Couples de v.a. discrètes : HEC 2010

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q=1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. ***a)*** Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}\big(\{X_1 \leqslant k\}\big)$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1+X_2)$, $\mathbb{V}(X_1+X_2)$, $\mathbb{E}(X_1-X_2)$, $\mathbb{V}(X_1-X_2)$.

c) Établir la relation : $\mathbb{P}\big(\{X_1 = X_2\}\big) = \dfrac{p}{1+q}$.

2. ***a)*** Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$. En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $\{Z=k\} \cup \{T=k\} = \{X_1=k\} \cup \{X_2=k\}$.
En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}\big(\{T=k\}\big) = 2\ \mathbb{P}\big(\{X_1=k\}\big) - \mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big)$.

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \dfrac{q\ \left(2q^2+q+2\right)}{\left(1-q^2\right)^2}$.

3. ***a)*** Préciser $(T-Z)(\Omega)$.
Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'événement $\{Z=j\} \cap \{Z=T\}$ en fonction des événements $\{X_1=j\}$ et $\{X_2=j\}$. En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}\big(\{Z=j\} \cap \{Z=T\}\big)$.

b) Montrer que pour tout couple (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}\big(\{Z=j\} \cap \{T-Z=l\}\big) = 2\ p^2\ q^{2j+l-2}$.

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}\big(\{X_1-X_2=k\}\big) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1-X_2|$.

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

4. ***a)*** À l'aide du résultat de la question ***3.e***, calculer $\mathrm{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'événement $\{Z=j\}$.

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'événement $\{Z=j\}$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.