CH IX : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

I. Matrices semblables

I.1. Définition

Définition *Matrices semblables*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Les matrices M et N sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$\boxed{M = PNP^{-1}}$$

Remarque
La relation de similitude (celle qui stipule qu'une matrice M est semblable à une matrice N) vérifie les propriétés suivantes :

1) elle est réflexive : M est semblable à M.

2) elle est symétrique : si M est semblable à N alors N est semblable à M.

3) elle est transitive : si M est semblable à N et N est semblable à R alors M est semblable à R.

I.2. Puissances $k^{\text{ème}}$ de matrices semblables

Théorème 1.

Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que M et N sont semblables et donc qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $M = PNP^{-1}$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PN^kP^{-1}$.

(autrement dit, si M et N sont semblables via la matrice P, M^k et N^k le sont aussi via la même matrice P)

Démonstration.
On suppose que $M = PNP^{-1}$. Démontrons par récurrence que :
$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $M^k = PN^kP^{-1}$.

▸ **Initialisation** :
- D'une part : $M^0 = I_n$.
- D'autre part : $PN^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

▸ **Hérédité** :
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $M^{k+1} = PN^{k+1}P^{-1}$).

$$\begin{array}{rcll} M^{k+1} & = & M \times M^k & \\ & = & PNP^{-1} \times M^k & \textit{(par hypothèse)} \\ & = & PNP^{-1} \times PN^kP^{-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & PN\ (P^{-1}\ P)\ N^kP^{-1} & \\ & = & PN\ I_n\ N^kP^{-1} & \\ & = & PN^{k+1}P^{-1} & \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$. □

Remarque *(de la bonne utilisation de ce théorème)*

- Considérons M et N deux matrices semblables et $k \in \mathbb{N}$.
  Par définition, il existe P inversible telle que : $M = PNP^{-1}$.
  Si on sait facilement calculer N^k, on peut en déduire la valeur de M^k en utilisant la relation : $M^k = PN^kP^{-1}$.
- Il est particulièrement aisé de calculer la puissance N^k lorsque :
  - $N = 0$. Alors $N^k = 0$.
    (ce cas n'est pas très pertinent : si $N = 0$ alors $M = P0P^{-1} = 0$ et on peut travailler directement sur M)
  - $N = I_n$. Alors $N^k = {I_n}^k = I_n$.
    (ce cas n'est pas très pertinent : si $N = I_n$ alors $M = PI_nP^{-1} = I_n$ et on peut travailler directement sur M)
  - $N = \lambda \cdot I_n$. Alors $N^k = (\lambda\ I_n)^k = \lambda^k\ I_n$.
    (ce cas n'est pas très pertinent : si $N = \lambda \cdot I_n$ alors $M = P(\lambda \cdot I_n)P^{-1} = \lambda \cdot I_n$ et on peut travailler directement sur M)
- Dans les énoncés on rencontrera de manière classique les cas suivants.
  - N est diagonale.

$$\text{Si } N = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad N^k = \begin{pmatrix} {d_1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {d_2}^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {d_n}^k \end{pmatrix}$$

  - $N = \lambda\ I_n + R$ où R est une matrice dont on peut facilement déterminer les itérées. Par exemple, $R \neq 0$ peut vérifier :

    a) $\forall k \geqslant 2, R^k = 0$.
    (on dit alors que R est nilpotente d'ordre 2)

    b) $\forall k \geqslant 2, R^k = k\ R$.

    Dans ces deux cas, on peut utiliser la formule du binôme de Newton puisque λI_n et R commutent $((\lambda\ I_n)\ R = \lambda R = R\ (\lambda\ I_n))$.
    (I_n commute avec toute matrice carrée de même ordre)

Exercice *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer N^2 et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

1. Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
(on peut aussi écrire, pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0\ N^{k-2} = 0$)

2. Les matrices $2I$ et N commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
T^n &= (2\,I + N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\,I)^{n-k}\ N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ I^{n-k}\ N^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ I\ N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ N^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}}\ N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 2^n\ N^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1}\ N^1 = 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ N
\end{aligned}$$

Enfin : $2^0\ I + 0\ 2^{-1}\ N = I$ et $T^0 = I$.
La formule précédente reste valable pour $n = 0$. $\square$

Remarque

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
On insiste ici sur le fait que cette relation n'est vérifiée que sous la condition $m \leqslant p \leqslant n$.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \in \mathbb{N}^*$ est donc essentiel pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.

I.3. Lien entre relation de similitude et applications linéaires

Théorème 2.

Soit E un ev de dimension finie.
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

1. Alors :
$$\boxed{M = P\ N\ P^{-1}}$$
ce qui signifie :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}}$$

2. De manière générale :

Les matrices $M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	*M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes*

Démonstration.
Soit $u \in E$. On considère $v = f(u)$ et on note :
$$U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \quad V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \quad P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$
$$U' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) \quad V' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v)$$

Avec ces notations :

$$v = f(u)$$
$$\Leftrightarrow \quad V = M\ U \qquad \textit{(écriture de l'égalité sous forme matricielle dans la base } \mathscr{B}\textit{)}$$
$$\Leftrightarrow \quad P\ V' = MP\ U'$$
$$\Leftrightarrow \quad V' = P^{-1}MP\ U'$$
$$\Leftrightarrow \quad N\ U' = P^{-1}MP\ U'$$

En effet : $V' = N\ U'$ (cela correspond à l'écriture matricielle de $v = f(u)$ dans la base $\mathscr{B}'$). On a donc démontré :
$$(P^{-1}MP - N)\ U' \ = \ 0$$
Ceci étant vrai pour tout U', on en déduit que $P^{-1}MP - N = 0$. □

Remarque

On peut retenir cette formule sous la forme :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$$
que l'on peut rapprocher une nouvelle fois de la relation de Chasles.

Exercice *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est notée A et la matrice dans $\mathscr{B}'$ est notée T.
On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ T^n = n2^{n-1} \, T - (n-1) \, 2^n \, I$$

Démontrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A^n = n2^{n-1} \, A - (n-1) \, 2^n \, I$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'énoncé : $T^n = n2^{n-1} \, T - (n-1) \, 2^n \, I$. Ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} T^n & = & n2^{n-1} \, T - (n-1) \, 2^n \, I \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n & & n2^{n-1} \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) - (n-1) \, 2^n \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) & & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(n2^{n-1} \, f - (n-1) \, 2^n \, \mathrm{id}) \end{array}$$

- En appliquant la réciproque de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)$ (isomorphisme de représentation), on obtient :

$$f^n \ = \ n2^{n-1} \, f - (n-1) \, 2^n \, \mathrm{id}$$

- En appliquant alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(n2^{n-1} \, f - (n-1) \, 2^n \, \mathrm{id}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^n & & n2^{n-1} \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - (n-1) \, 2^n \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ A^n & & n2^{n-1} \, A - (n-1) \, 2^n \, I \end{array}$$

□

Remarque

- Cette démonstration est un peu lourde. On pourra adopter la rédaction suivante (présente dans les corrigés officiels de l'`EDHEC`).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$, on en déduit par la passerelle matrice-endomorphisme :

$$f^n = n2^{n-1} \, f - (n-1) \, 2^n \, \mathrm{id}_E$$

Comme A est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit par la passerelle endomorphisme-matrice :

$$A^n = n2^{n-1} \, A - (n-1) \, 2^n \, I$$

Exercice *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. On note $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$ et $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

- Montrons que la famille $((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\lambda_1 \cdot (1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.

- De plus, $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Remarque

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'ev constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un ev, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}(\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3))}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens ! $\square$

2. Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

Démonstration.
Considérons les matrices colonnes suivantes.

$$U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u_1)) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) \\ &= A \times U_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(2 \cdot u_1) \end{aligned}$$

Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit que : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u_2)) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) \\ &= A \times U_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(2 \cdot u_2) \end{aligned}$$

Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

On en déduit que : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u_3)) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) \\ & = & A \times U_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).
Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cela équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & & & = & 1 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left\{ \begin{array}{rrrcl} \alpha & & & = & 2 \\ & \beta & & = & 1 \\ & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

On en déduit que : $f(u_3) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- On en déduit que : $T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

3. Déterminer P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Démonstration.
Par définition : $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1), \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2), \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3)\Big)$. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

4. Déterminer P^{-1}. Donner une interprétation de cette matrice.

Démonstration.
On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\{ \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ \ L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La matrice réduite $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.

Elle est donc inversible. Ainsi, P est inversible.

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.
Autrement dit : $P^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. □

5. Quel est le lien entre les trois matrices précédentes ?

Démonstration.
D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{rcccccccc} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \text{ainsi} & A & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

□

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut A^n ?

Démonstration.
Comme $A = P\ N\ P^{-1}$, on a (par une récurrence immédiate) :

$$\begin{array}{rcll} A^n & = & P\ T^n\ P^{-1} & \\ & = & P\ (2^n\ I + n\ 2^{n-1} N)\ P^{-1} & \textit{(d'après le début de chapitre)} \\ & = & (2^n\ P + n\ 2^{n-1}\ PN)\ P^{-1} & \\ & = & 2^n\ PP^{-1} + n\ 2^{n-1}\ PNP^{-1} & \\ & = & 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ PNP^{-1} & \end{array}$$

$$\text{Or : } PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et ainsi :

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 + \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & \frac{n}{2} \\ n & 1-n & n \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 1 + \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

□

Remarque

- Dans la base $\mathscr{B}'$, la matrice représentative de f est triangulaire supérieure. Cette forme simplifie certaines manipulations (on détermine T^n et on en déduit ensuite A^n). Évidemment, l'élévation à la puissance n aurait été encore plus simple si on avait obtenu une matrice diagonale.
- Il est alors naturel de se poser la question de savoir si, pour tout endomorphisme f, on est capable de toruver une base dans laquelle la représentation matricielle de f est diagonale (forme idéale pour les manipulations).
- Ce n'est malheureusement pas toujours le cas (comme on va le voir). Le but du chapitre est donc de caractériser les endomorphismes qui admettent une représentation matricielle diagonale *i.e.* d'exhiber les propriétés suffisantes à l'obtention d'une telle représentation.

II. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

II.1. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

II.1.a) Définition

Définition *(Valeur propre)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $u \in E$ **non nul** tel que :

$$\boxed{f(u) = \lambda\ u}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre de** f et est noté $\text{Sp}(f)$.

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists u \neq 0_E,\ f(u) = \lambda\ u\}}$$

2) Cas des matrices carrées

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que :

$$\boxed{AX = \lambda\ X}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre de** A et est noté $\text{Sp}(A)$.

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists X \neq 0,\ AX = \lambda\ X\}}$$

Définition *(Vecteur propre)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que f (resp. A) admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ce n'est pas forcément le cas !)

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ, tout vecteur **non nul** u de E tel que $f(u) = \lambda\ u$.

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, tout vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que $AU = \lambda\ U$.

Exercice

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ les polynômes définis par :

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2$$

1) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $(f(P))(X) = (X-1)\ P'(X) + P(X)$.
Calculer $f(R_0)$, $f(R_1)$ et $f(R_2)$. Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Déterminons $(f(R_2))(X)$.

$$\begin{aligned} (f(R_2))(X) &= (X-1)\ R_2'(X) + R_2(X) \\ &= (X-1)\ 2(X-1) + (X-1)^2 = 3\ (X-1)^2 \\ &= 3\ R_2(X) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(R_2) = 3 \cdot R_2$.
R_2 est vecteur propre de f, associé à la valeur propre 3.

De même : $f(R_0) = 1 \cdot R_0$ et $f(R_1) = 2 \cdot R_1$. Ainsi :
× R_0 est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.
× R_1 est vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. □

2) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $g(P) = P'$.
Calculer $g(P_0)$. Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Déterminons $g(P_0)$.

$$g(P_0) \;=\; P_0' \;=\; 0_{\mathbb{R}_2[X]} \;=\; 0 \cdot P_0$$

Ainsi, $g(P_0) = 0 \cdot P_0$.
P_0 est vecteur propre de g, associé à la valeur propre 0. □

Exercice

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AU pour $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Par calcul : $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $AU = 0 \cdot U$.
U est donc vecteur propre de A associé à la valeur propre 0. □

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer AU_i pour $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Déterminons AU_i.

$$AU_1 = 2 \cdot U_1, \qquad AU_2 = 2 \cdot U_2$$

Ainsi, U_1 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et U_2 est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

En réalité, on a déjà fait ces calculs dans l'exercice précédent.
C'est même ce calcul qui nous a permis de démontrer que :

$$f(u_1) = 2 \cdot u_1 \quad \text{et} \quad f(u_2) = 2 \cdot u_2$$

□

Remarque

- Dans la définition de valeur propre λ de f, il est que le vecteur u tel que $f(u) = \lambda u$ doit être **non nul**. Ceci est primordial.
  Sans cete hypothèse, tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$ serait valeur propre.
  En effet, on peut toujours écrire :
  $$f(0_E) = \lambda \cdot 0_E$$
  Cette égalité ne permet **en aucun cas** de démontrer que λ est valeur propre de f.
- En revanche, la définition n'impose pas de contrainte particulière sur le réel λ qui peut tout à fait être nul. C'est d'ailleurs le cas pour l'application g de cet exercice. Comme $g(P_0) = 0 \cdot P_0$, le réel 0 est valeur propre de f et P_0 ($\neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$) est un vecteur propre associé à cette valeur propre 0.

Exercice

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique (notée $\mathscr{B}$) est :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(on dit que φ est l'endomorphisme canoniquement associé à M)
Notons :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer MV_1, MV_2, MV_3. Que peut-on en déduire ?
2. Notons v_1 l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1) = V_1$.
   On définit de même v_2 et v_3. Déterminer les valeurs propres de φ.
3. a) Démontrer que $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer N, la matrice représentative de φ dans $\mathscr{B}'$.
4. a) Déterminer P, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   b) Quel lien y a-t-il entre les matrices M, N et P ?
   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer M^n.

Démonstration.

1. Déterminons MV_i.

$$MV_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot V_1, \quad MV_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot V_2, \quad MV_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot V_3$$

Ainsi, V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

2. Tout d'abord :

$$v_1 = (-1, 1, 0), \quad v_2 = (2, 1, 0), \quad \text{et} \quad v_3 = (0, -1, 1)$$

Remarquons que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$:

$$\begin{array}{ccc} MV_i & = & \lambda_i V_i \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_i) & & \lambda_i \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_i) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi(v_i)) & & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda_i \cdot v_i) \end{array}$$

Comme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ est un isomorphisme, on en déduit :

$$\varphi(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$$

Ainsi, v_1, v_2 et v_3 sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

3. a) Il suffit de démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre (EXO).
   Comme de plus $\mathrm{Card}((v_1, v_2, v_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) • Tout d'abord : $\varphi(v_1) = -1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.
   Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3)}(\varphi(v_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   • Ensuite : $\varphi(v_2) = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.
   Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3)}(\varphi(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   • Enfin : $\varphi(v_3) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3$.
   Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3)}(\varphi(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   On en déduit que : $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. a) Par définition : $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1), \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_2), \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_3)\Big)$. Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{cccccccc} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \text{ainsi} & M & = & P & \times & N & \times & P^{-1} \end{array}$$

   c) D'après ce qui précède : $M^n = PN^nP^{-1}$.

□

II.1.b) Nombre maximal de valeurs propres

Théorème 3.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et soit $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^p$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

u_1, …, u_p sont vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** *λ_1, …, λ_p de f*	$\Rightarrow$	*La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre*

On en déduit que l'endomorphisme f possède au plus n valeurs propres **distinctes**.

2) *Cas des matrices carrées*

U_1, …, U_p sont vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** *λ_1, …, λ_p de A*	$\Rightarrow$	*La famille $(U_1, \dots, U_p)$ est libre*

On en déduit que la matrice A possède au plus n valeurs propres **distinctes**.

Démonstration.

a) On démontre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: toute famille $(u_1, \dots, u_k)$ de k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (λ_1, …, λ_k) est libre.

b) Si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre, alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \leqslant n$. □

Remarque

- On a démontré dans l'exercice précédent que -1, 1 et 2 sont des valeurs propres distinctes de φ.
  Or φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
  On en déduit que φ possède au plus 3 valeurs propres distinctes.
  Ainsi : $\text{Sp}(\varphi) = \{-1, 1, 2\}$.
- Considérons E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.
  Supposons que f possède n valeurs propres distinctes λ_1, …, λ_n. Notons u_1, …, u_n des vecteurs propres associés respectivement à λ_1, …, λ_n.

  Alors la famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est libre.
  Comme $\text{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

Théorème 4. *(Généralisation)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

- *Soient λ_1, …, λ_p p valeurs propres* **distinctes** *de f.*
- *Soient $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_p$ p familles de vecteurs de E telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:*
  - × *les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.*
  - × *les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à λ_i.*

Alors la famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_p$ est une famille libre de E.

2) *Cas des matrices carrées*

- *Soient λ_1, …, λ_p p valeurs propres* **distinctes** *de A.*
- *Soient $\mathcal{F}_1$, …, $\mathcal{F}_p$ p familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:*
  - × *les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.*
  - × *les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à λ_i.*

Alors la famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_p$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

II.1.c) Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Théorème 5.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de E.
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\begin{array}{lcl} \lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'endomorphisme } f - \lambda\, \mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'endomorphisme } f - \lambda\, \mathrm{id}_E \text{ n'est pas bijectif} \end{array}$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\begin{array}{lcl} \lambda \text{ est valeur propre de } A & \Leftrightarrow & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I)\, U = 0\} \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \\ & \Leftrightarrow & \text{La matrice } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \end{array}$$

Démonstration.

1) Il s'agit de dérouler les définitions.

$$\begin{array}{lcl} \lambda \text{ est valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } f(u) = \lambda\, u \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } (f - \lambda\, \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } u \neq 0_E \text{ tel que } u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'endomorphisme } f - \lambda\, \mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif} \\ & \Leftrightarrow & \text{L'application } f - \lambda\, \mathrm{id}_E \text{ n'est pas bijective} \end{array}$$

Cette dernière équivalence est vérifiée car, sous les hypothèses :

× E est un espace vectoriel de dimension finie,

× $g \in \mathscr{L}(E)$.

on a : g injectif $\Leftrightarrow$ g surjectif $\Leftrightarrow$ g bijectif.
(on a la même conclusion sur $g \in \mathscr{L}(E, F)$ si E et F des ev de même dimension finie : $\dim(E) = \dim(F)$*)*

Et ainsi : g n'est pas injectif $\Leftrightarrow$ g n'est pas surjectif $\Leftrightarrow$ g n'est pas bijectif.
On conclut en appliquant ce résultat à $g = f - \lambda\, \mathrm{id}_E$. □

II.1.d) Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres de sa matrice représentative dans une base

Théorème 6.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) *Alors :* $\boxed{f(u) = \lambda u \ \Leftrightarrow\ AU = \lambda U}$

2) *En conséquence :*

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f \ \Leftrightarrow\ \lambda \text{ est valeur propre de } A}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)}$$

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ	$\Leftrightarrow$	*Le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ*

Le théorème stipule que $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow AU = \lambda U$. Pour autant :

$$f(u) \cancel{=} A\ U$$

Il ne faut pas confondre :

× $f(u)$ qui est un vecteur de E,

× AU qui est un vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $(f(P))(X) = (X-1)\ P'(X) + P(X)$.

Enfin, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Notons $P(X) = 2 + X + 3X^2$. Déterminer $f(P)$.

2. Déterminer $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

1. On effectue le calcul :

$$\begin{aligned} (f(P))(X) &= (X-1)\ P'(X) + P(X) \\ &= (X-1)\ (1+6X) + (2 + X + 3X^2) \\ &= 1 - 4X + 9X^2 = (1 \cdot P_0 - 4 \cdot P_1 + 9 \cdot P_2)(X) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(P) = 1 \cdot P_0 - 4 \cdot P_1 + 9 \cdot P_2$.

2. D'après ce qui précède : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(P)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Enfin : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(P)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = A \times U$. □

MÉTHODO **Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme**

Dans les sujets, un endomorphisme f sera généralement représentée par sa matrice A dans une base donnée.
On dédtermine alors $\mathrm{Sp}(f)$ en déterminant $\mathrm{Sp}(A)$.

λ est valeur propre de f $\Leftrightarrow$ λ est valeur propre de A

$\Leftrightarrow$ $\exists U \neq 0,\ AU = \lambda U$

$\Leftrightarrow$ $\exists U \neq 0,\ (A - \lambda\ I_n)\ U = 0$

$\Leftrightarrow$ $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow$ l'un (au moins) des coefficients diagonaux de la réduite (**triangulaire supérieure**) de $A - \lambda I_n$ est nul

Plus précisément, on procède comme suit.

1) On écrit la matrice $A - \lambda I_n$ où λ est inconnu.

2) On calcule le rang de $A - \lambda I_n$.
En opérant par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice (ce qui ne modifie pas le rang), on obtient une matrice réduite sous forme triangulaire supérieure.
(cela consiste à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss)

3) Les valeurs propres de la matrice A sont exactement les valeurs de λ qui annulent un des coefficients diagonaux de la matrice réduite.

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E. On considère l'endomorphisme de $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de f.

2) Même question avec $E = \mathbb{R}^2$ et g l'endomorphisme dont la représentation matricielle dans la base canonique est : $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ puis $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\[2ex]
& \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\[2ex]
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\, L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)\, L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\[2ex]
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & -8+6\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle (et donc $A - \lambda I_3$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 6-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -8+6\,\lambda-\lambda^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 6 \ \texttt{OU} \ -(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 6 \ \texttt{OU} \ \lambda = 2 \ \texttt{OU} \ \lambda = 4
\end{array}$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{rg}(B - \lambda\, I_3) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 7-\lambda & 8 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle (et donc $B - \lambda I_3$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
B - \lambda I_3 \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 7-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ 3-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ 3-\lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 7 \ \texttt{OU} \ \lambda = 3
\end{array}$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(B) = \{3, 7\}$.

Théorème 7.
Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1)	*La matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure)*	$\Rightarrow$	*Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux*
2)	*La matrice A est diagonale*	$\Rightarrow$	*Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux*

`À RETENIR`

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) se lisent sur sa diagonale.

- Pour les matrices carrées d'ordre 2 on utilise la caractérisation suivante :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } A & \Leftrightarrow & A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda I_2) = 0 \end{array}}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(C - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) & = & (1-\lambda)(3-\lambda)+1 \\ & = & 3 - 4\,\lambda + \lambda^2 + 1 \\ & = & 4 - 4\lambda + \lambda^2 \;=\; (2-\lambda)^2 \end{array}$$

$C - \lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow$ $\det(C - \lambda I_3) = 0$ $\Leftrightarrow$ $(2-\lambda)^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = 2$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(C) = \{2\}$.

- Déterminons enfin $\det(D - \lambda I_2)$.

$$\det(D - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 + 1$$

Il n'existe pas de réel λ tel que $\lambda^2 = -1$.
On en déduit que $\mathrm{Sp}(D) = \varnothing$ □

Remarque
Ce dernier exemple démontre qu'il existe des endomorphismes (resp. des matrices carrées) qui n'admettent pas de valeur propre réelle.

II.1.e) Valeurs propres de matrices semblables

Théorème 8.
Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient M et N des matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}(M) \;=\; \mathrm{rg}(N)}$

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \;\Rightarrow\; \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) \;=\; \mathrm{rg}(N - \lambda I_n)}$$

3) $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont semblables} \;\Rightarrow\; \mathrm{Sp}(M) \;=\; \mathrm{Sp}(N)}$

Démonstration.

1) Les matrices M et N sont semblables. Ce sont donc les représentations matricielles d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ (où E est un ev de dimension n) dans des bases différentes. On en déduit :

$$\mathrm{rg}(M) \;=\; \mathrm{rg}(f) \;=\; \mathrm{rg}(N)$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que M et N sont semblables.
Il existe donc $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = PNP^{-1}$. Remarquons :

$$M - \lambda I_n \;=\; PNP^{-1} - \lambda I_n \;=\; PNP^{-1} - \lambda P I_n P^{-1} \;=\; P\big(N - \lambda I_n\big)P^{-1}$$

Ainsi : $M - \lambda I_n$ et $N - \lambda I_n$ sont semblables. Elles ont donc le même rang.

3) On remarque :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } M & \Leftrightarrow & M - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{rg}(M - \lambda I_2) \neq n \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{rg}(N - \lambda I_2) \neq n \\ & \Leftrightarrow & N - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } N \end{array}$$

□

Remarque
Dans le théorème précédent, on démontre que deux matrices semblables M et N ont même rang et on en déduit : $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(N)$. On peut aussi faire la démonstration en rappelant que M et N sont les représentations matricielles d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ (où E est un ev de dimension n) dans des bases différentes. On en déduit :

$$\text{Sp}(M) \ = \ \text{Sp}(f) \ = \ \text{Sp}(N)$$

II.1.f) Cas particulier de la valeur propre 0

Théorème 9.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de E.
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \textit{Le réel } 0 \textit{ est une valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \text{Ker}(f) \neq \left\{0_E\right\} \\ & \Leftrightarrow & f \textit{ n'est pas injective} \\ & \Leftrightarrow & f \textit{ n'est pas bijective} \end{array}}$$

Évidemment, on peut aussi écrire :

$$\boxed{f \textit{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Le réel } 0 \textit{ n'est pas valeur propre de } f}$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\boxed{\textit{Le réel } 0 \textit{ est une valeur propre de } A \quad \Leftrightarrow \quad A \textit{ n'est pas inversible}}$$

Évidemment, on peut aussi écrire :

$$\boxed{A \textit{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{Le réel } 0 \textit{ n'est pas valeur propre de } A}$$

II.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

II.2.a) Définition

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes
On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \big\{u \in E \,|\, f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ &= \big\{u \in E \,|\, (f - \lambda \mathrm{id})(u) = 0_E\big\} \ = \ \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \end{aligned}}$$

2) Cas des matrices carrées
On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,|\, AU = \lambda \cdot U\} \\ &= \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,|\, (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \end{aligned}}$$

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

On note maintenant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Considérons $u \in E$ et notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Alors : $\boxed{f(u) = \lambda \cdot u \ \Leftrightarrow \ AU = \lambda \cdot U}$

Remarque

- On a vu précédemment que, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$ (l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est l'ensemble des valeurs propres de sa matrice représentative dans une base donnée).
- Par contre :

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda(f) & \neq & E_\lambda(A) \\ \cap & & \cap \\ E & & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$.
Il faut faire attention à cette définition :

× $u = 0_E$ n'est `JAMAIS` vecteur propre de l'endomorphisme f.

× ainsi, l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ n'est `JAMAIS` un espace vectoriel.

Attention à la confusion :

$$E_\lambda(f) \neq \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\}$$

La bonne définition est :

$$\boxed{E_\lambda(f) \ = \ \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \ \cup \ \{0_E\}}$$

II.2.b) Structure d'un sous-espace propre

Théorème 10.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Soit λ une valeur propre de f.

a. $\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$. *En particulier :* $\boxed{\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1}$

2) *Cas des matrices carrées*

Soit λ une valeur propre de A.

a. $\boxed{E_\lambda(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

b. $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. *En particulier :* $\boxed{\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1}$

Démonstration.

1) Soit λ une valeur propre de f.

- Par définition, $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.
  $E_\lambda(f)$ est alors un espace vectoriel en tant que noyau d'une application linéaire.
- λ étant une valeur propre de f, il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) = \lambda u$.
  Autrement dit, $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = E_\lambda(f)$.
  Ainsi, $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$ et $\dim(E_\lambda(f)) \neq 0$.
  On en déduit que $\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1$. □

II.2.c) Détermination d'un sous-espace propre

MÉTHODO **Déterminer $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ donnée**

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Soit λ est une valeur propre de f.

On rappelle que :

$$\begin{array}{rcl} u \in E_\lambda(f) & \Leftrightarrow & f(u) = \lambda \cdot u \\ & \Leftrightarrow & (f - \lambda \,\mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & (A - \lambda \, I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire.

Exercice

On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de f.

2. Déterminer les espaces propres correspondants.

3. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = ((2,1,0),(-1,0,1),(-1,-2,1))$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 2-\lambda & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2\, L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (2-\lambda)\, L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & 1-\lambda(2-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\, L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 - 4\,(1-\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Remarquons alors :

$$(1-\lambda)^2 - 4\,(1-\lambda) = (1-\lambda)\,((1-\lambda)-4) = (1-\lambda)\,(-3-\lambda)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle (et donc $A - \lambda I_3$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ (1-\lambda)\,(-3-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = 1 \ \texttt{OU}\ \lambda = -3
\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{1, -3\}$.

2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $E_1(f)$.

$$\begin{aligned}
u \in E_1(f) &\iff (f - \mathrm{id})(u) = 0_E \\
&\iff (A - I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 4\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -\,x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\, L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \ L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\ x = 2y - z\right.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
E_1(f) &= \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in E_1(f)\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} \\
&= \{(2y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET}\ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y \cdot (2,1,0) + z \cdot (-1,0,1) \mid y \in \mathbb{R} \ \texttt{ET}\ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,((2,1,0),\ (-1,0,1))
\end{aligned}$$

- Déterminons $E_{-3}(f)$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_{-3}(f) & \Longleftrightarrow & (f+3\ \mathrm{id})(u) = 0_E \\
& \Longleftrightarrow & (A+3\ I_3)\times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2\ x & & & + & 2\ z & = & 0 \\ -\ x & + & 2\ y & + & 3\ z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 5\ L_3 +\ L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 5\ L_2 - 2\ L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\ x & - & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 8\ z & = & 0 \\ & & 8\ y & + & 16\ z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\ x & - & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 8\ z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcl} 5\ x & - & 2\ y & = & -\ z \\ & & y & = & -2\ z \end{array}\right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2\ L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} 5\ x & = & -5\ z \\ y & = & -2\ z \end{array}\right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-3}(f) & = & \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid u \in E_{-3}(f)\} \\
& = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = -z \ \texttt{ET}\ y=-2z\} \\
& = & \{(-z,-2z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\} \\
& = & \{z\cdot(-1,-2,1) \mid z \in\mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((-1,-2,1)\right)
\end{array}$$

3. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.
Supposons : $\lambda_1\ (2,1,0)+\lambda_2\ (-1,0,1)+\lambda_3\ (-1,-2,1)=(0,0,0)$.

Ceci équivaut au système : $(S)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & 2\ \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Or :}\quad (S) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & 2\ \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow 2\ L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 3\ \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & 3\ \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0\right. \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre.
De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
On en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Notons $u=(2,1,0)$, $v=(-1,0,1)$ et $w=(-1,-2,1)$.
D'après ce qui précède :

$\times$ $f(u) = 1\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\times$ $f(v) = 0\cdot u + 1\cdot v + 0\cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\times$ $f(w) = 0\cdot u + 0\cdot v - 3\cdot w$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(v)) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

On en déduit que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$. $\square$

Remarque

- Cet exercice a consisté à diagonaliser f. Autrement dit à trouver une base dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Le lien entre les matrices représentatives de f dans les deux bases différentes est donné par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & = & P & D & P^{-1} \end{array}$$

II.3. Polynômes annulateurs

II.3.a) Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k \ X^k$$

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphimsmes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f))$$

Exemple

Considérons $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Notons $P(X) = X^2 - 2X$. On a alors :

$$P(f) = f^2 - 2f \quad \text{et} \quad P(A) = A^2 - 2A$$

- Notons $Q(X) = X^2 - 2X + 3$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} Q(f) & = & f^2 - 2f + 3f^0 \\ & = & f^2 - 2f + 3\mathrm{id}_E \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} Q(A) & = & A^2 - 2A + 3A^0 \\ & = & A^2 - 2A + 3I_n \end{array}$$

Pour déterminer $P(f)$ (resp. $P(A)$), il suffit de remplacer l'indéterminée X par f (resp. par A). Il faut cependant faire attention : cette stratégie ne fonctionne que si l'on considère que le terme constant du polynôme est le coefficient devant X^0.

- Notons $R(X) = (X-1)(-2+3X^2)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} R(f) & = & (f - f^0)(-2f^0 + 3f^2) \\ & = & (f - \mathrm{id}_E)(-2\mathrm{id}_E + 3f^2) \end{array}$$

Et :

$$\begin{array}{rcl} R(A) & = & (A - A^0)(-2A^0 + 3A^2) \\ & = & (A - I_n)(-2I_n + 3A^2) \end{array}$$

- Enfin, si $T(X) = 0$ alors :

$$T(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad T(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

II.3.b) Polynômes annulateurs

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes
On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Remarque

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ est une base de l'ev E (de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors :

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow P(A) = 0$$

(via la passerelle endomorphisme-matrice)

- On en déduit que :

P est une polynôme annulateur de f	$\Leftrightarrow$	P est un polynôme annulateur de A

Exemple

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A.

2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.

Démonstration.

1) Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \ 2A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ -3I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et on a bien $A^2 + 2A - 3I = 0$.

2) L'égalité $A^2 + 2A - 3I = 0$ entraîne $\frac{1}{3}(A + 2I) \ A = I$.
On en déduit que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$. □

Remarque

- Il est classique de démontrer le caractère inversible d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur. La méthode précédente fonctionne si le polynôme annulateur étudié P a un terme constant non nul.
- Si une matrice A possède un polynôme annulateur, alors elle en possède une infinité. Reprenons l'exemple précédent et considérons le polynôme $Q(X) = (X - 7) \ (X^2 + 2X - 3)$. Alors Q est un polynôme annulateur :

$$Q(A) = (A - 7 \ I) \ (A^2 + 2A - 3 \ I) = 0$$

- De manière générale, tout polynôme :

$$R_\beta(X) = (X - \beta) \ (X^2 + 2X - 3)$$

est alors un polynôme annulateur de A.

II.3.c) Existence d'un polynôme annulateur non nul

Théorème 11.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*
Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de f.*

2) *Cas des matrices carrées*
Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de A.*

Démonstration.
Considérons la famille $(A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{n^2})$.
Cette famille contient n^2+1 éléments dans l'ev $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie n^2. On en déduit que cette famille est liée.
Il existe donc un (n^2+1)-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que :

$$\alpha_0 \ A^0 + \ldots + \alpha_{n^2} \ A^{n^2} \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Le polynôme P défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \alpha_k \ X^k$ est donc un polynôme annulateur non nul de A. □

Remarque
En fait, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n, mais ce résultat est hors-programme.

II.3.d) Intérêt des polynômes annulateurs

Théorème 12.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) *Cas des endomorphismes*
Si P est un polynôme annulateur de f alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } f \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \ \subset \ \{\text{racines de } P\}}$

2) *Cas des matrices carrées*
Si P est un polynôme annulateur de A alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } A \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{\text{racines de } P\}}$

Démonstration.
Soit λ une valeur propre de A et U un vecteur propre associé.

- Démontrons tout d'abord par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, \ A^k U = \lambda^k U$.
  1) **Initialisation** :
  × D'une part $A^0 U = I \times U = U$.
  × D'autre part $\lambda^0 U = 1 \cdot U = U$.
  On a bien $A^0 U = \lambda^0 U$.
  2) **Hérédité** :
  Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $A^k U = \lambda^k U$ et démontrons que $A^{k+1} U = \lambda^{k+1} U$.

$$A^{k+1} U \ = \ A(A^k U) \ = \ A(\lambda^k U) \ = \ \lambda^k A U \ = \ \lambda^k \lambda U \ = \ \lambda^{k+1} U$$

- Considérons un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
  Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k$.
  Ainsi $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k \ A^k$ et en conséquence :

$$\begin{aligned} P(A)\ U &= \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\ A^k\right) U = \sum_{k=0}^{r} a_k\ A^k U = \sum_{k=0}^{r} a_k\ \lambda^k U \\ &= \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\ \lambda^k\right) U = P(\lambda)\ U \end{aligned}$$

- Si P est un polynôme annulateur de A, on sait de plus : $P(A) = 0$.
  On en déduit que : $P(A)\ U = 0 \cdot U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi :

$$P(\lambda)\ U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

  Or $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ puisque c'est un vecteur propre de A. Ainsi $P(\lambda) = 0$. □

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ de l'exercice précédent.

On a démontré que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur.
Que peut-on déduire ?

Démonstration.

- $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X - 1)\ (X + 3)$.
  Le polynôme P a deux racines : 1 et -3. On en déduit que :

$$\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{1, -3\}$$

- Pour déterminer si 1 (resp. -3) est valeur propre de A, on utilise la caractérisation classique :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \quad \Leftrightarrow \quad A - \lambda\ I_3 \text{ non inversible}$$

- Or :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A + 3\ I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - I_3$ est non inversible car $C_1 = C_3$ (donc $\mathrm{rg}(A - I_3) < 3$).
La matrice $A + 3\ I_3$ est non inversible car $C_1 = -2\ C_2 + C_3$. □

Ce résultat n'est en aucun cas une équivalence !

$$\lambda \text{ une valeur propre de } A \ \cancel{\Longleftrightarrow}\ \lambda \text{ est une racine de } P$$

Si on reprend l'exemple précédent, puisque P est un polynôme annulateur de A, alors, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $R_\beta(X) = (X - \beta)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A :

$$R_\beta(A) = (A - \beta\ I)\ P(A) = 0$$

Mais β racine de R_β ne démontre pas que β est valeur propre de A.
Sinon tout β serait valeur propre de A et on aurait ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \mathbb{R}$.

Exercice

Reprenons la matrice de l'épreuve `EDHEC 2016`. On note $\mathscr{B}$ la bc de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 4\ A$ puis déterminer un polynome annulateur de A.
Quelles sont les valeurs propres possibles pour A ?

2. Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

III. Théorèmes de réduction

III.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

III.1.a) Définition

Définition *(Endomorphisme / matrice carrée diagonalisable)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes
- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Exercice

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f est diagonalisable.

Démontrer que f^2 est diagonalisable.

Démonstration.
L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D$ où D est une matrice diagonale.
Il suffit alors de remarquer que :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D \times D = D^2$$

D'où f^2 diagonalisable. □

III.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Théorème 13.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1) Cas des endomorphismes

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f}$$

2) Cas des matrices carrées

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{il existe une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } A}$$

3) Lien entre endomorphisme et représentation matricielle

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow A \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque
- On a adopté ici une présentation légèrement différente de celle présente dans le programme officiel. Celui-ci recommande de considérer comme définition de diagonalisibilité de f le résultat de ce théorème. À savoir que f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f.
- Dans les énoncés, on donne généralement f sous une forme matricielle A. Il faut savoir jongler entre les différentes représentations en fonction des exigences de l'énoncé.

Démonstration.

1) f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
Autrement dit, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1') & = & \lambda \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' + \ldots + 0 \cdot e_{n-1}' + 0 \cdot e_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n') & = & 0 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' + \ldots + 0 \cdot e_{n-1}' + \lambda_n \cdot e_n' \end{array}$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ formée de vecteurs propres de f
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de* $f)$

3) f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = D$$

$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}'$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times D \times (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}$$

$\Leftrightarrow$ A est diagonalisable

2) Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Rappelons que :

$$u \in E_\lambda(f) \ \Leftrightarrow\ U \in E_\lambda(A)$$

Ainsi :

$$\boxed{u \text{ est un vecteur propre de } f \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ est un vecteur propre de } A.}$$

Si on considère une famille $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$\begin{array}{rl} & \alpha_1\ u_1 + \ldots + \alpha_n\ u_n = 0_E \\ \Leftrightarrow & \alpha_1\ U_1 + \ldots + \alpha_n\ U_n = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a noté : $U_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$.
De sorte que :

$$\boxed{(u_1, \ldots, u_n) \text{ est libre dans } E \quad \Leftrightarrow \quad (U_1, \ldots, U_n) \text{ est libre dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

On en déduit, à l'aide du point ***3)*** :

A est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ f est diagonalisable

$\Leftrightarrow$ il existe une base $(u_1, \ldots, u_n)$ formée de vecteurs propres de f

$\Leftrightarrow$ il existe une base $(U_1, \ldots, U_n)$ formée de vecteurs propres de A

Remarque

Dans le point ***1)***, on démontre que $f(e_i') = \lambda_i \cdot e_i'$.
Ceci signifie que $e_i' \in E_{\lambda_i}(f)$ mais pas forcément que e_i' est un vecteur propre de f. Il faut en plus démontrer que $e_i' \neq 0_E$. Or $\mathscr{B}'$ étant une base, elle ne peut contenir 0_E (toute famille contenant 0_E est liée).

$\square$

À RETENIR

- Dans les énoncés, l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est généralement donné par A sa matrice représentative dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ donnée.
- Diagonaliser f, c'est trouver une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dans laquelle la matrice représentative de f, notée D, est diagonale. Plus précisément :
  - × cette base $\mathscr{B}'$ est constituée de vecteurs propres de f.
  - × la matrice D a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de f. Ces valeurs propres apparaissent dans l'ordre de classement des vecteurs propres apparaissant dans $\mathscr{B}'$.
- La formule de changement de base permet de faire le lien entre tous ces objets :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & = & P & D & P^{-1} \end{array}$$

  La matrice P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Elle est obtenue en concaténant les matrices colonnes représentatives, dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs propres de f. Plus précisément :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_n) \Big)$$

Exercice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable.

Soit B une matrice semblable à A.

Démontrer que B est diagonalisable.

Démonstration.

1) En détaillant les formules

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Comme A et B sont semblables, il existe $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = QBQ^{-1}$$

On en déduit :

$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \quad \text{et donc} \quad B = Q^{-1}P\ D\ P^{-1}Q$$

Et ainsi $B = Q^{-1}P\ D\ (Q^{-1}P)^{-1}$.

2) À l'aide de la passerelle endomorphisme-matrice (beaucoup plus élégant)

- Comme A et B sont semblables, elles représentent le même endomorphisme, noté $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes.
- Or A est diagonalisable donc f l'est (sens réciproque du point ***3)*** du théorème précédent).
- Comme f est diagonalisable, B l'est (c'est le sens direct du point ***3)*** du théorème précédent).

□

III.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

III.2.a) Critère de diagonalisabilité

Théorème 14.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f.

Notons $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_m}(f)$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

a. $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leqslant \dim(E)$

b. $\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)}$

2) *Cas des matrices carrées*

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de A.

Notons $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_m}(A)$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

a. $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) \leqslant n$

b. $\boxed{A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n}$

Démonstration.
Admis. □

III.2.b) Condition suffisante de diagonalisabilité

Théorème 15.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$\boxed{f \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est diagonalisable}}$

2) *Cas des matrices carrées*

$\boxed{A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$

Démonstration.
Supposons que f admet n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Considérons $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ famille de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

- $\mathscr{F}$ est une famille libre car constituée de n vecteurs propres associés à n valeurs propres distinctes.
- De plus, $\text{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$.

On en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f.
Ainsi f est diagonalisable. □

Remarque
Le résultat énoncé dans le théorème n'est pas une équivalence. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la matrice de l'exercice précédent : elle est diagonalisable mais n'a que 2 valeurs propres distinctes.

Exercice
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et A la matrice canoniquement associée à f.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.

2. Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de f.

3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Démontrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On explicitera P et P^{-1}.

5. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Quelle propriété a A^n ? Pourquoi ?

Démonstration.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons que :

λ est valeur propre de f $\Leftrightarrow$ λ est valeur propre de A

$\Leftrightarrow$ $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow$ l'un (au moins) des coefficients diagonaux de la réduite (**triangulaire supérieure**) de $A - \lambda I_n$ est nul

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda\, I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)\, L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -(2-\lambda) \\ 0 & -(2-\lambda) & 1-(3-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -(2-\lambda) \\ 0 & 0 & -(2-\lambda)(4-\lambda)-(2-\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Enfin :

$$-(2-\lambda)(4-\lambda)-(2-\lambda) = -(2-\lambda)\ \Big((4-\lambda)+1\Big) = -(2-\lambda)\ (5-\lambda)$$

Les valeurs propres de A sont les réels λ qui annulent l'un des coefficients diagonaux de la matrice réduite **triangulaire supérieure** obtenue.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 5\} = \mathrm{Sp}(f)$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Déterminons $E_2(f)$.

$$\begin{aligned}
u \in E_2(f) &\iff (f - 2\ \mathrm{id})(u) = 0_E \\
&\iff (A - 2\ I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\ x + y + z = 0\right. \\
&\iff \left\{\ x = -y - z\right.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} E_2(f) & = & \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid u\in E_2(f)\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y-z\} \\ & = & \{(-y-z,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y\in\mathbb{R} \texttt{ ET } z\in\mathbb{R}\} \\ & = & \{y\cdot(-1,1,0)+z\cdot(-1,0,1) \mid y\in\mathbb{R} \texttt{ ET } z\in\mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((-1,1,0),\ (-1,0,1)\right) \end{array}$$

- Déterminons $E_5(f)$.

$$\begin{array}{rcl} u\in E_5(f) & \iff & (f-5\,\mathrm{id})(u)=0_E \\ & \iff & (A-5\,I_3)\,U=0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \underset{\substack{L_2\leftarrow 2\,L_2+\,L_1 \\ L_3\leftarrow 2\,L_3+\,L_1}}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array}\right. \\ & \underset{L_1\leftarrow 3\,L_1+L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcl} -6\,x & & & = & -6\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array}\right. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} E_5(f) & = & \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid u\in E_5(f)\} \\ & = & \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z \texttt{ ET } y=z\} \\ & = & \{(z,z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\} \\ & = & \{z\cdot(1,1,1) \mid z\in\mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right) \end{array}$$

3. • La famille $\mathscr{F}_1=((-1,1,0),(-1,0,1))$ est :

× génératice de $E_2(f)$,

× libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_2(f)$.
Ainsi, $\dim(E_2(f))=2$.

• La famille $\mathscr{F}_2=((1,1,1))$ est :

× génératice de $E_5(f)$,

× libre car constituée d'un vecteurs non nul.

C'est donc une base de $E_5(f)$.
Ainsi, $\dim(E_5(f))=1$.

Ainsi :

$$\dim(E_2(f))+\dim(E_5(f))=3=\dim(\mathbb{R}^3)$$

L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

4. Notons $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Notons $\mathscr{B}'=((1,1,1),(-1,1,0),(-1,0,1))$.
$\mathscr{B}'$ est une base car est obtenue par concaténation de :

- $\mathcal{F}_1=\Big((-1,1,0),(-1,0,1)\Big)$ famille libre (car constituée de deux vecteurs propres non colinéaires) de vecteurs propres associés à la valeur propre 2.
- $\mathcal{F}_2=\Big((1,1,1)\Big)$ famille libre (car constituée d'un vecteur non nul) d'un vecteur propre associé à la valeur propre 5.

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & \\
A & & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

La matrice P est obtenue en remarquant :

- $(1,1,1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$,
- $(-1,1,0) = (-1) \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$,
- $(-1,0,1) = (-1) \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$,

On détermine P^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $L_3 \leftarrow 2\ L_3 - L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La matrice réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls. On en déduit que P est inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow 2\ L_1 + L_2$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

Ainsi, P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl}
A^n & = & P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
& = & \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
& = & \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & -2^n & -2^n \\ 5^n & 2^n & 0 \\ 5^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
& = & \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}
\end{array}$$

6. On remarque que la matrice A^n est symétrique.
Rappelons que, si $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
Par une récurrence immédiate, on a donc : ${}^t(A^n) = ({}^tA)^n$.
Et comme ${}^tA = A$, on a enfin : ${}^t(A^n) = A^n$. □

III.2.c) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Théorème 16.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est diagonalisable} \\ f \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow f = \lambda \, \mathrm{id}_E$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ est diagonalisable} \\ A \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = \lambda \, I_n$$

Démonstration.

2)($\Leftarrow$) Si $A = \lambda \, I_n$ alors A est une matrice diagonale.
Elle est donc notamment diagonalisable.

($\Rightarrow$) Si A est diagonalisable alors il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.
Comme A n'a qu'une seule valeur propre : $D = \lambda I_n$.
Et ainsi :

$$A = P(\lambda \, I_n)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda \, I_n$$

□

Remarque

- Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer, par l'absurde, qu'une matrice n'ayant qu'une valeur propre λ n'est pas diagonalisable.
- Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais son usage est fréquent dans les énoncés. Il faut donc connaître la démonstration.

Exercice

Soit E un ev de dimension 3 (par exemple $E = \mathbb{R}^3$).

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Dans la suite, on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Si $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Si $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

1. La matrice M est triangulaire supérieure.
Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(M) = \{3, 4, 5\} = \mathrm{Sp}(f)$$

- E est un espace vectoriel de dimension 3.
- L'endomorphisme f possède 3 valeurs propres disctinctes.

On en déduit que f est diagonalisable.

Ainsi, il existe une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\underset{M}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)}} = \underset{P}{\underset{\shortparallel}{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}} \; \underset{D}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)}} \; \underset{P^{-1}}{\underset{\shortparallel}{P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}}$$

2. La matrice M est triangulaire supérieure.
Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(M) = \{7\}$$

Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
Il existe alors une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7\ I_3$$

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ M & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

Ainsi :

$$M = P(7\ I_3)P^{-1} = 7\ PP^{-1} = 7\ I_3$$

Absurde ! Ainsi, f n'est pas diagonalisable. □

III.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques

Définition *(Matrice symétrique)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- La matrice A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$.
- Autrement dit, A est **symétrique** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Théorème 17.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Il existe une base dans laquelle la matrice représentative de f est symétrique $\Rightarrow$ *f est diagonalisable*

2) *Cas des matrices carrées*

A est symétrique $\Rightarrow$ *A est diagonalisable*

Démonstration.
Admis. □

Remarque

- Ce résultat n'a rien à faire dans un cours sur les applications linéaires. C'est un résultat qui provient du cours sur les applications bilinéaires, chapitre qui n'est pas au programme de la section ECE.
- Il faut donc utiliser ce résultat comme une recette qu'on applique bêtement.
- Ainsi, dès qu'on rencontre une matrice A symétrique, il faut avoir le réflexe de dire qu'elle est diagonalisable. On note cependant que ce résultat ne dit `RIEN` sur les valeurs propres et les espaces propres de A.

Exercice

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. a) La matrice A est-elle inversible ?

b) En déduire une valeur propre de A.

3. a) Calculer A^2.

b) Déterminer alors un polynôme annulateur de A.

4. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f.

5. a) Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

b) Que représentent la matrice P ?

c) Déterminer P^{-1}.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n ?