Chaînes de Markov : quelques exercices

Exercice 1 *(d'après* `EDHEC 2010`*)*
Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - × soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - × soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1.

2. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\mathbb{P}\big(\{X_k = i\}\big)$.

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{\{X_k=j\}}\big(\{X_{k+1} = i\}\big)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b) On admet que $(\{X_k = 1\}, \{X_k = 2\}, \{X_k = 3\})$ est un système complet d'évènements.
Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = AU_0$.

d) Vérifier : $A = M + \dfrac{1}{3}\, I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

e) En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(\{X_k = 2\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_k = 3\}\big) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

f) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

g) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

Exercice 2 *(d'après* `EDHEC 2017`*)*

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.
On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{X_2 = 1\}) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(\{X_2 = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 4\}) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. ***a)*** Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\})\right)$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(\{X_n = 1\})+\mathbb{P}(\{X_n = 2\})+\mathbb{P}(\{X_n = 3\})+\mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \frac{1}{3}$$

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. ***a)*** En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\}) = \frac{1}{3}\ \left(\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\})\right)$$

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\})$ et $\mathbb{P}(\{X_n = 2\})$.

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 3\}) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 4\}) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) \end{pmatrix}$$

7. a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

c) En déduire la première ligne de A^n.

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10. a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Exercice 3 *(d'après* `ESSEC-I 2011`*)*
Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.

- Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B).
- Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du $n^{\text{ème}}$ jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.
On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $\mathbb{P}\big(\{X_0 = a\}\big) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

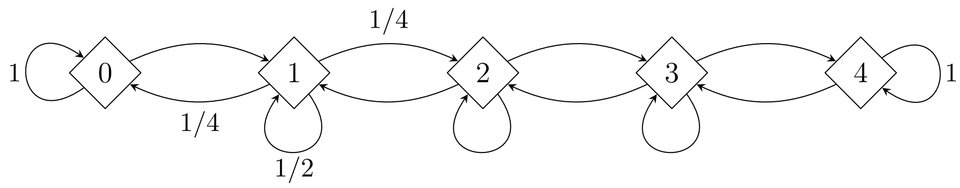
1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

b) Justifier : si i et j dans $[\![0, 4]\!]$ sont tels que $|i-j| \geqslant 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

c) Établir : $p_{1,0} = p_{1,2} = \frac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \frac{1}{2}$.

d) De la même façon, donner pour tout $(i, j) \in [\![0, 4]\!]^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$,

et pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) \end{pmatrix}$.

a) Pour tout entier naturel n, établir la relation : $U_{n+1} = M\,U_n$.
En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité : $U_n = M^n\,U_0$.

b) Montrer que M admet trois valeurs propres distinctes α, β et γ, vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < 1$.

Justifier qu'il existe une matrice carrée P d'ordre 3 inversible, que l'on ne demande pas de préciser, et D une matrice diagonale d'ordre 3, à préciser, telles que $P^{-1}MP = D$.

c) En déduire que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, la suite $\Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 0$.

3. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big)\Big) = 1$.
Comment interpréter ce résultat ?

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jour.

4. Soit n un entier naturel.

a) Établir les trois relations :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \quad \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], \quad \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = 1 - \frac{2k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

b) En déduire la relation, si $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\ \pi_{n,k-1} + \big(m(m-1) - 2k(m-k)\big)\ \pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\ \pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$

5. ***a)*** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. On définit l'évènement V_A (respectivement V_B) suivant : « au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B) ».

a) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big)$ et $\mathbb{P}(V_B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$.

b) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1$.
Que signifie ce résultat ?

7. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

a) Justifier : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

b) Exprimer $\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in [\![1, m-1]\!]$.

c) Comparer $\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$.

d) En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = 0$.

e) Montrer que la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a.

8. Montrer que $\mathbb{P}(V_A) = \dfrac{a}{m}$ et interpréter ce résultat.