Couples de v.a. discrètes : HEC 2010

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

8. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}(\{X_1 \leqslant k\})$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } X_1 \sim \mathcal{G}(p), \text{ alors : } \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X_1 \leqslant k\}) = 1 - q^k.}$$

Commentaire

- L'énoncé insiste bien sur la non nécessité d'une démonstration, notamment pour les valeurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{P}(\{X_1 \leqslant k\})$. Celles-ci ne sont pas un attendu du programme, mais c'est une propriété très classique de la loi géométrique. Elle doit donc être connue et on se doit de savoir la redémontrer.
- Rappelons maintenant la démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Notons : $\{X_1 \leqslant k\} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{X_1 = i\}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 \leqslant k\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{X_1 = i\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{X_1 = i\}) && \textit{(les événements } \{X_1 = i\} \textit{ étant incompatibles)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} && \textit{(car } X_1 \sim \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= p \sum_{i=0}^{k-1} q^i = p\, \frac{1-q^k}{1-q} && \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\
&= 1 - q^k
\end{aligned}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent une variance (et donc une espérance) en tant que combinaisons linéaires de v.a.r. qui en admettent une.
- Par linéarité de l'espérance :
  × tout d'abord : $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{p}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{p}}$$

× ensuite : $\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} = 0.$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 - X_2) = 0}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} = 2\,\frac{q}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1 + X_2) = 2\,\frac{q}{p^2}}$$

- Comme les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes, par lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ le sont aussi. Ainsi :

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) = 2\,\frac{q}{p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1 - X_2) = 2\,\frac{q}{p^2}.}$$

Commentaire

Attention à l'erreur classique. Même si X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1 - X_2) \neq \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2)$$

□

c) Établir la relation : $\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = \frac{p}{1+q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\{X_1 = X_2\} = \{X_1 - X_2 = 0\}$.
- La famille $(\{X_2 = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = 0\}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 - X_2 = 0\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 - k = 0\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\})\ \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{k-1}\ p\,q^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} = p^2\,\frac{1}{1-q^2} && \textit{(car } q^2 \in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} = \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = \frac{p}{1+q}}$$

□

9. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  - × Déterminons d'abord : $\mathbb{P}(\{Z > k\})$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z > k\}) &= \mathbb{P}(\{X_1 > k\} \cap \{X_2 > k\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 > k\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 > k\}) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \big(1 - \mathbb{P}(\{X_1 \leqslant k\}\big)\ \big(1 - \mathbb{P}(\{X_2 \leqslant k\}\big) \\
&= \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)\big)\ \big(\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\
&= q^k\, q^k \ = \ \left(q^2\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z > k\}) = \left(q^2\right)^k}$$

  - × De plus :

$$\begin{aligned}
\{Z > k-1\} &= \{Z \geqslant k\} && \textit{(car } Z \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= \{Z = k\} \cup \{Z > k\}
\end{aligned}$$

Les événements $\{Z = k\}$ et $\{Z > k\}$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}(\{Z > k-1\}) = \mathbb{P}(\{Z = k\}) + \mathbb{P}(\{Z > k\})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{Z = k\}) = \mathbb{P}(\{Z > k-1\}) - \mathbb{P}(\{Z > k\}).}$$

  - × Deux cas se présentent alors :
    - si $k \geqslant 2$, alors $(k-1, k) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. D'où, d'après le 1^{er} point :

$$\mathbb{P}(\{Z = k\}) = \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k = \left(q^2\right)^{k-1} (1 - q^2)$$

    - si $k = 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z = 1\}) &= \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(\{Z > 1\}) && \textit{(car } Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*\textit{)} \\
&= 1 - \left(q^2\right)^1 \ = \ 1 - q^2
\end{aligned}$$

Or, on remarque :

$$\left(q^2\right)^{1-1} (1 - q^2) = 1 - q^2$$

La formule précédente reste donc valide pour $k = 1$.

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(\{Z = k\}) = \left(q^2\right)^{k-1} (1 - q^2) = \Big(1 - (1 - q^2)\Big)^{k-1}\ (1 - q^2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right).}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-q^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{1 - (1 - q^2)}{(1-q^2)^2} = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}.}$$

- Enfin, comme $T + Z = X_1 + X_2$, alors :

$$T = X_1 + X_2 - Z$$

La v.a.r. T admet donc une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\
&= \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{2}{1-q} - \frac{1}{(1-q)(1+q)} \\
&= \frac{2\,(1+q) - 1}{1-q^2} \ = \ \frac{1+2q}{1-q^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1+2q}{1-q^2}}$$

□

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $\{Z = k\} \cup \{T = k\} = \{X_1 = k\} \cup \{X_2 = k\}$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}(\{T = k\}) = 2\ \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) - \mathbb{P}(\{Z = k\})$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \omega \in \{Z = k\} \ \cup \ \{T = k\} \\
\Leftrightarrow \ & Z(\omega) = k \ \texttt{OU} \ T(\omega) = k \\
\Leftrightarrow \ & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_1(\omega)$ alors, $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ et :

$$\begin{aligned}
& \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\
\Leftrightarrow \ & X_2(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_1(\omega) = k
\end{aligned}$$

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$, alors :

$$\begin{aligned}
& \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\
\Leftrightarrow \ & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \omega \in \{Z = k\} \ \cup \ \{T = k\} \\
\Leftrightarrow \ & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k \\
\Leftrightarrow \ & \omega \in \{X_1 = k\} \ \cup \ \{X_2 = k\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \{Z = k\} \cup \{T = k\} = \{X_1 = k\} \cup \{X_2 = k\}}$$

- De plus :
  - × D'une part :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{Z = k\} \cup \{T = k\}) & = & \mathbb{P}(\{Z = k\}) + \mathbb{P}(\{T = k\}) - \mathbb{P}(\{Z = k\} \cap \{T = k\}) \\ & = & \mathbb{P}(\{Z = k\}) + \mathbb{P}(\{T = k\}) - \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}) \end{array}$$

  En effet, on peut démontrer en procédant comme en début de question que :

$$\{Z = k\} \cap \{T = k\} \ = \ \{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}$$

  - × D'autre part :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cup \{X_2 = k\}) & \\ = & \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) + \mathbb{P}(\{X_2 = k\}) - \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}) & \\ = & 2\ \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) - \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\}) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \end{array}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{ll} & \mathbb{P}(\{Z = k\} \ \cup \ \{T = k\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \ \cup \ \{X_2 = k\}) \\ \text{d'où} & \mathbb{P}(\{Z = k\}) + \mathbb{P}(\{T = k\}) - \cancel{\mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\})} \ = \ 2\ \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) - \cancel{\mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\})} \\ \text{et} & \mathbb{P}(\{T = k\}) \ = \ 2\ \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) - \mathbb{P}(\{Z = k\}) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{T = k\}) \ = \ 2\ \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) - \mathbb{P}(\{Z = k\})}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demander de « justifier l'égalité » et non de la démontrer. Cette nuance signifie généralement que des points seront attribués même pour une explication avec les mains.
- Il est pratique pour conclure que de dire que les événements $\{T = k\}$ et $\{Z = k\}$ (resp. $\{X_1 = k\}$ et $\{X_2 = k\}$) sont incompatibles. Mais on ne peut en aucun cas affirmer une telle chose !
  Il peut exister $\omega \in \Omega$ tel que $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k$ et $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k$.
  Cela se produit pour tout $\omega \in \Omega$ tel que : $X_1(\omega) = X_2(\omega) = k$.

□

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. $T = X_1 + X_2 - Z$ admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.

- Par définition du moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}(\{T=k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \big(2\,\mathbb{P}(\{X_1=k\}) - \mathbb{P}(\{Z=k\})\big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}(\{X_1=k\}) - \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}(\{Z=k\}) \\
&= 2\ \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Z^2) \\
&= 2\ \big(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2\big) - \big(\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2\big) && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
&= 2\ \left(\frac{q}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2\right) - \left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \left(\frac{1}{1-q^2}\right)^2\right) && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
&= 2\ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{T \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(T^2) = 2\ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \\
&= \left(2\ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}\right) - \left(\frac{1+2q}{1-q^2}\right)^2 \\
&= 2\ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2} - \frac{1+4q+4q^2}{(1-q^2)^2} \\
&= 2\ \frac{q+1}{p^2} - \frac{2+4q+5q^2}{(1-q^2)^2} \\
&= 2\ \frac{q+1}{(1-q)^2} - \frac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
&= 2\ \frac{(q+1)(1+q)^2}{(1-q)^2\ (1+q)^2} - \frac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
&= \frac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2\ (1+q)^3 - (2+4q+5q^2)\big) \\
&= \frac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2\ (1+3q+3q^2+q^3) - (2+4q+5q^2)\big) \\
&= \frac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2} \big(2q+q^2+2q^3\big) \ = \ \frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de connaître la formule de Kœnig-Huygens dans les deux sens.

$$\begin{array}{rrcl} \text{L'écriture} & \mathbb{V}(X_1) & = & \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \\ \text{fournit l'égalité} & \mathbb{E}(X_1^2) & = & \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2 \end{array}$$

  C'est cette dernière égalité qui est utilisée dans la démonstration.
- On pouvait aussi calculer $\mathbb{V}(T)$ en s'aidant de l'égalité :

$$T + Z \;=\; X_1 + X_2$$

  En effet :

$$\mathbb{V}(T+Z) \;=\; \mathbb{V}(X_1+X_2) \;=\; \frac{2\ q}{p^2}$$

  Par ailleurs :

$$\mathbb{V}(T+Z) \;=\; \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(Z) + 2\ \mathrm{Cov}(T,Z)$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(T) & = & \dfrac{2\ q}{p^2} - \mathbb{V}(Z) - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \\ & = & \dfrac{2\ q}{p^2} - \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \end{array}$$

  Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Cov}(T,Z) & = & \mathbb{E}(TZ) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) & \\ & = & \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) & \textit{(car } TZ = X_1X_2 \textit{ (*))} \\ & = & \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \dfrac{1}{p}\ \dfrac{1}{p} - \dfrac{1+2q}{1-q^2}\ \dfrac{1}{1-q^2} & \\ & = & \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1+2q}{(1-q^2)^2} & \end{array}$$

  ((*) $TZ = \max(X_1,X_2)\ \min(X_1,X_2) = X_1\ X_2$*)*
  En combinant tous ces résultats, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(T) & = & \dfrac{2\ q}{p^2} - \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1+2q}{(1-q^2)^2}\right) \\ & = & \dfrac{2\ (q-1)}{p^2} + \dfrac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ & = & \dfrac{2\ (q-1)}{(1-q)^2} + \dfrac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ & = & \dfrac{1}{(1-q^2)^2}\left(2\ (q-1)(1+q)^2 - q^2 + 4q + 2\right) \\ & = & \dfrac{1}{(1-q^2)^2}\ \left(2q + q^2 + 2q^3\right) \;=\; \dfrac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2} \end{array}$$

□

10. a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $\{Z = j\} \cap \{Z = T\}$ en fonction des évènements $\{X_1 = j\}$ et $\{X_2 = j\}$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{Z = T\})$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.
  Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors :

$$\begin{array}{rcl} (X_1 - X_2)(\Omega) & = & \{X_1(\omega) - X_2(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subset & \{i - j \mid (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2\} \ = \ \mathbb{Z} \end{array}$$

  Ainsi, $(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}$.

$$\boxed{(T - Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \{Z = j\} \ \cap \ \{Z = T\} & = & \{\min(X_1, X_2) = j\} \ \cap \ \{\min(X_1, X_2) = \max(X_1, X_2)\} \\ & = & \{\min(X_1, X_2) = j\} \ \cap \ \{\max(X_1, X_2) = j\} \\ & = & \{X_1 = j\} \ \cap \ \{X_2 = j\} \end{array}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \{Z = j\} \ \cap \ \{Z = T\} = \{X_1 = j\} \ \cap \ \{X_2 = j\}}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{Z = j\} \ \cap \ \{Z = T\}) & = & \mathbb{P}(\{X_1 = j\} \ \cap \ \{X_2 = j\}) & \\ & = & \mathbb{P}(\{X_1 = j\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_2 = j\}) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p \ q^{j-1} \times p \ q^{j-1} \ = \ p^2 \ q^{2j-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{Z = j\} \ \cap \ \{Z = T\}) = p^2 \ q^{2j-2}}$$

□

b) Montrer que pour tout couple (j, l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T - Z = l\}) = 2p^2 q^{2j+l-2}$.

Démonstration.

- Soit $(j, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl} \{Z = j\} \ \cap \ \{T - Z = l\} & = & \{Z = j\} \ \cap \ \{T - j = l\} \\ & = & \{Z = j\} \ \cap \ \{T = j + l\} \\ & = & \{\min(X_1, X_2) = j\} \ \cap \ \{\max(X_1, X_2) = j + l\} \\ & = & \big(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 = j + l\}\big) \ \cup \ \big(\{X_1 = j + l\} \cap \{X_2 = j\}\big) \end{array}$$

  Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \big(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 = j + l\}\big) \ \cap \ \big(\{X_1 = j + l\} \cap \{X_2 = j\}\big) \\ = & \big(\{X_1 = j\} \cap \{X_1 = j + l\}\big) \cap \big(\{X_2 = j\} \cap \{X_2 = j + l\}\big) \\ = & \varnothing \ \cap \ \varnothing \ = \ \varnothing \quad \textit{(car } l \neq 0\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{Z=j\} \ \cap \ \{T-Z=l\}) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,\{X_1=j\}\cap\{X_2=j+l\}\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,\{X_1=j+l\}\cap\{X_2=j\}\,\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\,\{X_1=j\}\,\big)\times\mathbb{P}(\{X_2=j+l\}\,\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\,\{X_1=j+l\}\,\big)\times\mathbb{P}\big(\,\{X_2=j\}\,\big) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépdendantes)} \\
= \ & p\ q^{j-1}\times p\ q^{j+l-1} \ + \ p\ q^{j+l-1}\times p\ q^{j-1} \\
= \ & p^2\ q^{2j+l-2}+p^2\ q^{2j+l-2} \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (j,l)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}(\{Z=j\} \ \cap \ \{T-Z=l\})=2\ p^2\ q^{2j+l-2}}$$

□

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\{X_1-X_2=k\})=\dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

Démonstration.
Soit $k\in\mathbb{Z}$. Trois cas se présentent.

- Si $k=0$:

$$\mathbb{P}(\{X_1-X_2=k\})=\mathbb{P}(\{X_1-X_2=0\})=\mathbb{P}(\{X_1=X_2\})=\frac{p}{1+q}=\frac{pq^0}{1+q}$$

- Si $k>0$:
La famille $(\{X_2=i\})_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1-X_2=k\}) \ &= \ \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{X_2=i\} \ \cap \ \{X_1-X_2=k\}) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{X_2=i\} \ \cap \ \{X_1-i=k\}) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{X_2=i\} \ \cap \ \{X_1=i+k\}) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{X_2=i\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_1=i+k\}) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \ \times \ p\ q^{i+k-1} \\
&= \ p^2\ q^k\sum_{i=1}^{+\infty}q^{2i-2} \ = \ p^2\ q^k\sum_{i=1}^{+\infty}\left(q^2\right)^{i-1} \\
&= \ p^2\ q^k\sum_{i=0}^{+\infty}\left(q^2\right)^{i} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \ p^2\ q^k\ \frac{1}{1-q^2} \ = \ p^{\cancel{2}}\ q^k\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} \quad \textit{(car } q^2\in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \ \frac{p\ q^k}{1+q} \ = \ \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

- Si $k < 0$:

  On procède de la même manière que dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = k\}) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = i\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_1 = i+k\}) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \in \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = i\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_1 = i+k\}) & \\
& & + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \notin \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = i\}) \ \times \ \cancel{\mathbb{P}(\{X_1 = i+k\})} & \textit{(}\{X_1 = i+k\} = \varnothing \ \textit{car } i+k \notin \mathbb{N}^*\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = i\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_1 = i+k\}) & \left(\textit{car} \quad \begin{array}{rl} & i+k \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & i \geqslant -k+1 \end{array}\right) \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} p \ q^{i-1} \ \times \ p \ q^{i+k-1} & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p \ q^{i-k-1} \ \times \ p \ q^{i-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2 \ q^{-k} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & \dfrac{p^2 \ q^{-k}}{(1-q)(1+q)} \ = \ \dfrac{p \ q^{|k|}}{1+q} & \textit{(en procédant comme au point précédent)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \ \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = k\}) = \frac{p \ q^{|k|}}{1+q}}$$

□

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.

$$\boxed{(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord :

$$\{ \ |X_1 - X_2| = k\} \ = \ \{X_1 - X_2 = k\} \ \cup \ \{X_1 - X_2 = -k\}$$

  Deux cas se présentent :

  × si $k \neq 0$, alors les événements $\{X_1 - X_2 = k\}$ et $\{X_1 - X_2 = -k\}$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{ \ |X_1 - X_2| = k\}) & = & \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = k\}) + \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = -k\}) & \\
& = & \dfrac{p \ q^k}{1+q} + \dfrac{p \ q^k}{1+q} \ = \ 2 \ \dfrac{p \ q^k}{1+q} & \textit{(car } |k| = k\textit{)}
\end{array}$$

  × si $k = 0$:

$$\mathbb{P}(\{ \ |X_1 - X_2| = 0\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = 0\}) \ = \ \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(\{ \ |X_1 - X_2| = k\}) = 2 \ \frac{p \ q^k}{1+q} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{ \ |X_1 - X_2| = 0\}) = \frac{p}{1+q}}$$

□

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in Z(\Omega),\ \forall l \in (T-Z)(\Omega),\ \mathbb{P}(\{Z=j\} \cap \{T-Z=l\}) \ = \ \mathbb{P}(\{Z=j\}) \times \mathbb{P}(\{T-Z=l\})$$

avec $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $(T-Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Comme $T - Z = |X_1 - X_2|$, alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{Z=j\}) \times \mathbb{P}(\{T-Z=l\}) & = & \mathbb{P}(\{Z=j\}) \times \mathbb{P}(\{|X_1-X_2|=l\}) & \\
& = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times 2 \ \dfrac{p\ q^l}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times 2\ \dfrac{p\ q^l}{\cancel{1+q}} & \\
& = & q^{2j-2}\ p \times 2p\ q^l \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2} & \\
& = & \mathbb{P}(\{Z=j\} \ \cap \ \{T-Z=l\}) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)}
\end{array}$$

- Il reste à étudier le cas où $j \in \mathbb{N}^*$ et $l = 0$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{Z=j\}) \times \mathbb{P}(\{T-Z=0\}) & = & \mathbb{P}(\{Z=j\}) \times \mathbb{P}(\{|X_1-X_2|=0\}) & \\
& = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times \dfrac{p}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times \dfrac{p}{\cancel{1+q}} & \\
& = & q^{2j-2}\ p \times p \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \\
& = & \mathbb{P}(\{Z=j\} \ \cap \ \{T-Z=l\}) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Les variables } Z \text{ et } T-Z \text{ sont donc indépendantes.}}$$

□

11. a) À l'aide du résultat de la question ***10.e)***, calculer $\text{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après la question ***10.e)***, les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes. On en déduit :

$$\text{Cov}(Z, T-Z) = 0$$

Or, par linéarité gauche de l'opérateur Cov :

$$\underbrace{\text{Cov}(Z,T-Z)}_{0} \ = \ \text{Cov}(Z,T) \ - \ \underbrace{\text{Cov}(Z,Z)}_{\mathbb{V}(Z)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Cov}(Z,T) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}}$$

- Comme $q \neq 0$, $\text{Cov}(Z,T) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\rho(Z,T) & = & \dfrac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
& = & \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \ = \ \dfrac{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(Z)}}{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
& = & \sqrt{\dfrac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2}}} \ = \ \sqrt{\dfrac{q^2}{\cancel{(1-q^2)^2}}\ \dfrac{\cancel{(1-q^2)^2}}{q\ (2+q+2q^2)}} \\
& = & \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}}
\end{array}$$

$$\boxed{\rho(Z,T) = \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}}}$$

□

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

Démonstration.

- On rappelle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Trois cas se présentent :
  × si $i < j$: alors $\{Z = j\} \cap \{T = i\} = \varnothing$.
  En effet, $Z = \min(X_1, X_2) \leqslant \max(X_1, X_2) = T$.

$$\boxed{\text{Si } i < j,\ \mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = i\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

  × si $i = j$: alors $\{Z = j\} \cap \{T = j\} = \{X_1 = j\} \cap \{X_2 = j\}$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = j\}) & = & \mathbb{P}(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 = j\}) & \\
& = & \mathbb{P}(\{X_1 = j\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 = j\}) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = j\}) \ = \ p^2\ q^{2j-2}}$$

  × si $i > j$: alors $\{Z = j\} \cap \{T = i\} = (\{X_1 = j\} \cap \{X_2 = i\}) \cup (\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\})$.

$$\begin{array}{cll}
& \mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = i\}) & \\
= & \mathbb{P}\big(\ (\{X_1 = j\} \cap \{X_2 = i\}) \cup (\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\})\ \big) & \\
= & \mathbb{P}(\{X_1 = j\} \cap \{X_2 = i\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) & \textit{(car } \{X_1 = j\} \cap \{X_2 = i\} \textit{ et } \{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\} \textit{ sont incompatibles)} \\
= & \mathbb{P}(\{X_1 = j\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 = i\}) + \mathbb{P}(\{X_1 = i\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 = j\}) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
= & p\ q^{j-1} \times p\ q^{i-1} + p\ q^{i-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j,\ \mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = i\}) \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2}.}$$

□

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $\{Z = j\}$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T = i\}) = \frac{\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = i\})}{\mathbb{P}(\{Z = j\})} = \frac{\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = i\})}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)}$$

La loi du couple (Z, T) étant donnée par cas, trois cas se présentent encore ici :

× si $i < j$: alors $\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = i\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } i < j,\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T = i\}) = 0.}$$

× si $i = j$: alors $\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = j\}) = p^2\ q^{2j-2}$.

$$\mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T = j\}) = \frac{\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = j\})}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)} = \frac{p^2\ \cancel{q^{2j-2}}}{\cancel{(q^2)^{j-1}}\ (1 - q^2)} = \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} = \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T = j\}) = \frac{p}{1+q}}$$

× si $i > j$: alors $\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = i\}) = 2\ p^2 q^{i+j-2}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T = i\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{Z = j\} \cap \{T = j\})}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)} \\ &= \frac{2\ p^2\ q^{i+j-2}}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)} \\ &= \frac{2\ p^2 \cancel{q^{j-2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{q^{j-2}}\ (1 - q^2)} \\ &= \frac{2\ p^{\cancel{2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{(1-q)}\ (1+q)} \\ &= \frac{2\ p\ q^i}{q^j (1+q)} = \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j,\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T = i\}) = \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q}.}$$

□

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $\{Z = j\}$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Démonstration.

- La v.a.r. D_j admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T = i\})$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{llllll} & \sum\limits_{i=1}^{N} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T=i\}) & & & & \\ = & \sum\limits_{i=1}^{j-1} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T=i\}) & + \sum\limits_{i=j}^{j} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T=i\}) & + \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T=i\}) & & \textit{(par relation de Ch} \\ & & & & & \textit{en supposant } N > j \\ = & 0 & + \dfrac{p}{1+q} & + \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \dfrac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q} & & \textit{(d'après la question} \\ & & & & & \textit{précédente)} \end{array}$$

- Étudions en particulier la somme de droite :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ \dfrac{2\ p\ q^{i-j}}{1+q} & = & \dfrac{2\ p}{1+q} \sum\limits_{i=j+1}^{N} i\ q^{i-j} & \\ & = & \dfrac{2\ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i\ q^{(i+j)-j} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \dfrac{2\ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i\ q^{i} \ = \ \dfrac{2\ p\ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i\ q^{i-1} & \end{array}$$

On reconnaît la somme partielle (d'ordre $N-j$) d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in]-1,1[$. Elle est donc convergente.

- Ainsi, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T=i\})$ est convergente et par passage à la limite :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T=i\}) & = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2\ p\ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ q^{i-1} \\ & = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2\ \cancel{p}\ q}{1+q}\ \dfrac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}} \\ & = & \dfrac{1}{(1+q)(1-q)} \left(p\ (1-q) + 2\ q\right) \\ & = & \dfrac{1}{1-q^2} \left((1-q)^2 + 2\ q\right) \ = \ \dfrac{1+q^2}{1-q^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{La variable } D_j \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(D_j) = \dfrac{1+q^2}{1-q^2}}$$

□

Commentaire

- Dans cette question, on détermine $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\ \mathbb{P}_{\{Z=j\}}(\{T=i\})$. Cette écriture est très proche de l'écriture de $\mathbb{E}(T)$: on a simplement remplacé ici l'application probabilité $\mathbb{P}$ par l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{Z=j\}}$. Autrement dit, on détermine l'espérance de T sachant que l'événement $\{Z=j\}$ est réalisé.
- Cet objet est relativement classique en mathématiques. Il s'agit de l'espérance conditionnelle de la variable T relativement à l'événement $\{Z=j\}$. Elle se note : $\mathbb{E}(T \mid \{Z=j\})$.
(cette notation n'est pas très heureuse au vu de celle des probabilités conditionnelles)
- On peut noter que ces calculs d'espérances conditionnelles permettent de déterminer l'espérance. Sous réserve d'existence des objets considérés :
$$\mathbb{E}(T) \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z=j\})\ \mathbb{E}(T \mid \{Z=j\})$$
Il faut considérer cette égalité comme une formule des probabilités totales (qui est à la base de ce résultat) adaptée à la notion d'espérance.