Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante $1, -1$ et 2.
On notera dorénavant $\mathscr{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).

b. A l'aide de la formule du binôme de Newton, et de la décomposition suivante de T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$.

a. Exprimer A en fonction des matrices T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

b. Calculer P^{-1}.

c. Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de n.