Chaînes de Markov : quelques exercices

Exercice 1 *(d'après* `EDHEC 2010`*)*
Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - × soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - × soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

Commentaire

Étudions sur un exemple les différents objets définis dans l'énoncé.
L'expérience consiste à effectuer des tirages successifs avec remise dans une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3. Les résultats possibles de l'expérience sont donc des ∞-tirages.
Considérons l'∞-tirage $\omega = (2, 3, 3, \ldots)$.
(on ne décrit ici que les premières étapes)

- Les numéros des boules piochées dans l'urne ont donc été successivement : 2, puis 1, puis 3.
- Comme la première boule piochée porte le numéro 2, alors, d'après l'énoncé, la v.a.r. X_1 prend cette valeur 2.
- La valeur de X_1 est 2, différente de 1. Deux cas se présentent alors :
  - × si la boule piochée au $2^{\text{ème}}$ tirage vaut également 2, alors X_2 prendra la valeur 2,
  - × si la boule piochée au $2^{\text{ème}}$ tirage est de numéro distinct de 2, alors X_2 prendra la valeur 1.

  La deuxième boule piochée porte le numéro $3 \neq 2$. On en déduit que la v.a.r. X_2 prend la valeur 1.
- La v.a.r. X_2 prend la valeur 1 et la troisième boule piochée porte le numéro 3. On en déduit que la v.a.r. X_3 prend la valeur 3.
- Finalement, le 3-tirage $(2, 3, 3)$ réalise l'événement $\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 3\}$.

La difficulté de cet exercice réside dans la potentielle confusion des différents niveaux d'étude de cette expérience :

× celui des ∞-tirages ($\omega \in \Omega$),
× celui des variables aléatoires (X_1, X_2, X_3, ...),
× celui des événements.

1. Reconnaître la loi de X_1.

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 3 issues numérotées de 1 à 3.
- La v.a.r. X_1 correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket).}$$

□

2. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\mathbb{P}(\{X_k = i\})$.

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{\{X_k=j\}}(\{X_{k+1} = i\})$, pour tout couple (i,j) de $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$.

Démonstration.

- Si l'événement $\{X_k = 1\}$ est réalisé, c'est que, après le $k^{\text{ème}}$ tirage, la v.a.r. X_k prend la valeur 1. On procède alors au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage : on pioche au hasard parmi les 3 boules de l'urne (numérotées de 1 à 3). La v.a.r. X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce tirage.

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } i \in \{1,2,3\} : \ \mathbb{P}_{\{X_k=1\}}(\{X_{k+1} = i\}) = \frac{1}{3}.}$$

- Si l'événement $\{X_k = 2\}$ est réalisé, c'est que la v.a.r. X_k prend la valeur 2, différente de 1. On procède alors au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage :
  - × l'événement $\{X_{k+1} = 1\}$ est réalisé si et seulement si la v.a.r. X_{k+1} prend la valeur 1, c'est-à-dire si on a tiré une boule de numéro différent de 2 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage (donc de numéro 1 ou 3).

$$\boxed{\text{Le tirage étant effectué de manière équiprobable : } \mathbb{P}_{\{X_k=2\}}(\{X_{k+1} = 1\}) = \frac{2}{3}.}$$

  - × l'événement $\{X_{k+1} = 2\}$ est réalisé si et seulement si la v.a.r. X_{k+1} prend la valeur 2, c'est-à-dire si on a tiré la boule numéro 2 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{\{X_k=2\}}(\{X_{k+1} = 2\}) = \frac{1}{3}.}$$

  - × l'événement $\{X_{k+1} = 3\}$ si et seulement si la v.a.r. X_{k+1} prend la valeur 3. Il n'est donc jamais réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{\{X_k=2\}}(\{X_{k+1} = 3\}) = 0.}$$

- Si l'événement $\{X_k = 3\}$ est réalisé, c'est que la v.a.r. X_k prend la valeur 3, différente de 1. On procède alors au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage :
  - × l'événement $\{X_{k+1} = 1\}$ est réalisé si et seulement si la v.a.r. X_{k+1} prend la valeur 1, c'est-à-dire si on a tiré une boule de numéro différent de 3 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage (donc de numéro 1 ou 2).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{\{X_k=3\}}(\{X_{k+1} = 1\}) = \frac{2}{3}.}$$

  - × l'événement $\{X_{k+1} = 2\}$ si et seulement si la v.a.r. X_{k+1} prend la valeur 2. Il n'est donc jamais réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{\{X_k=3\}}(\{X_{k+1} = 2\}) = 0.}$$

  - × l'événement $\{X_{k+1} = 3\}$ est réalisé si et seulement si la v.a.r. X_{k+1} prend la valeur 3, c'est-à-dire si on a tiré la boule numéro 3 lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}_{\{X_k=3\}}(\{X_{k+1} = 3\}) = \frac{1}{3}.}$$

□

b) On admet que $\big(\{X_k = 1\}, \{X_k = 2\}, \{X_k = 3\}\big)$ est un système complet d'événements.
Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = A\,U_k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La famille $([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3])$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{cllll} & \mathbb{P}(\{X_{k+1} = 1\}) & & & \\ = & \mathbb{P}(\{X_k = 1\} \cap \{X_{k+1} = 1\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k = 2\} \cap \{X_{k+1} = 1\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k = 3\} \cap \{X_{k+1} = 1\}) \\ = & \mathbb{P}(\{X_k = 1\})\, \mathbb{P}_{\{X_k=1\}}(\{X_{k+1} = 1\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k = 2\})\, \mathbb{P}_{\{X_k=2\}}(\{X_{k+1} = 1\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k = 3\})\, \mathbb{P}_{\{X_k=3\}}(\{X_{k+1} = 1\}) \\ = & \dfrac{1}{3} \times \mathbb{P}(\{X_k = 1\}) & + \ \dfrac{2}{3} \times \mathbb{P}(\{X_k = 2\}) & + \ \dfrac{2}{3} \times \mathbb{P}(\{X_k = 3\}) \end{array}$$

La deuxième égalité est obtenue en admettant : $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\mathbb{P}(\{X_k = i\}) \neq 0$.

- De même :

$$\begin{array}{rllll}
& \mathbb{P}(\{X_{k+1}=2\}) & & & \\
= & \mathbb{P}(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=2\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=2\}\cap\{X_{k+1}=2\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=3\}\cap\{X_{k+1}=2\}) \\
= & \mathbb{P}(\{X_k=1\})\,\mathbb{P}_{\{X_k=1\}}(\{X_{k+1}=2\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=2\})\,\mathbb{P}_{\{X_k=2\}}(\{X_{k+1}=2\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=3\})\,\mathbb{P}_{\{X_k=3\}}(\{X_{k+1}=2\}) \\
= & \dfrac{1}{3}\times\mathbb{P}(\{X_k=1\}) & + \ \dfrac{1}{3}\times\mathbb{P}(\{X_k=2\}) & + \ 0\times\mathbb{P}(\{X_k=3\})
\end{array}$$

- Et enfin :

$$\begin{array}{rllll}
& \mathbb{P}(\{X_{k+1}=3\}) & & & \\
= & \mathbb{P}(\{X_k=1\}\cap\{X_{k+1}=3\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=2\}\cap\{X_{k+1}=3\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=3\}\cap\{X_{k+1}=3\}) \\
= & \mathbb{P}(\{X_k=1\})\,\mathbb{P}_{\{X_k=1\}}(\{X_{k+1}=3\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=2\})\,\mathbb{P}_{\{X_k=2\}}(\{X_{k+1}=3\}) & + \ \mathbb{P}(\{X_k=3\})\,\mathbb{P}_{\{X_k=3\}}(\{X_{k+1}=3\}) \\
= & \dfrac{1}{3}\times\mathbb{P}(\{X_k=1\}) & + \ 0\times\mathbb{P}(\{X_k=2\}) & + \ \dfrac{1}{3}\times\mathbb{P}(\{X_k=3\})
\end{array}$$

- En écrivant ces égalités matriciellement, on obtient :

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(\{X_{k+1}=1\})\\ \mathbb{P}(\{X_{k+1}=2\})\\ \mathbb{P}(\{X_{k+1}=3\})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(\{X_k=1\})\\ \mathbb{P}(\{X_k=2\})\\ \mathbb{P}(\{X_k=3\})\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, en posant } A = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}, \text{ on obtient : } \forall k\in\mathbb{N}^*, U_{k+1} = A\ U_k..}$$

□

c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k\ U_0$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : U_k = A^k U_0$.
  - ▸ **Initialisation** :
    - × D'une part : $U_1 = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(\{X_1=1\})\\ \mathbb{P}(\{X_1=2\})\\ \mathbb{P}(\{X_1=3\})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, d'après la question ***1.***
    - × D'autre part : $A^1\ U_0 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - ▸ **Hérédite** : soit $k\in\mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $U_{k+1} = A^{k+1}\,U_0$).

$$\begin{array}{rcll}
U_{k+1} & = & A\ U_k & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\
& = & A\times A^k\ U_0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& = & A^{k+1}\ U_0 &
\end{array}$$

    D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $U_k = A^k\ U_0$.
- De plus : $A^0\ U_0 = I_3\ U_0 = U_0$.

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N},\ U_k = A^k\ U_0$.

Commentaire

La question ***3.b)*** établit un résultat pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour pouvoir utiliser ce résultat dans l'hérédité, on commence la récurrence au rang $k = 1$.

□

d) Vérifier que $A = M + \dfrac{1}{3}\, I$ où M est une matrice à déterminer, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A - \frac{1}{3}\, I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient : $A = M + \dfrac{1}{3}\, I$.

- Les matrices $\dfrac{1}{3} \cdot I$ et M commutent, car la matrice identité commute avec toutes les matrices du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.
- Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^k &= \left(M + \frac{1}{3}\, I\right)^k \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3} I\right)^{k-j} \times M^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} I^{k-j} \times M^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \qquad \textit{(car : } \forall n \in \mathbb{N},\ I^n = I\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.

□

e) On admet : $M = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{X_k = 1\}) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X_k = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_k = 3\}) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

Démonstration.

- Commençons par déterminer P^{-1} en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left.\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\ \right|\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

On effectue l'opération $\left\{\ L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_3\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{\ L_1 \leftarrow 4\,L_1 + L_2\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

  La première colonne de A^k est obtenue par le produit : $A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus, d'après la question précédente :

$$A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Commentaire

Afin de travailler sur la première (resp. deuxième, resp. troisième) colonne de la matrice A^k, on a multiplié à droite par la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Cette technique peut être adaptée à un travail sur les lignes. En multipliant A^k à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$), on réucpère la première (resp. deuxième, resp. troisième) ligne de A^k. Cette technique était déjà présente dans l'épreuve `EDHEC 2017`, `2018`, `EML 2019` ou encore `HEC 2019`. On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :

$$L \quad A \quad C$$

qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes,tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une opération sur les (C)olonnes.

- Soit $j \in [\![0, k]\!]$. On détermine ensuite $M^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× Tout d'abord, par récurrence immédiate : $M^j = PD^jP^{-1}$.

× De plus : $D^j = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

× Ainsi :

$$\begin{aligned} M^j \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= P\,D^j\,P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\cdot P\,D^j \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}P\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j \\ -\left(\frac{2}{3}\right)^j \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall j \in [\![0,k]\!],\ M^j\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On pouvait bien évidemment déterminer complètement la matrice M^j. On obtenait alors :

$$M^j = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j & 2\left(\frac{2}{3}\right)^j - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j & 2\left(\frac{2}{3}\right)^j - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \left(\frac{2}{3}\right)^j + \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}$$

Les calculs étaient cependant bien plus longs et fastidieux.

- On rappelle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (A^k)_{1,1} \\ (A^k)_{2,1} \\ (A^k)_{3,1} \end{pmatrix} &= A^k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{j}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{k}\binom{j}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(A^k)_{1,1} &= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \times \left(2 \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2 \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j \quad + \quad \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^k \quad + \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^k && \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{(A^k)_{1,1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k}$$

- De la même manière :

$$(A^k)_{2,1} = (A^k)_{3,1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^k - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\boxed{(A^k)_{2,1} = (A^k)_{3,1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k}$$

- Enfin, d'après la question ***3.c)*** :

$$U^k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_k=1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_k=2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_k=3\}) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix}$$

(multiplier à droite par U_0 permet de sélectionner la première colonne de A^k)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{X_k=1\}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X_k=2\}) = \mathbb{P}(\{X_k=3\}) = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k.}$$

□

f) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

Démonstration.

- La variable aléatoire X_k est une variable aléatoire discrète finie. Elle admet donc une espérance.
- Par définition de l'espérance :

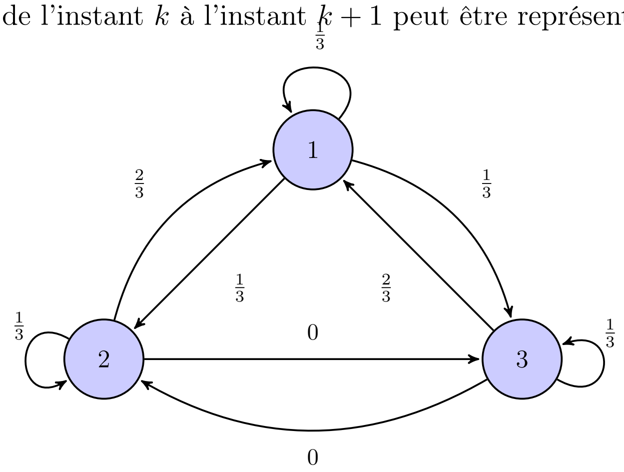
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k) &= 1 \times \mathbb{P}(\{X_k=1\}) + 2 \times \mathbb{P}(\{X_k=2\}) + 3 \times \mathbb{P}(\{X_k=3\}) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2}{4}-\frac{2}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{7}{4}-\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_k) = \frac{7}{4}-\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k}$$

□

Commentaire

- Le problème traite de l'évolution d'une grandeur aléatoire qui varie dans le temps discret. Plus précisément, il s'agit ici de l'évolution de la v.a.r. X_k. Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (*i.e.* la valeur de X_{k+1}) ne dépend du passé (valeurs de X_1 jusqu'à X_k) que par le présent (*i.e.* la valeur de X_k). On dit alors que (X_k) est une **chaîne de Markov**.
- L'évolution de la suite (X_k) de l'instant k à l'instant $k+1$ peut être représenté par le schéma suivant.



- On obtient un graphe possédant un nombre d'états fini (en l'occurrence 3).
  On dit que (X_k) est une chaîne de Markov **à espace d'états fini**.
- L'étiquette d'un arc est la probabilité pour la suite de v.a.r. (X_k) de passer de la valeur de départ à la valeur d'arrivée de l'instant k à l'instant $k+1$. Autrement dit, l'étiquette d'un arc menant de la position j à la position i a pour valeur : $\mathbb{P}_{\{X_k=j\}}(\{X_{k+1}=i\})$.
  Ces étiquettes ne dépendent pas de k.
  On dit que la chaîne de Markov est **homogène**.
- Le contenu de ce schéma peut être résumé par la matrice A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ A_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_k=j\}}(\{X_{k+1}=i\})$$

  Cette matrice est appelée **matrice de transition**. Ici :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

  On reconnaît la matrice A de l'énoncé.
- Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme (le terme « chaîne de Markov » est seulement présent dans la partie informatique). Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov. Le problème était, de ce point de vue, très classique.

Exercice 2 *(d'après* EDHEC 2017*)*

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1.

Démonstration.

- À l'instant 0, le mobile se trouve sur le sommet 1.
  Il peut alors se déplacer sur les sommets 2, 3 et 4.

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{2,3,4\}}$$

- De plus, ce choix se fait de manière équiprobable.
  Ainsi : $\mathbb{P}(\{X = 2\}) = \mathbb{P}(\{X = 3\}) = \mathbb{P}(\{X = 4\}) = \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 2,4 \rrbracket).}$$

- La v.a.r. X_1 est finie donc admet une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1) &= \sum_{k \in X_1(\Omega)} k\ \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) \\
&= 2\ \mathbb{P}(\{X_1 = 2\}) + 3\ \mathbb{P}(\{X_1 = 3\}) + 4\ \mathbb{P}(\{X_1 = 4\}) \\
&= \frac{1}{3}\ (2+3+4) \ = \ \frac{9}{3} \ = \ 3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_1 \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(X_1) = 3.}$$

Commentaire

- Rappelons que si $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, la v.a.r. X suit **la loi uniforme** sur $\llbracket a,b \rrbracket$ si :

  a) $X(\Omega) = \llbracket a,b \rrbracket$ ***b)*** $\forall k \in \llbracket a,b \rrbracket,\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{1}{b-a+1}$

- La v.a.r. X admet alors une espérance et une variance données par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}}$$

- Ici, $a = 2$ et $b = 4$. On retrouve bien : $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

□

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{X_2 = 1\}) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(\{X_2 = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 4\}) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega) = [\![1,4]\!]$.

▸ **Initialisation** :
D'après la question précédente, $X_1(\Omega) = [\![2,4]\!]$.
Trois cas se présentent alors pour le mobile à l'instant 1 :

– s'il est en position 2 : il peut se retrouver en position 1, 3 ou 4 à l'instant 2.
– s'il est en position 3 : il peut se retrouver en position 1, 2 ou 4 à l'instant 2.
– s'il est en position 4 : il peut se retrouver en position 1, 2 ou 3 à l'instant 2.

Toutes ces positions étant possibles, on obtient :

$$X_2(\Omega) = \{1,3,4\} \cup \{1,2,4\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4\}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![1,4]\!]$).

D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![1,4]\!]$.
En procédant, comme dans l'étape d'initialisation, par disjonction de cas, on obtient :

$$X_{n+1}(\Omega) = \{2,3,4\} \cup \{1,3,4\} \cup \{1,2,4\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4\}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)}$$

Commentaire

- Afin de déterminer formellement l'ensemble image $X_n(\Omega)$ d'une v.a.r. indicée par un entier n, il est classique de procéder à une récurrence. C'est une manière rigoureuse de présenter les choses et il faut y penser lorsque le résultat est donné dans l'énoncé.
- Ici, la question n'est pas : « Démontrer que $X_n(\Omega) = [\![1,4]\!]$ » mais de « donner, en justifiant », $X_n(\Omega)$. La réponse n'existant pas dans l'énoncé, donner la réponse démontre déjà un premier niveau de compréhension. Dans ce cas, une démonstration moins formelle que la récurrence est acceptable. Ici, il s'agit essentiellement de dire que les 4 sommets sont atteignables à l'instant 2 et qu'il en est donc de même aux instants suivants.

□

3. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\})\right)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente, $X_n(\Omega) = [\![1,4]\!]$.
On en déduit que $\Big(\{X_n = k\}\Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements.
- Ainsi, d'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = 1\}) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \times \mathbb{P}_{\{X_n = k\}}(\{X_{n+1} = 1\}) & \textit{(si, pour tout } k \in [\![1,4]\!], \\ & & & \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \neq 0\textit{)} \end{array}$$

- Or, d'après l'énoncé, pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$:

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{1}{3} \text{ si } k \neq 1 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1} = 1\}) = 0$$

En effet, si l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé, c'est que le mobile se trouve en position k à l'instant n.

– Si $k \neq 1$, le mobile a alors une probabilité $\frac{1}{3}$ d'atteindre le sommet 1 à l'instant suivant.

– Si $k = 1$, le mobile se déplace et ne peut se retrouver en position 1 à l'instant suivant.

- On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) \\ = \ & \cancel{\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \times \mathbb{P}_{\{X_n=1\}}(\{X_{n+1} = 1\})} + \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(\{X_{n+1} = 1\}) \\ = \ & \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \times \frac{1}{3} \ = \ \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\})}$$

Commentaire

- Afin de pouvoir écrire $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(\{X_{n+1} = 1\})$, il faut normalement s'assurer que $\mathbb{P}(\{X_n = k\}) \neq 0$. Ici, l'existence de $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(\{X_{n+1} = 1\})$ est justifiée par le paragraphe initial du sujet où l'on décrit la probabilité que le mobile se trouve en une certaine position à un instant connaissant sa position à l'instant précédent.
- La réponse est ici donnée dans l'énoncé. Il est donc tentant de faire de la rétro-ingénierie (partir du résultat pour essayer de trouver la démonstration). Ce n'est évidemment pas interdit mais parfois dangereux. En l'occurrence, on constate ici que $\mathbb{P}(\{X_n = 1\})$ est absent de la somme. La conclusion hâtive (et fausse si $n \geqslant 2$!) est alors de déclarer que $\Big(\{X_n = k\}\Big)_{k \in [\![2,4]\!]}$ est un système complet d'événements.

□

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Démonstration.

- Si $n = 0$: d'après l'énoncé, le mobile se trouve en position 1 à l'instant 0. Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{X_0 = 1\}) = 1 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(\{X_0 = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_0 = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_0 = 4\}) = 0$$

Ainsi : $\sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = 0$.
Comme le mobile se déplace, il ne peut se trouver en position 1 à l'instant 1 : $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) = 0$.

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } n = 0.}$$

- Si $n = 1$: dans ce cas, on peut refaire la démonstration précédente avec le système complet d'événements $\Big(\{X_1 = k\} \Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$. La seule différence est que cette famille contient l'événement impossible $\varnothing$. D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X_2 = 1\}) \\
= \; & \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = 1\}) \\
= \; & \cancel{\mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\})} + \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = 1\}) \quad \textit{(car } \{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} = \varnothing\textit{)} \\
= \; & \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) \times \mathbb{P}_{\{X_1 = k\}}(\{X_2 = 1\}) \\
= \; & \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_1 = k\})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } n = 1.}$$

Commentaire

Par définition, le système complet d'événements associé à X_1 est $\Big(\{X_1 = k\} \Big)_{k \in [\![2,4]\!]}$. En lui adjoignant $\{X_1 = 1\} = \varnothing$, la famille obtenue $\Big(\{X_1 = k\} \Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est toujours un système complet d'événements. Un système complet d'événements n'est donc pas forcément une partition de l'univers Ω (les ensembles formant une partition sont tous non vides).

□

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \mathbb{P}\left(\{X_{n+1} = 1\}\right) = -\frac{1}{3}\, \mathbb{P}\left(\{X_n = 1\}\right) + \frac{1}{3}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $\Big(\{X_n = k\} \Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements (qui contient éventuellement $\varnothing$ pour les cas $n = 0$ et $n = 1$). On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = 1$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_n = 1\})$$

  et d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) = \frac{1}{3}\left(1 - \mathbb{P}(\{X_n = 1\})\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = -\frac{1}{3}\, \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \frac{1}{3}}$$

□

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \mathbb{P}(\{X_n = 1\})$.
D'après la question précédente, la suite (u_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}\ u_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, (u_n) est arithmético-géométrique. On lui applique la méthode d'étude associée.

- L'équation de point fixe associé à la suite (u_n) est :

$$x = -\frac{1}{3}\ x + \frac{1}{3}$$

  Or : $x = -\dfrac{1}{3}\ x + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\ x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\cancel{3}}{4}\ \dfrac{1}{\cancel{3}}$.
  Ainsi, l'équation de point fixe admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rcrcrcrl} u_{n+1} & = & -\frac{1}{3} & \times & u_n & + & \frac{1}{3} & (L_1) \\ \lambda & = & -\frac{1}{3} & \times & \lambda & + & \frac{1}{3} & (L_2) \\ \text{et donc} \quad u_{n+1} - \lambda & = & -\frac{1}{3} & \times & (u_n - \lambda) & & & (L_1)-(L_2) \end{array}$$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times v_0 = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times (u_0 - \lambda) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\mathbb{P}(\{X_0 = 1\}) - \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

  On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = v_n + \lambda = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.}$$

Commentaire

La relation $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) = -\dfrac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \dfrac{1}{3}$ (question précédente) doit faire penser à une suite arithmético-géométrique. Cet aspect est mis en évidence par l'introduction de la notation $u_n = \mathbb{P}(\{X_n = 1\})$.

□

4. ***a)*** En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(\{X_{n+1} = 2\}\right) = \frac{1}{3}\ \left(\mathbb{P}\left(\{X_n = 1\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X_n = 3\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X_n = 4\}\right)\right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \geqslant 1$, la famille $\Big(\{X_n = k\}\Big)_{k \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements (qui contient $\varnothing$ si $n = 1$). D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\}) \\ = \ & \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = 2\}) \\ = \ & \cancel{\mathbb{P}(\{X_n = 2\} \cap \{X_{n+1} = 2\})} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = 2\}) \quad \textit{(car } \{X_n = 2\} \cap \{X_{n+1} = 2\} = \varnothing\textit{)} \\ = \ & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = 2\}) \\ = \ & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \times \mathbb{P}_{\{X_n = k\}}(\{X_{n+1} = 2\}) \ = \ \frac{1}{3} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\}) = \frac{1}{3}\ \left(\mathbb{P}\left(\{X_n = 1\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X_n = 3\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X_n = 4\}\right)\right)}$$

- Si $n = 0$, comme déjà vu :

$$\mathbb{P}(\{X_0 = 1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X_0 = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_0 = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_0 = 4\}) = 0$$

et $\mathbb{P}(\{X_1 = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_0 = 1\} \cap \{X_1 = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_0 = 1\}) \times \mathbb{P}_{\{X_0 = 1\}}(\{X_1 = 2\}) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{La relation est aussi vérifiée pour } n = 0.}$$

□

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}\left(\{X_{n+1} = 2\}\right)$ et $\mathbb{P}\left(\{X_n = 2\}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme vu précédemment :

$$\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = 1$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X_n = 2\})$$

  et d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\}) = \frac{1}{3} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \frac{1}{3}\ (1 - \mathbb{P}(\{X_n = 2\})) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\}) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \frac{1}{3}}$$

□

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $r_n = \mathbb{P}(\{X_n = 2\})$.
D'après la question précédente, la suite (r_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_{n+1} = -\frac{1}{3}\ r_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, (r_n) est arithmético-géométrique.
De plus, la relation vérifiée est la même que celle vérifiée pour (u_n).

- En appliquant la même méthode d'étude qu'en ***3.d)***, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times (r_0 - \lambda) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\mathbb{P}(\{X_0 = 2\}) - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

  où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a posé $w_n = r_n - \lambda$.

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r_n = w_n + \lambda = -\frac{1}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Commentaire

- Les suites (u_n) et (r_n) vérifiant la même relation de récurrence, il n'y a pas lieu de réécrire exactement la même démonstration.
- De manière générale, si un sujet demande de réaliser, à détails près, deux fois la même démonstration, il faut détailler précisément la méthode la première fois puis expliquer brièvement ce qui change dans la deuxième démonstration.

□

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 3\}) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 4\}) = -\frac{1}{3}\ \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \mathbb{P}(\{X_n = 3\})$ et $t_n = \mathbb{P}(\{X_n = 4\})$.
  Les suites (s_n) et (t_n) vérifient la même relation de récurrence que la suite (r_n).
  De plus, on a : $r_0 = s_0 = t_0 = 0$.
- On en déduit que ces suites sont égales.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) = \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

□

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Démonstration.

- La v.a.r. X_n est finie. Elle admet donc une espérance.
- De plus, d'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{E}(X_n) \\ = & \sum\limits_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \\ = & \sum\limits_{k=1}^{4} k \times \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \\ = & 1 \times \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + 2 \times \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + 3 \times \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + 4 \times \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) \qquad (\star) \\ = & \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + 4 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ = & \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) + (2+3+4) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ = & \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n \; = \; \frac{10}{4} - \frac{6}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

- Revenons au point $(\star)$. Rigoureusement, le passage de la deuxième égalité à la troisième n'est valide que lorsque $X_n(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, autrement dit pour $n \geqslant 2$.
  - Pour $n = 0$, $X_0(\Omega) = \{1\}$.
    Cependant, ajouter $k \times \mathbb{P}(\{X_n = k\})$ pour tout $k \in [\![2, 4]\!]$ n'a pas d'impact car toutes ces probabilités sont nulles.
  - Pour $n = 1$, $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.
    Cependant, ajouter $1 \times \mathbb{P}(\{X_n = 1\})$ n'a pas d'impact car cette probabilité est nulle. □

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) & \mathbb{P}(\{X_n = 4\}) \end{pmatrix}$$

7. a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le calcul $U_n\ A$ produit une matrice ligne à 4 colonnes.

- Le coefficient de la première colonne est :

$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}))$$

  D'après la question ***3.a)***, ce coefficient est : $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\})$.

- Le coefficient de la deuxième colonne est :

$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}))$$

D'après la question ***4.a)***, ce coefficient est : $\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\})$.

- Les coefficients des troisième et quatrième colonnes sont respectivement :

$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 4\}))$$

$$\frac{1}{3}\ (\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \mathbb{P}(\{X_n = 3\}))$$

En procédant de la même manière qu'aux questions ***3.a)*** et ***4.a)*** (on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\Big(\{X_n = k\}\Big)_{k\in[\![1,4]\!]}$ pour $n \geqslant 1$ et on vérifie la formule pour $n = 0$), on reconnaît les formules pour :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 3\}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{X_{n+1} = 4\})$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n\ A.}$$

□

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0\ A^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $U_n = U_0\ A^n$.

- **Initialisation** :
  Il suffit de remarquer : $U_0\ A^0 = U_0\ I = U_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $U_{n+1} = U_0\ A^{n+1}$).

$$\begin{array}{rcll} U_{n+1} & = & U_n\ A & \textit{(par définition)} \\ & = & U_0\ A^n\ A & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & U_0\ A^{n+1} & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

c) En déduire la première ligne de A^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On récupère la première ligne de la matrice A^n en la multipliant, à gauche, par $(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.
- Or : $U_0 = (\mathbb{P}(\{X_0 = 1\}) \quad \mathbb{P}(\{X_0 = 2\}) \quad \mathbb{P}(\{X_0 = 3\}) \quad \mathbb{P}(\{X_0 = 4\})) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.
- D'après la question précédente, $U_n = U_0\ A^n$.
  Ainsi, la première ligne de A^n n'est autre que U_n.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{La première ligne de } A^n \text{ est} \\ U_n = (\mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \quad \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \quad \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \quad \mathbb{P}(\{X_n = 4\})), \text{ à savoir :} \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). \end{array}}$$

□

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Démonstration.

- On récupère la deuxième ligne de la matrice A^n en la multipliant, à gauche, par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  Il faut donc considérer :
  $$U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_0 = 1\}) & \mathbb{P}(\{X_0 = 2\}) & \mathbb{P}(\{X_0 = 3\}) & \mathbb{P}(\{X_0 = 4\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  ce qui signifie que $\mathbb{P}(\{X_0 = 2\}) = 1$.

  En plaçant le mobile initialement en position 2, la multiplication $U_0\ A^n$ permet de récupérer la deuxième ligne de A^n.

  De même, on récupère la troisième ligne de A^n en considérant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à placer initialement le mobile en position 3.

  Enfin, on récupère la quatrième ligne de A^n en considérant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à placer initialement le mobile en position 4.

- Ces choix modifient les calculs faits en question ***3.d)***, ***4.c)*** et ***5***.
  Plus précisément, cela modifie les valeurs initiales des suites (u_n), (r_n), (s_n) et (t_n).
  Par exemple, pour le choix $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient :
  $$u_0 = 0 \qquad r_0 = 1 \qquad s_0 = 0 \qquad t_0 = 0$$
  Chacune de ces suites vérifie la même relation de récurrence.
  Seule la condition initiale (premier terme nul ou égal à 1) les différencie.
  - La question ***3.d)*** nous fournit le terme général pour une valeur initiale nulle.
  - La question ***4.c)*** nous fournit le terme général pour une condition initiale égale à 1.

  La deuxième ligne de A^n est :
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

  La troisième ligne de A^n est :
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

  La quatrième ligne de A^n est :
  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

□

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

Démonstration.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a alors :

$$\begin{aligned} a\, I + b\, J = A \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+b & b & b & b \\ b & a+b & b & b \\ b & b & a+b & b \\ b & b & b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ & & b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} a & & & = & -\frac{1}{3} \\ & & b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{3}\, I + \frac{1}{3}\, J}$$

Commentaire

- Il est assez classique (c'est le cas ici) que les premières questions d'une nouvelle partie soient très abordables. Il est conseillé de repérer ces questions au début de l'épreuve en passant quelques minutes à cocher les questions qui semblent les plus simples.
  On peut citer parmi celles-ci (liste non exhaustive) :
  - l'étude du problème pour des petites valeurs d'un paramètre considéré (question ***1.***),
  - du calcul (questions ***7.a)***, ***9.*** et ***10.a)***), des applications numériques, vérifier qu'une relation est vraie pour certaines valeurs d'un paramètre (question ***3.b)***),
  - les questions dont l'énoncé souffle la méthode à utiliser (questions ***3.a)*** et ***10.b)***),
  - les méthodes / questions classiques (questions ***3.d)*** et ***7.b)***).

  L'objectif est de ne pas sortir de la salle sans avoir traité ces questions. Il faut donc gérer son temps en conséquence.
- On retiendra que les questions d'un énoncé ne sont pas rangées dans un ordre croissant de difficulté. Il ne faut donc pas se décourager si on ne sait pas traiter une ou plusieurs questions d'affilée. Il faut au contraire s'accrocher : des questions plus simples apparaîtront.

□

10. a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1} J$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot J}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $J^k = 4^{k-1}\ J$.
  - **Initialisation** :
    D'une part : $J^1 = J$.
    D'autre part : $4^{1-1}\ J = 4^0\ J = J$.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $J^{k+1} = 4^k\ J$).

$$\begin{array}{rcll} J^{k+1} & = & J^k\ J & \\ & = & 4^{k-1}\ J\ J & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & 4^{k-1}\ J^2 & \\ & = & 4^{k-1}\ (4\ J) \ = \ 4^k\ J & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Les matrices $-\frac{1}{3}\ I$ et $\frac{1}{3}\ J$ commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll} \left(-\dfrac{1}{3}\ I + \dfrac{1}{3}\ J\right)^n & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \left(-\dfrac{1}{3}\ I\right)^{n-k} \left(\dfrac{1}{3}\ J\right)^k & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} I^{n-k} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k J^k & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k I^{n-k}\ J^k & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} J^k & \textit{(}I^{n-k}\ J^k = I\ J^k = J^k\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^{n-k}\ J^k & \\ & = & \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left(\dbinom{n}{0}(-1)^n J^0 \ + \ \sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^{n-k}\ J^k\right) & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n\ I \ + \ \sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^{k-1}\ J\right) & \textit{(car } J^k = 4^{k-1}\ J \textit{ pour } k \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n\ I \ + \ \dfrac{1}{4} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k\right)\ J\right) & \end{array}$$

- Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\ 4^k\right) - \binom{n}{0} (-1)^n\ 4^0$$
$$= (-1+4)^n - (-1)^n\ =\ 3^n - (-1)^n$$

- En réinjectant, on obtient :

$$\left(-\frac{1}{3}\ I + \frac{1}{3}\ J\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n\ I\ +\ \frac{1}{4}\ (3^n - (-1)^n)\ J\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^n\ I + \frac{1}{4}\ \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\ J$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n\ I + \frac{1}{4}\ \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\ J}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 0$.
L'argument $n \geqslant 0$ est donc suffisant pour découper la somme. On traite le cas $n \geqslant 1$ dans cette question pour s'assurer que la deuxième somme ne se fait pas sur un ensemble d'indices vide. Ceci permet d'assurer que k est et donc d'utiliser l'égalité : $J^k = 4^{k-1}\ J$.

□

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Démonstration.

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $\left(-\frac{1}{3}\right)^0\ I + \frac{1}{4}\ \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0\right)\ J\ =\ I + \frac{1}{4}(1-1)\ J\ =\ I.$

$$\boxed{\text{La relation précédente est valable pour } n = 0.}$$

□

Exercice 3 *(d'après* `ESSEC-I 2011`*)*
Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.

- Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m - a$ préférant le candidat B).
- Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du $n^{\text{ème}}$ jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.
On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $\mathbb{P}\big(\{X_0 = a\}\big) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord $p_{0,0} = 1$.
  - × Supposons que la veille d'un jour donné il y ait 0 personne souhaitant voter pour la personne A.
  - × Dans ce cas, il n'y a aucune personne dans le groupe des individus avec intention de voter pour A. Le lendemain, la rencontre est donc organisée entre :
    - un premier électeur choisi au hasard qui a pour intention de voter B.
    - un deuxième électeur choisi au hasard qui a aussi pour intention de voter B.

    De ce fait, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

  Finalement, le soir de ce jour, il y a toujours 0 personne ayant pour intention de voter A.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } p_{0,0} = 1.}$$

- Démontrons maintenant $p_{m,m} = 1$.
  - × Supposons que la veille d'un jour donné il y ait m personnes souhaitant voter pour la personne A.
  - × Dans ce cas, il n'y a aucune personne dans le groupe des individus avec intention de voter pour B. Le lendemain, la rencontre est donc organisée entre :
    - un premier électeur choisi au hasard qui a pour intention de voter A.
    - un deuxième électeur choisi au hasard qui a aussi pour intention de voter A.

    De ce fait, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

  Finalement, le soir de ce jour, il y a toujours m personnes ayant pour intention de voter A.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } p_{m,m} = 1.}$$

□

Commentaire

- Dans la rédaction, on fait le choix de conclure $p_{m,m} = 1$ en lieu et place de $p_{4,4} = 1$. Pour cette première question et celle qui suit, la valeur de m a peu d'importance. Elle en aura par contre dans les questions suivantes.
- Dans la définition de $p_{i,j}$, le jour considéré n'est pas identifié. Plus précisément, on ne parle pas du jour n mais d'un « jour donné » et pas du jour $n-1$ mais de « la veille ». Il y a une raison claire à cela : la probabilité $p_{i,j}$ que l'on étudie ne dépend pas du jour n mais uniquement du nombre d'individus qui compose chacun des deux groupes.
- On peut être encore plus précis en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathbb{P}_{\{X_0=i\}}\big(\{X_1 = j\}\big) \ = \ \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$$
C'est cette quantité indépendante de n qui est nommée $p_{i,j}$.
D'ailleurs, le concepteur aurait pu décider initialement de définir $p_{i,j}$ par :
$$p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_0=i\}}\big(\{X_1 = j\}\big)$$
puis faire remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$. Cette définition est certainement plus pratique pour mettre en place les rédactions usuelles. Par exemple :
  - × Si $\{X_0 = 0\}$ est réalisé, c'est qu'il y a initialement (le jour 0) 0 personne ayant l'intention de voter A.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_1 = 0\}$ est réalisé si et seulement si il y a 0 personne avec intention de voter A le soir du jour 1. Or, comme il n'y a pas d'individu ayant l'intention de voter A pour tenter de convaincre un individu de l'autre groupe, l'événement $\{X_1 = 0\}$ est forcément réalisé.
- Dans cet énoncé, on travaille sur l'évolution d'une grandeur aléatoire (le nombre d'individus ayant l'intention de voter A) qui varie dans le temps discret (au jour 0, puis au suivant, puis à celui d'après etc.). Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (*i.e.* la valeur de X_{n+1}, nombre d'individus ayant l'intention de voter A l'instant $n+1$) ne dépend du passé (nombre d'individus ayant l'intention de voter A les instant précédents) que par le présent (*i.e.* la valeur de X_n, nombre d'individus ayant l'intention de voter A l'instant n). On dit alors que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une **chaîne de Markov**. On peut par ailleurs préciser les points suivants :
  - × la grandeur évaluée (ici, le nombre d'électeurs souhaitant voter pour la personne A) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est à valeurs dans $[\![0, m]\!]$) appelées des **états** de la chaîne de Markov. Lorsque cette grandeur prend une valeur i un jour n donné, on dit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ entre dans l'état i à l'instant n.
  - × les états 0 et m sont dits **absorbants**. Si la chaîne de Markov entre dans l'état 0 (resp. m) un jour n donné, alors elle restera dans cet état les jours suivants. C'est précisément ce que l'on démontre dans la première question de l'énoncé : une fois l'état atteint, la chaîne de Markov n'en sort plus.
  - × comme on l'a vu lors de la discussion sur la définition de $p_{i,j}$, l'évolution de la chaîne de Markov est indépendante du jour n considéré. On dit alors que cette chaîne est **homogène**.

  Pour résumer, on a affaire dans cet énoncé à une **chaîne de Markov homogène ayant un ensemble fini d'états**. Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme (le terme « chaîne de Markov » est seulement présent dans la partie informatique). Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov. Le problème est, de ce point de vue, très classique.

b) Justifier : si i et j dans $[\![0,4]\!]$ sont tels que $|i-j| \geqslant 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

Démonstration.
Soit $(i,j) \in [\![0,m]\!]$.
Dans la suite, on appellera « groupe A (resp. B) » le groupe des électeurs ayant l'intention de voter pour A (resp. B).

- Supposons que la veille d'un jour donné il y ait i personnes dans le groupe A.
- Dans ce cas, une rencontre est organisée le lendemain entre deux individus du groupe d'électeurs. Deux cas se présentent alors :
  - × Le premier individu choisi a pour intention de voter A.
    Il rencontre alors un deuxième individu. Deux nouveaux cas se présentent.
    - Si le deuxième individu a pour intention de voter A alors il n'y a pas de changement des intentions de vote.
    - Si le deuxième individu n'a pas pour intention de voter A alors il est convaincu par le premier de changer son vote. Il y a donc, le soir de cette rencontre, une personne de plus ayant pour intention de voter A.
  - × Le premier individu choisi n'a pas pour intention de voter A.
    Il a donc pour intention de voter B. Il rencontre alors un deuxième individu. Deux nouveaux cas se présentent.
    - Si le deuxième individu a pour intention de voter A alors il il est convaincu par le premier de changer son vote. Il y a donc, le soir de cette rencontre, une personne de moins ayant pour intention de voter A.
    - Si le deuxième individu n'a pas pour intention de voter A alors la rencontre a lieu entre deux individus ayant pour intention de voter B. Dans ce cas, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

En résumé, si la veille d'un jour donné il y a i individus ayant pour intention de voter A, le lendemain soir, il y en aura soit $i-1$, soit i, soit $i+1$.
Autrement dit, entre la veille et le lendemain, le taille du groupe d'électeurs ayant pour intention de voter A varie d'au plus une personne.

$$\boxed{\text{On en conclut que si } |i-j| \geqslant 2, \text{ alors } p_{i,j} = 0.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » une propriété. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles. Mettre en avant l'argument qu'une personne au plus peut changer d'intention de vote lors de la rencontre entre les deux individus du groupe d'électeur suffit ici à obtenir l'ensemble des points alloués à la question.
- Dans les premières questions de l'énoncé, on procède à l'étude de l'expérience lorsque m prend une petite valeur (ici $m = 4$). Cela permet de pouvoir lister tous les cas possibles (comme on le verra en question ***1.d)***). Le but de ces premières questions est de se familiariser avec la modélisation proposée par l'énoncé. C'est pour un souci de bonne compéhension des mécanismes de l'expérience qu'on fait le choix de détailler la rédaction de cette question.
- De manière générale, il est toujours conseillé de prendre particulièrement soin à la rédaction en début d'épreuve afin de faire bonne impression auprès du correcteur et de le mettre dans de bonnes dispositions. En fin d'épreuve, le temps venant à manquer, on pourra relâcher un peu la rédaction afin de pouvoir traiter plus de questions.

□

c) Établir : $p_{1,0} = p_{1,2} = \frac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \frac{1}{2}$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in [\![0,m]\!]^2,\ p_{i,j} \ = \ \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$$

Afin de faciliter la rédaction, on désignera par la suite par le terme « groupe A (resp. B) » l'ensemble des individus ayant pour intention de voter pour le candidat A (resp. B).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si l'événement $\{X_{n-1} = 1\}$ est réalisé, c'est que le jour $n-1$, il y a seulement 1 individu dans le groupe A et $m-1 = 3$ individus dans le groupe B.
- Dans ce cas, l'événement $\{X_n = 0\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, plus aucun individu n'a pour intention de voter A. C'est le cas seulement si la rencontre entre les deux individus a modifié l'intention de vote de l'unique individu souhaitant voter A.

  Plus précisément, l'événement $\{X_n = 0\}$ est alors réalisé par tous les 2-tirages dont le premier élément est un numéro de $[\![0,4]\!]$ désignant un individu du groupe B et le deuxième est un numéro de $[\![0,4]\!]$ désignant un individu du groupe A.
  Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

  – le premier numéro de ce couple : 3 possibilités (car le groupe B est constitué de 3 personnes)

  – le deuxième numéro de ce couple : 1 possibilité (car le groupe A ne contient qu'une personne)

  Il y a donc 3 tels 2-tirages.
  Notons par ailleurs qu'il y a en tout 4×3 2-tirages différents (4 possibilités pour le premier individu choisi et 3 pour le deuxième). On en conclut :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=1\}}\big(\{X_n = 0\}\big) \ = \ \frac{\cancel{3} \times 1}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,0} = \frac{1}{4}.}$$

- On raisonne de même pour démontrer $p_{1,2} = \dfrac{1}{4}$. Il suffit de remarquer que si $\{X_{n-1} = 0\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 2\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 2 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A et le second au groupe B. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=1\}}\big(\{X_n = 2\}\big) \ = \ \frac{1 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,2} = \frac{1}{4}.}$$

- Il reste à démontrer $p_{1,1} = \dfrac{1}{2}$. Il suffit de remarquer que si $\{X_{n-1} = 0\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 2\}$ est réalisé si et seulement si le jour n, 1 seul individu a pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement il n'y a pas eu de changement d'intention de vote lors de la rencontre ce qui est le cas si les deux individus choisis appartiennent au groupe B. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=1\}}\big(\{X_n = 1\}\big) \ = \ \frac{\cancel{3} \times 2}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,1} = \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

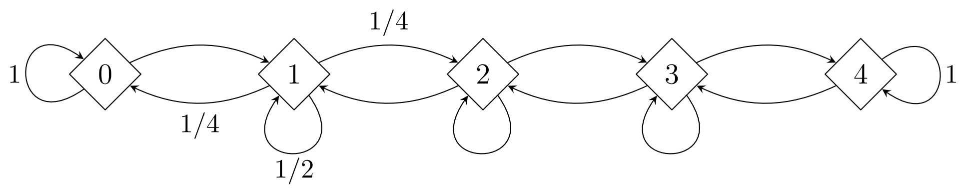
- Le sujet prend le parti de définir $p_{i,j}$ comme la probabilité que quelque chose se produise tout en omettant de définir cette probabilité dans un cadre formel. C'est un choix regrettable qui incite à une rédaction peu rigoureuse du type :

$$\text{« } p_{1,0} = \frac{1}{2} \text{ car c'est la probabilité de \dots »}$$

  Au contraire, il est conseillé de travailler sur les événements. C'est pourquoi on établit la définition formelle de $p_{i,j}$ en début de correction de cette question.
- Cette définition n'est pas si simple à comprendre : même si $p_{i,j}$ s'écrit sous la forme : $p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$, la quantité $p_{i,j}$ ne dépend pas du jour $n \in \mathbb{N}^*$ choisi. Le concepteur a certainement souhaité cacher cette subtilité. Ce faisant, on omet de mettre en avant le caractère **homogène** de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui, associée au caractère fini du nombre d'états considérés, est à l'origine de la formalisation matricielle qui va suivre.

$\square$

d) De la même façon, donner pour tout $(i, j) \in [\![0, 4]\!]^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons tout d'abord, la valeur de $p_{2,1} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 1\}\big)$.
  - × Si $\{X_{n-1} = 2\}$ est réalisé c'est que le jour $n - 1$, il y a 2 individus dans le groupe A et $m - 2 = 2$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_n = 1\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, seulement 1 individu a pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors de 2 personnes) et le second au groupe A (constitué aussi de deux personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 1\}\big) = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,1} = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons maintenant $p_{2,3} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 3\}\big)$.
  Si $\{X_{n-1} = 2\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 3\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 3 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A (constitué alors de 2 personnes) et le second au groupe B (constitué aussi de deux personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 3\}\big) = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,3} = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons enfin $p_{2,2} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 2\}\big)$.
  Comme la famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\sum_{j=0}^{4} \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = j\}\big) \ = \ 1$$

  Or :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{4} \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = j\}\big) &= p_{2,0} + p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} + p_{2,4} \\ &= p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} \\ &= \frac{1}{3} + p_{2,2} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

  *(car $p_{2,0} = 0 = p_{2,4}$ d'après la question **1.b)**)*

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,2} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons maintenant la valeur de $p_{3,2} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 2\}\big)$.
  - Si $\{X_{n-1} = 3\}$ est réalisé c'est que le jour $n-1$, il y a 3 individus dans le groupe A et $m - 3 = 1$ individus dans le groupe B.
  - Dans ce cas, l'événement $\{X_n = 2\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 2 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors d'une seule personne) et le second au groupe A (constitué de 3 personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 2\}\big) \ = \ \frac{1 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,2} = \frac{1}{4}.}$$

- Déterminons maintenant $p_{3,4} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 4\}\big)$.
  Si $\{X_{n-1} = 3\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 4\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 4 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A (constitué alors de 3 personnes) et le second au groupe B (constitué seulement d'une personne). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 4\}\big) \ = \ \frac{\cancel{3} \times 1}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,2} = \frac{1}{4}.}$$

- En remarquant comme précédemment que la famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements, on obtient, à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_{n-1}\}=3}$:

$$\cancel{p_{3,0}} + \cancel{p_{3,1}} + p_{3,2} + p_{3,3} + p_{3,4} \ = \ 1$$

  et donc :

$$p_{3,3} \ = \ 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,3} = \frac{1}{2}.}$$

- Enfin, il reste à déterminer $p_{0,1}$ et $p_{4,3}$.
  Là encore on utilise le fait que la famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j \in [\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements.
  À l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_{n-1}\}=0}$, on obtient :

$$p_{0,0} + p_{0,1} + \cancel{p_{0,2}} + \cancel{p_{0,3}} + p_{0,4} \;=\; 1$$

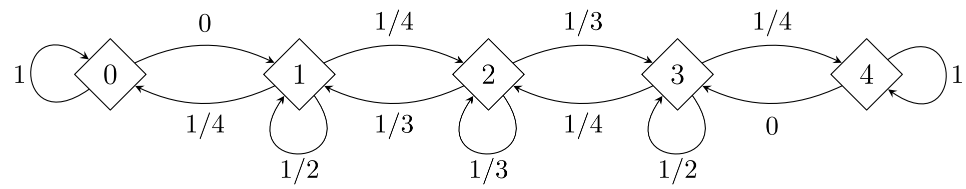
$$\boxed{\text{Et comme } p_{0,0} = 1 \text{ alors : } p_{0,1} = 0.}$$

En procédant de même :

$$\cancel{p_{4,0}} + \cancel{p_{4,1}} + \cancel{p_{4,2}} + p_{4,3} + p_{4,4} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Et comme } p_{4,4} = 1 \text{ alors : } p_{4,3} = 0.}$$

Finalement, on obtient le graphe suivant :



Commentaire

- L'énoncé n'explicite pas l'obtention du graphe. Il est sous-entendu que $p_{i,j}$ est l'étiquette de l'arête joignant le nœud i au nœud j. Ce graphe permet donc de visualiser les probabilités de passage d'un état à un autre. C'est un schéma classique lorsqu'on étudie une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini.
- L'énoncé demande de justifier « quelques cas ». Il aurait certainement été plus pertinent de demander de justifier les valeurs p_{2_1}, $p_{2,1}$ et $p_{2,3}$: cela suffit à démontrer que les techniques de démonstration associées à cette question sont comprises.
- On se sert une nouvelle fois dans cette question de la définition formelle :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$$

  Ce formalisme permet de rédiger le calcul de $p_{2,2}$ (par exemple) obtenu à l'aide des calculs précédents et en tirant parti du système complet d'événements associé à X_n.
- On pourrait introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. Y_n, nombre d'électeurs ayant l'intention de voter pour B le soir du jour n (on a évidemment : $Y_n = m - X_n$. En agissant ainsi, on définit une chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Si on laisse de côté l'initialisation le jour 0, on se rend compte qu'il y a une symétrie du problème : on ne change pas l'expérience en échangeant les rôles de A et B. Ainsi, on obtiendrait exactement le même graphe pour la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cela permet de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big) & = & \mathbb{P}_{\{Y_{n-1}=i\}}\big(\{Y_n = j\}\big) & = & \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=m-i\}}\big(\{X_n = m-j\}\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ p_{i,j} & & & & p_{m-i,m-j} \end{array}$$

  Cette propriété explique le caractère symétrique du graphe associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On aurait d'ailleurs pu exploiter cette propriété pour obtenir directement les valeurs $p_{3,2}$, $p_{3,3}$, $p_{3,4}$ à l'aide des valeurs $p_{1,4}$, $p_{1,3}$, $p_{1,2}$.

□

2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$,

et pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}$.

a) Pour tout entier naturel n, établir la relation : $U_{n+1} = M\, U_n$.
En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité : $U_n = M^n\, U_0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 1\}\big) &= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = 1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = 1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times p_{k,1} \\
&= \sum_{k=1}^{3} p_{k,1}\, \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \qquad \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) + 0 \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- En procédant de même (en utilisant le même système complet d'événements), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 2\}\big) &= \sum_{k=1}^{3} p_{k,2}\, \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \qquad \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\
&= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) \\
&= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- De même :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 3\}\big) &= \sum_{k=1}^{3} p_{k,3}\, \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \qquad \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\
&= 0 \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par définition du produit de matrice, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = M \times U_n.}$$

- Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $U_n = M^n\ U_0$.
  - ▶ **Initialisation** :
    On a : $M^0\ U_0 = I_3\ U_0 = U_0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $U_{n+1} = M^{n+1}\ U_0$).

$$\begin{array}{rcll} U_{n+1} & = & M \times U_n & \textit{(d'après la démonstration précédente)} \\ & = & M \times M^n\ U_0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & M^{n+1}\ U_0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n\ U_0.}$$

Commentaire

- On peut se demander s'il est utile, de rédiger la récurrence pour démontrer cette dernière propriété. La formule étant donnée dans l'énoncé, la rédaction apparaît comme nécessaire puisque constitue le cœur de la question. Si le concepteur avait opté pour la formulation :

  « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre U_n, M et U_0. »

  on aurait pu se passer de cette rédaction et simplement écrire :

  « Par une récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n\ U_0$. »

- Lors de l'étude d'une chaîne de Markov, on introduit généralement la matrice A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![0,m]\!]^2, A_{i+1,j+1} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=j\}}\big(\{X_n = i\}\big) = p_{j,i}$$

  (le premier état porte le numéro 0 *ce qui oblige à faire un décalage d'indice pour définir A)*

  On obtient ici :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est appelée **matrice de transition**.
  Elle permet de décrire l'évolution aléatoire de la grandeur considérée (on peut démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A\ U_n$ en ajoutant à U_n les probabilités $\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big)$).

- On peut remarquer que, pour chaque colonne j de la matrice de transition, la somme des coefficients vaut 1. Cela se démontre (comme dans la question ci-dessus), à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=j\}}$ et du système complet d'événements $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,4]\!]}$.
- Dans le sujet, on s'intéresse à une la matrice M, matrice extraite de la matrice de transition A. On perd ainsi la propriété énoncée ci-dessus. En contrepartie on obtient une matrice 3×3 qu'il est bien plus simple de manipuler. Et si en apparence ce choix de modélisation semble laisser de côté les états 0 et 4, on peut en réalité déduire des propriétés portant sur ces états comme en question ***3.***. Cette modélisation est donc particulièrement pertinente : à la fois plus simple mais permettant l'étude complète de la chaîne de Markov étudiée.

□

b) Montrer que M admet trois valeurs propres distinctes α, β et γ, vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < 1$.

Justifier qu'il existe une matrice carrée P d'ordre 3 inversible, que l'on ne demande pas de préciser, et D une matrice diagonale d'ordre 3, à préciser, telles que $P^{-1} M P = D$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$\lambda \text{ valeur propre de } M \quad \Leftrightarrow \quad M - \lambda\, I_3 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or on a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M - \lambda\, I_3) \quad &= \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{C_1 \leftarrow 4\,C_1 \\ C_2 \leftarrow 3\,C_2 \\ C_3 \leftarrow 4\,C_3}}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Commentaire

La matrice $M - \lambda\, I_3$ dont on cherche le rang fait apparaître des fractions. Afin de faciliter les futures manipulations, on les fait disparaître par des opérations sur les colonnes. Rappelons que le rang d'une matrice est invariant par transposition ($\forall M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\text{rg}(M) = \text{rg}\left({}^t M\right)$). Ainsi, lors d'un calcul de rang, les opérations sur les colonnes sont autorisés. Il est toutefois conseillé d'appliquer la succession d'opérations sur les lignes décrite par l'algorithme du pivot de Gauss et n'utiliser les opérations sur les colonnes que pour des cas spécifiques permettant d'alléger les calculs.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M - \lambda\, I_3) \quad &= \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,(1-2\,\lambda)\,L_1}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) & -2\,(1-2\,\lambda) \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\,\lambda \\ 0 & -2\,(1-2\,\lambda) & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \\ 0 & 2\,(1-2\,\lambda) & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\,\lambda \\ 0 & -2\,(1-2\,\lambda) & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \\ 0 & 0 & 2-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Remarquons enfin :

$$\begin{aligned}
2 - 2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \quad &= \quad 2\big(1 - (1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda)\big) \\
&= \quad 2\,\big(\cancel{1} - (\cancel{1} - 5\,\lambda + 6\,\lambda^2)\big) \\
&= \quad 2\,(5\,\lambda - 6\,\lambda^2) \ = \ 2\,\lambda\,(5 - 6\,\lambda)
\end{aligned}$$

- La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
  Elle (et donc $M - \lambda\, I$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.
  Ainsi :

$$\begin{aligned} M - \lambda\, I \text{ non inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = 0 \ \texttt{OU} \ -2\,(1-2\,\lambda) = 0 \ \texttt{OU} \ 2\,\lambda\,(5-6\,\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-2\,\lambda) = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ (5-6\,\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = \tfrac{1}{2} \ \texttt{OU} \ \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda = \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

  On pose alors $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{5}{6}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathrm{Sp}(M) = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ et } 0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < 1.}$$

- La matrice M est une matrice carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres distinctes.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ est diagonalisable.}}$$

  Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M = P\,D\,P^{-1}$.
  Plus précisément :
  × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de M,
  × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  On peut par exemple choisir : $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

  $$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telles que : } M = P\,D\,P^{-1}.}$$

Commentaire

- Il est à noter que l'ordre d'apparition dans la matrice D est dépendant du contenu de la matrice P : si la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est un élément de $E_\alpha(M)$ alors α apparaîtra en $j^{\text{ème}}$ colonne de D. On pouvait ainsi définir $3! = 6$ (nombre de manières de placer trois éléments différents dans trois cases) matrices diagonales différentes.
- L'égalité : $M = P\,D\,P^{-1}$ doit être comprise comme une formule de changement de base. Pour faire ce lien, il faut effectuer un travail sur les endomorphismes. Introduisons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Nommons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = M$.

  Comme M est diagonalisable, il en est de même de f. Ainsi, il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la représentation matricielle de f est une matrice diagonale. Les coefficients diagonaux de cette dernière matrice sont les valeurs propres de M (rappelons $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(M)$). On retrouve ainsi la matrice D.

  La formule de changement de base stipule :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P & \times & D & \times & P^{-1} \end{array}$$

□

c) En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, la suite $\Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $\big(\alpha^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\beta^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\gamma^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $k \in \{1, 2, 3\}$. Dans la suite, notons $P = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{i \in [\![1,3]\!] \\ j \in [\![1,3]\!]}}$ et $P^{-1} = \big(b_{i,j}\big)_{\substack{i \in [\![1,3]\!] \\ j \in [\![1,3]\!]}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcll} U_n & = & M^n\, U_0 & \textit{(d'après la question } \textbf{2.a)} \\ & = & \big(P\, D\, P^{-1}\big)^n\, U_0 & \textit{(d'après la question } \textbf{2.b)}\textit{)} \\ & = & P\, D^n\, P^{-1}\, U_0 & \textit{(par récurrence immédiate)} \end{array}$$

Rappelons alors : $U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_0 = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_0 = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_0 = 3\}) \end{pmatrix}$ et $\mathbb{P}\big(\{X_0 = a\}\big) = 1$.

Ainsi, seul l'un au plus des coefficients de U_0 est non nul.

- Deux cas se présentent alors :

  × si $a = 0$ ou $a = 4$ alors $U_0 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et ainsi $U_n = M^n\, 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \\ 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \\ 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \end{pmatrix}.}$$

  × si $a \in \{1, 2, 3\}$ alors U_0 est la matrice colonne dont le coefficient en colonne a vaut 1 et les autres coefficients valent 0. On en conclut :

$$P^{-1}\, U_0 \ = \ \begin{pmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ b_{3,a} \end{pmatrix}$$

Et finalement :
$$\begin{array}{rcl} U_n & = & P\, D^n\, P^{-1}\, U_0 \\ & = & P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ b_{3,a} \end{pmatrix} \\ & = & P \begin{pmatrix} b_{1,a}\, \alpha^n \\ b_{2,a}\, \beta^n \\ b_{3,a}\, \gamma^n \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} a_{1,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{1,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{1,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{2,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{2,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{2,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{3,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{3,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{3,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{1,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{1,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{2,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{2,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{2,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{3,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{3,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{3,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \end{pmatrix}.}$$

> Ainsi, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, la suite $\Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $\big(\alpha^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\beta^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\gamma^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Commentaire

Il y a fort à parier que donner la forme de D^n et conclure que les produits de matrices successifs vont fournir des combinaisons linéaires des coefficients de D^n suffit à obtenir l'intégralité des points alloués sur cette question. Mais une telle rédaction revient presque à paraphraser le résultat fourni dans la question. Finalement, en voulant éviter que les candidats aient à faire un calcul (pas si compliqué), la question devient soit triviale (on cite le résultat de l'énoncé), soit bien plus complexe (c'est la rédaction ci-dessus) qu'un bête calcul.

□

d) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ car $\alpha = 0$.
  - × $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta^n = 0$ car $\beta \in \,]0, 1[$.
  - × $\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma^n = 0$ car $\gamma \in \,]0, 1[$.
- Et ainsi, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on obtient à l'aide de la question précédente :
  - × si $a = 0$ ou $a = 4$:

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ = \ 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  - × si $a \in \{1, 2, 3\}$:

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ = \ a_{k,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{k,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{k,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \ \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \{1, 2, 3\},\ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 0.}$$

Commentaire

- Les questions d'un énoncé ne sont pas forcément rangées dans un ordre croissant de difficulté. Il ne faut donc pas se décourager si on ne sait pas traiter une ou plusieurs questions d'affilée. Il faut au contraire s'accrocher : des questions plus simples apparaîtront.
- Cette question est une parfaite illustration du point ci-dessus :
  - × elle est bien plus simple que les deux questions qui la précèdent.
  - × elle peut parfaitement être traitée en admettant le résultat des questions ***2.b)*** et ***2.c)***.

□

3. Établir : $\lim\limits_{n \to +\infty} \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big)\Big) = 1$.
Comment interpréter ce résultat ?

Démonstration.

- La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big) \ = \ 1$$

  Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big) \ = \ 1 - \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big)\Big) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \lim\limits_{n \to +\infty} \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big)\Big) = 1.}$$

- Comme $\{X_n = 0\}$ et $\{X_n = 4\}$ sont incompatibles, ce résultat se réécrit :

$$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\{X_n = 0\} \ \cup \ \{X_n = 4\}\right) \ = \ 1$$

  Ce résultat signifie, qu'à terme, X_n prendra la valeur 0 ou 4.

$$\boxed{\text{À terme, tous les électeurs auront la même intention de vote.}}$$

□

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jour.

4. Soit n un entier naturel.

a) Établir les trois relations :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = 1 - \frac{2k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

Démonstration.

- Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. Déterminons tout d'abord $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big)$.
  - × Si $\{X_n = k\}$ est réalisé c'est que le jour n, il y a k individus dans le groupe A et $m-k$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_{n+1} = k+1\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour $n+1$, $k+1$ individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si la rencontre entre les deux électeurs a fait passer un électeur du groupe B vers le groupe A.

    Plus précisément, l'événement $\{X_{n+1} = k+1\}$ est alors réalisé par tous les 2-tirages dont le premier élément est un numéro de $[\![0, m]\!]$ désignant un individu du groupe A et le deuxième est un numéro de $[\![0, m]\!]$ désignant un individu du groupe B.
    Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

    – le premier numéro de ce couple : k possibilités (car le groupe A est constitué de k personnes)

    – le deuxième numéro de ce couple : $m-k$ possibilités (car le groupe B est constitué de $m-k$ personnes)

    Il y a donc $k\,(m-k)$ tels 2-tirages.
    Notons par ailleurs qu'il y a en tout $m \times (m-1)$ 2-tirages différents (m possibilités pour le premier individu choisi et $m-1$ pour le deuxième). On en conclut :

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) \ = \ \frac{k \times (m-k)}{m \times (m-1)}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}.}$$

- Soit $k \in [\![1, m]\!]$. Déterminons maintenant la valeur de $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big)$.
  - × Si $\{X_n = k\}$ est réalisé c'est que le jour n, il y a k individus dans le groupe A et $m-k$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_{n+1} = k-1\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour $n+1$, $k-1$ individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors de $m-k$ personnes) et le second au groupe A (constitué de k personnes).

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big) \ = \ \frac{(m-k)\,k}{m\,(m-1)}.}$$

- Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$.
Comme la famille $\big(\{X_{n+1} = j\}\big)_{j \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements, on a, à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}$:

$$\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \; = \; 1$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \\
= \;& \sum_{j=0}^{k-2} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) + \sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) + \sum_{j=k+2}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \\
= \;& \sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) = 0 \textit{ dès que } |k-j| \geqslant 2\textit{)}
\end{aligned}$$

Cette dernière propriété a été démontrée en question ***1.b)***. En effet, on a :

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \; = \; p_{k,j} \; = \; 0 \qquad \text{dès que } |k-j| \geqslant 2$$

(d'un jour sur l'autre il y a au maximum un électeur qui change d'intention de vote)

Finalement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \; &= \; 1 - \Big(\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_n = k-1\}\big) + \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_n = k+1\}\big)\Big) \\
&= \; 1 - \left(\frac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)} + \frac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = 1 - 2\,\frac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)}.}$$

Commentaire

- L'absence de modélisation constatée dans les premières questions est corrigée dans cette partie. Cependant, il est décevant que le lien ne soit pas fait avec la première partie. À la lecture des relations à établir, il saute aux yeux que les résultats ne dépendent pas de n. C'est donc bien $p_{k,j}$ (pour $j \in \{k-1, k, k+1\}$) que l'on cherche à déterminer ici.
- Ne pas faire le lien entre les deux parties est fort regrettable. La question ***1.b)*** est énoncée dans un cadre restreint (pour $m = 4$) ce qui est tout à fait inutile comme on l'a déjà fait remarqué. De manière rigoureuse, on ne peut donc pas faire appel à ce résultat mais il faudrait le redémontrer.
- Le fait qu'il n'y ait pas d'articulation naturelle entre ces deux parties donne l'impression que la première partie a été ajoutée après coup. L'absence de modélisation et de généralisation (les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** n'ont pas à être énoncées dans un cadre restreint) la rend difficile et peu exploitable. C'est dommage car la deuxième partie est très bien construite et que le problème en lui-même est tout à fait intéressant.
- On remarque qu'on a abandonné la notation $p_{i,j}$. Il est à noter que l'une des difficultés des sujets du TOP3 est justement la gestion de notations nouvelles. Il faut donc s'habituer à ce type d'effort intellectuel et rester bien concentré.

□

b) En déduire la relation, si $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\;\pi_{n,k-1} + \big(m(m-1) - 2k(m-k)\big)\;\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\;\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$.

- La famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j\in[\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
  On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\{X_{n+1}=k\}\big) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n=j\}\cap\{X_{n+1}=k\}\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n=j\}\big)\times \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big) & \textit{(car pour tout } j\in[\![0,m]\!], \ \mathbb{P}\big(\{X_n=j\}\big)\neq 0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big)\times \pi_{n,j} & \textit{(par définition de } \pi_{n,j}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big)\times \pi_{n,j} & \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big)=0 \textit{ si } |j-k|\geqslant 2\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}_{\{X_n=k-1\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big)\times \pi_{n,k-1} & \\
& + & \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big)\times \pi_{n,k} & (*) \\
& + & \mathbb{P}_{\{X_n=k+1\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big)\times \pi_{n,k+1} &
\end{array}$$

- Or, d'après la question précédente : $\forall i\in[\![0,m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=i\}}\big(\{X_{n+1}=i+1\}\big) = \dfrac{i\,(m-i)}{m(m-1)}$.
  En utilisant cette relation en $i=k-1\in[\![0,m-2]\!] \subseteq [\![0,m-1]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k-1\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big) = \frac{(k-1)\big(m-(k-1)\big)}{m(m-1)}$$

- À l'aide de la deuxième relation de la question précédente, considérée en $i=k+1\in[\![2,m]\!] \subseteq [\![1,m]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k+1\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big) = \frac{(k+1)\big(m-(k+1)\big)}{m(m-1)}$$

- Enfin, la troisième relation donne, en $i=k\in[\![1,m-1]\!]$:

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1}=k\}\big) = 1-\frac{2k\,(m-k)}{m(m-1)} = \frac{m\,(m-1)-2k\,(m-k)}{m\,(m-1)}$$

En reportant ces trois éléments dans $(*)$, on obtient bien le résultat énoncé. □

5. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.

- **Initialisation** :
  Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. On a alors :
  × d'une part : $\pi_{0,k} = \mathbb{P}\big(\{X_0 = k\}\big) \leqslant 1$.
  × d'autre part : $\left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0 = 1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\ i.e.\ \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n+1,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}\right)$.
  Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. D'après la question précédente :

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\ \pi_{n,k-1} + \big(m(m-1) - 2k(m-k)\big)\ \pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\ \pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$

  Rappelons que par hypothèse de récurrence, on a : $\forall i \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,i} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.
  Trois cas se présentent.
  - Si $k = 1$ alors : $\pi_{n+1,1} = \dfrac{\big(m(m-1) - 2\,(m-1)\big)\ \pi_{n,1} + 2\,(m-2)\ \pi_{n,2}}{m(m-1)}$.
    × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = 1 \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :

$$\pi_{n,1} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

    × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = 2 \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :

$$\pi_{n,2} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

    Finalement, en notant $\alpha_m = \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1,1} &\leqslant \frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n \\
&= \left(\frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)} + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \\
&= \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n = \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

- Si $k = m-1$ alors : $\pi_{n+1,m-1} \; = \; \dfrac{(m-2)\, 2\; \pi_{n,m-2} + \big(m(m-1) - 2\,(m-1)\big)\; \pi_{n,m-1}}{m(m-1)}$.

  On procède comme dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{aligned}\pi_{n+1,m-1} &\leqslant \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\; \big(\alpha_m\big)^n + \frac{m(m-1)-2\,(m-1)}{m(m-1)}\; \big(\alpha_m\big)^n \\ &= \left(\frac{m(m-1)-2\,(m-1)}{m(m-1)} + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \; = \; \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

- Si $k \in [\![2, m-2]\!]$

  $\times$ En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k-1 \in [\![1, m-2]\!] \subseteq [\![1, m-1]\!]$, on obtient :

$$\pi_{n,k-1} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

  $\times$ En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k+1 \in [\![3, m-1]\!] \subseteq [\![1, m-1]\!]$, on obtient :

$$\pi_{n,k+1} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

  $\times$ En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

  Finalement, à l'aide de la formule générale, on obtient :

$$\begin{aligned}&\pi_{n+1,k} \\ \leqslant\; & \frac{(k-1)(m+1-k)}{m(m-1)}\; \big(\alpha_m\big)^n + \frac{m(m-1)-2k(m-k)}{m(m-1)}\; \big(\alpha_m\big)^n + \frac{(k+1)(m-1-k)}{m(m-1)}\; \big(\alpha_m\big)^n \\ =\; & \left(\frac{(k-1)(m+1-k)}{m(m-1)} + \frac{m(m-1)-2k(m-k)}{m(m-1)} + \frac{(k+1)(m-1-k)}{m(m-1)}\right)\; \big(\alpha_m\big)^n \\ =\; & \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \qquad (*) \\ =\; & \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

  Pour obtenir l'égalité $(*)$, on étudie de plus près le 1er et 3ème terme de la somme :

  (i) $(k-1)(m+1-k) \; = \; (k-1)\,\big((m-k)+1\big) \; = \; (k-1)\,(m-k) + (k-1)$

  (ii) $(k+1)(m-1-k) \; = \; (k+1)\,\big((m-k)-1\big) \; = \; (k+1)\,(m-k) - (k+1)$

  En sommant ces deux termes, on obtient :

$$\begin{aligned}& (k-1)\,(m-k) + (k-1) + (k+1)\,(m-k) - (k+1) \\ =\; & (m-k)\; \big((k-1) + (k+1)\big) + (k-1) - (k+1) \\ =\; & (m-k)\; 2\,k - 2\end{aligned}$$

Finalement, en ajoutant le 2ème terme à cette somme, on obtient :

$$m(m-1) - 2k(m-k) + (m-k)\, 2\,k - 2 \;=\; m(m-1) - 2$$

Cela permet de conclure que l'égalité $(*)$ est bien vérifiée.

On a démontré : $\forall k \in [\![1, m-1]\!]$, $\pi_{n+1,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n}.}$$

Commentaire

- On rappelle que $\mathcal{P}(n)$ est une proposition mathématique qui dépend de n. L'écriture (n) a d'ailleurs pour but d'insister sur cette dépendance en n. En revanche, la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est totalement indépendante de n car n apparaît alors comme une variable liée au quantificateur $\forall$ (on dit que n est une variable muette). L'écriture « $\mathcal{P}(n)$: $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}, \ldots$ » n'a alors pas de sens (il y a dépendance en n à gauche mais pas à droite). Attention cependant à ne pas en conclure que la proposition $\mathcal{P}(n)$ ne peut contenir de quantificateurs. Comme on le voit dans cet exemple $\left(\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant (\alpha_m)^n \right)$, $\mathcal{P}(n)$ peut s'écrire à l'aide de quantificateurs mais la variable n ne doit en aucun cas être liée à un quantificateur (sinon, elle serait muette).
- Dans cette récurrence, on traite séparément plusieurs cas. Cela provient de l'obligation de vérifier que l'on est bien dans le cadre d'application de l'hypothèse de récurrence. Cette gestion correcte des certains cas rend la démonstration complexe. Mais le cœur de la démonstration (le cas $k \in [\![2, m-2]\!]$) n'est pas réellement difficile. On peut le résumer ainsi :
  1) à l'aide de la question précédente, on fait apparaître $\pi_{n+1,k}$ comme combinaison linéaire de $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$.
  2) chacun des termes $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$ est majoré par $(\alpha_m)^n$ par hypothèse de récurrence.
  3) formellement, cette majoration revient à remplacer, dans la combinaison linéaire, les termes $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$ par $(\alpha_m)^n$. On met alors en facteur $(\alpha_m)^n$.
  Par un simple calcul, on s'aperçoit que l'autre terme n'est autre que α_m ce qui termine la démonstration. □

b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente et en remarquant $\pi_{n,k} = \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n}$$

Or :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n} = 0$ car $\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \in \,]0, 1[$ (puisque $m(m-1)-2 < m(m-1)$).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = 0.}$$

□

6. On définit l'évènement V_A (respectivement V_B) suivant : « au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B) ».

a) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big)$ et $\mathbb{P}(V_B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

  L'événement V_A est réalisé

  $\Leftrightarrow$ Au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A

  $\Leftrightarrow$ Il existe un jour $i \in \mathbb{N}$ pour lequel tous les électeurs ont l'intention de voter A

  $\Leftrightarrow$ Il existe un jour $i \in \mathbb{N}$ pour lequel les m électeurs ont l'intention de voter A

  $\Leftrightarrow$ Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que la v.a.r. X_i prend la valeur m

  $\Leftrightarrow$ Il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que l'événement $\{X_i = m\}$ est réalisé

  $\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \{X_i = m\}$ est réalisé

  $$\boxed{\text{On en déduit : } V_A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{X_i = m\}.}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{X_i = m\}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} \{X_i = m\}\right) && \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) && \textit{(car } \big(\{X_i = m\}\big)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)}
\end{aligned}$$

- Il reste à démontrer que $\big(\{X_i = m\}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est bien une suite croissante d'événements.
  Formellement, on doit démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\{X_i = m\} \subseteq \{X_{i+1} = m\}$.
  Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons l'événement $\{X_i = m\}$ réalisé.
  Cela signifie qu'au soir du $i^{\text{ème}}$ jour, le groupe d'électeurs ayant l'intention de voter pour A comporte m individus. La rencontre qui a lieu entre les deux électeurs le jour suivant réunit donc deux individus ayant l'intention de voter A. Ainsi, il n'y a pas de modification des intentions de vote. Le soir du $(i+1)^{\text{ème}}$ jour, il y a donc toujours m individus ayant l'intention de voter A. Autrement dit, l'événement $\{X_{i+1} = m\}$ est réalisé.

  $$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \{X_i = m\} \subseteq \{X_{i+1} = m\}}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}(V_A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big).}$$

- En procédant de même, on démontre :

$$V_B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{X_i = 0\}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(V_B) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} \{X_i = 0\} \right) & \\ & = & \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} \{X_i = 0\} \right) & \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\ & = & \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\} \big) & \textit{(car } \big(\{X_i = 0\} \big)_{i \in \mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)} \end{array}$$

La croissance de la suite $\big(\{X_i = 0\} \big)_{i \in \mathbb{N}}$ se démontre aussi comme dans le cas précédent. Si $\{X_i = 0\}$ est réalisé c'est qu'au soir du jour i il y a 0 individu ayant l'intention de voter A. Il en est de même du soir du jour $i+1$ car la rencontre a lieu entre deux électeurs ayant tous les deux l'intention de voter B.

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}(V_B) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\} \big).}$$

□

b) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1$.
Que signifie ce résultat ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big(\{X_n = k\} \big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \big) \ = \ 1$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\} \big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = m\} \big) & = & 1 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \big) \right) \\ & = & 1 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k} \right) \end{array}$$

- Or :
  × d'après la question ***5.b)***, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\lim_{n \to +\infty} \pi_{n,k} = 0$$

  × d'après la question ***6.a)*** :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\} \big) = \mathbb{P}(V_B) \quad \text{ et } \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\} \big) = \mathbb{P}(V_A)$$

En passant à la limite dans l'égalité du point précédent, on obtient alors :

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\} \big) + \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\} \big)}_{\mathbb{P}(V_B) + \mathbb{P}(V_A)} \ = \ \underbrace{1 - \left(\sum_{k=1}^{m-1} \big(\lim_{n \to +\infty} \pi_{n,k} \big) \right)}_{1 - 0}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1.}$$

- Les événements V_A et V_B sont incompatibles. En effet, si au bout d'un certain nombre de jours tous les électeurs ont l'intention de voter pour le même candidat alors les intentions de vote ne sont plus modifiées les jours suivants. Il n'est donc pas possible de retrouver tous les électeurs dans un même groupe (au soir du jour $i_1 \in \mathbb{N}$) et dans un autre (au soir du jour $i_2 \in \mathbb{N}$).

  On en déduit :

  $$\mathbb{P}\big(V_A \cup V_B\big) \;=\; \mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) \;=\; 1$$

  Ce dernier résultat signifie qu'au bout d'un certain nombre de jours, tous les électeurs seront dans le même groupe.

  $$\boxed{\text{À terme, tous les électeurs auront la même intention de vote.}}$$ □

7. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

a) Justifier : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
La v.a.r. Z_n prend pour valeur la différence entre le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour A le soir du jour $n+1$ et le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour A le soir du jour n. Or, la rencontre entre les deux électeurs le jour $n+1$ ne modifie l'intention de vote que d'un électeur au plus. Plus précisément :

× soit la rencontre a lieu entre un électeur du groupe A qui convainc un électeur du groupe B.
Dans ce cas, Z_n prend la valeur 1.

× soit la rencontre a lieu entre deux électeurs du même bord.
Dans ce cas, Z_n prend la valeur 0.

× soit la rencontre a lieu entre un électeur du groupe B qui convainc un électeur du groupe A.
Dans ce cas, Z_n prend la valeur -1.

$$\boxed{Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}}$$ □

b) Exprimer $\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in [\![1, m-1]\!]$.

Démonstration.
La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{Z_n = 1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} - X_n = 1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = k+1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = k+1\}\big) && \textit{(car } \{X_{n+1} = m+1\}\big) = \varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n = k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) && \textit{(car pour tout } k \in [\![0, m-1]\!], \ \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n = k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) && \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n = 0\}}\big(\{X_{n+1} = 1\}\big) = 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}_{\{X_n = k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) \times \pi_{n,k}}$$ □

c) Comparer $\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$.

Démonstration.
La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{Z_n = -1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} - X_n = -1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = k-1\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = k-1\}\big) && \textit{(car } \{X_{n+1} = -1\}\big) = \varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big) && \textit{(car pour tout } k \in [\![1,m]\!], \ \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big) && \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n=m\}}\big(\{X_{n+1} = m-1\}\big) = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big)}$$

Commentaire

- On détaille ici la correction pour faire apparaître de manière précise les similarités et différences avec la question précédente. Cependant, on pouvait plus sobrement indiquer que par analogie avec le raisonnement précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big)$$

- Dans la remarque de la question ***1.d)***, on a introduit $Y_n = m - X_n$, v.a.r. qui donne le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour B le soir du jour n. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut introduire la v.a.r. $T_n = Y_{n+1} - Y_n$. Il y a symétrie du problème : on ne change pas l'expérience en échangeant les rôles de A et B. On en déduit que Z_n et T_n suivent la même loi. Cela permet de retrouver :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{X_{n+1} - X_n = -1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{(\cancel{m} - Y_{n+1}) - (\cancel{m} - Y_n) = -1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{Y_n - Y_{n+1} = -1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{Y_{n+1} - Y_n = 1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{T_n = 1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) && \textit{(car } T_n \textit{ et } Z_n \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}
$$

□

d) En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z_n est finie. Elle admet donc une espérance.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Z_n) & = & \sum\limits_{k \in Z_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) & \textit{(par définition)} \\ & = & (-1) \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) + 0 \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) + 1 \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) & \\ & = & -\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 0}$$

Commentaire

Il est tout à fait possible, au brouillon, d'opérer par rétro-ingénierie, c'est-à-dire partir du résultat donné par l'énoncé ($\mathbb{E}(Z_n) = 0$) pour en déduire un résultat intermédiaire (en l'occurence la propriété $\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$). Évidemment, partir du résultat ne constitue en aucun cas une démonstration. Mais la valeur du résultat intermédiaire peut parfois renseigner sur la voie à choisir pour le démontrer. □

e) Montrer que la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition : $Z_n = X_{n+1} - X_n$.
  Comme les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont finies, elles admettent une espérance.
  On en déduit, d'après l'égalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}(Z_n) & = & \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) & = & \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ \shortparallel & & & & \\ 0 & \textit{(d'après la question précédente)} & & & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)}$$

- Ainsi, la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(a) = a.}$$

□

8. Montrer que $\mathbb{P}(V_A) = \dfrac{a}{m}$ et interpréter ce résultat.

Démonstration.

- On a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X_n) & = & \sum\limits_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) & \textit{(par définition)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{m} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) & \\ & = & 0 \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \sum\limits_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) + m \times \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente : } m \times \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) \ = \ a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big).}$$

- Or, d'après la question ***5.b)*** : $\forall k \in [\![1, m-1]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 0$.
  On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} m \times \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) \;=\; \lim_{n \to +\infty} \left(a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\right) \;=\; a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \lim_{n \to +\infty} \left(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} m \times \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) = m \times \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) = m \times \mathbb{P}(V_A) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)}$$

$$a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \lim_{n \to +\infty} \left(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\right) = a$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(V_A) = \frac{a}{m}.}$$

- On en déduit, par la question ***6.b)*** :

$$\mathbb{P}(V_B) \;=\; 1 - \mathbb{P}(V_A) \;=\; 1 - \frac{a}{m} \;=\; \frac{m-a}{m}$$

  La quantité $\dfrac{a}{m}$ (respectivement $\dfrac{m-a}{m}$) est exactement la proportion d'électeurs souhaitant initialement voter pour A (respectivement B).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la probabilité que les électeurs aient tous à terme l'intention de voter pour un} \\ \text{même candidat est donnée par la proportion d'électeurs souhaitant initialement voter pour} \\ \text{ce candidat.}\end{array}}$$

$\square$

Exercice 4 *(d'après* `CCP 2020 - PSI`*)*
Objectifs

- Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.
- À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.
- Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.
  - × Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
  - × Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

Commentaire

La présentation faite dans cette exercice porte à confusion. Écrire $N_1 = 2$ signifie que la v.a.r. N_1 est constante égale à 2. Il serait préférable d'écrire que, dans le cas évoqué dans l'énoncé, N_1 prend la valeur 2.

- Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,\ell}$ l'évènement $(N_k = \ell)$ et $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(E_{k,\ell})$ sa probabilité.
- On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $\big(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}\big)$?

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Rappelons que N_k prend la valeur du nombre de boules dans l'urne U_1 une fois le $k^{\text{ème}}$ échange réalisé. L'urne pouvant contenir au maximum n et au minimum 0, on en conclut : $N_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
- On en déduit donc que la famille $\Big(\{N_k = 0\}, \{N_k = 1\}, \dots, \{N_k = n\} \Big)$ est un système complet d'événements.

Commentaire

- Dans cette question, on ne détermine pas précisément $N_k(\Omega)$ mais une sur-approximation $[\![0,n]\!]$. L'inclusion $N_k(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$ est suffisante pour pouvoir conclure que la famille $\big(\{N_k = \ell\}\big)_{\ell \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
- Afin de bien comprendre ce point, considérons une v.a.r. Z d'ensemble image $Z(\Omega) = \{0,1\}$ (par exemple). La famille $\Big(\{Z = 0\}, \{Z = 1\}\Big)$ est un système complet d'événements (c'est le système complet d'événements associé à Z). On peut alors écrire :

$$Z(\Omega) \ \subset \ \{0,1,2\}$$

Comme Z ne prend que les valeurs 0 et 1 alors $\{Z = 2\} = \varnothing$. La famille $\Big(\{Z = 0\}, \{Z = 1\}, \{Z = 2\}\Big)$ est un système complet d'événéments. Ceci provient du fait qu'ajouter un nombre fini (ou infini dénombrable) de fois l'événement impossible $\varnothing$, ne modifie pas les propriétés de définition d'un systeme complet d'événements. La nouvelle famille obtenue :

× la réunion de tous les événements de la famille n'est pas modifiée :

$$\{Z = 0\} \cup \{Z = 1\} \cup \varnothing \cup \varnothing = \{Z = 0\} \cup \{Z = 1\} = \Omega$$

× est toujours constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. En effet :

$$\{Z = 0\} \cap \{Z = 1\} = \varnothing, \qquad \{Z = 0\} \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$\{Z = 1\} \cap \varnothing = \varnothing, \qquad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

□

2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

Démonstration.
Supposons que l'urne U_1 contient j boules à l'instant k.
Deux cas se présentent.

- Si $j = 0$, alors l'urne U_1 ne contient aucune boule.
  Ainsi, l'urne U_2 contient les n boules.
  On choisit alors une boule qui est forcément dans l'urne U_2. Cette boule est alors placée dans l'urne U_1 de sorte que celle-ci contient 1 boule à l'instant $k+1$.
- Si $j = n$, alors l'urne U_1 contient toutes les boules.
  On choisit alors une boule qui provient forcément de cette urne et qui est placée dans l'urne U_2. À l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient donc $n-1$ boules.
- Si $1 \leq j \leq n$, deux cas se présentent alors :
  × si on choisit un numéro dans l'urne U_1, alors la boule portant ce numéro est échangée et placée dans l'urne U_2.
  Ainsi, à l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient $j-1$ boules.
  × si on choisit un numéro dans l'urne U_2, alors la boule portant ce numéro est échangée et placée dans l'urne U_1.
  Ainsi, à l'instant $k+1$, l'urne U_1 contient $j+1$ boules.

Commentaire

- Cette question a pour but de s'assurer de la bonne compréhension des candidats vis-à-vis de l'expérience. Il n'y a pas d'aspect mathématique dans cette question. Elle est faite pour aider les candidats pour la question qui suit.
- Il est à noter que j n'est introduit nulle part dans l'énoncé. La question n'est donc pas correctement écrite (si $j = \sqrt{2}$, l'hypothèse que U_1 contient j boules est infondée).
- On retiendra de ce point qu'il faut garder un esprit critique sur les énoncés. Attention à ne pas sur-interpréter ce propos : si un énoncé peut parfois être imprécis, il est rare que l'étape de cobayage ne décèle pas les erreurs. Si on repère ce que l'on pense être une erreur dans un sujet, il est préférable de se poser avant tout la question de notre bonne compréhension. Il est probable que la coquille qu'on pense avoir repérée n'en soit pas une !

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, déterminer : $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$.

- Remarquons tout d'abord que si l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$ alors elle contenait forcément, à l'instant précédent :
  - × $j - 1$ boules.
    Attention, ce cas n'est évidemment pas envisageable si $j = 0$.

  OU
  - × $j + 1$ boules.
    Attention, ce cas n'est évidemment pas envisageable si $j = n$.

  On en conclut :
  $$\forall (j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2, \ \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ 0 \quad \text{si } \ell \notin \{j-1, j+1\}$$
- Il convient alors de déterminer, dans les cas où cela a du sens, les valeurs de $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big)$ et $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big)$. Trois cas se présentent.
  - × Si $j = 0$, on détermine $\mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big)$.
    Si $E_{k,1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient 1 boule (après l'échange effectué à l'instant k.
    Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,0}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 ne contient plus aucune boule à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de moins qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,0}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_1 qui contient 1 seule boule.
    Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :
    $$\mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big) \ = \ \frac{1}{n}$$
  - × Si $j = n$, on détermine $\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big)$.
    Si $E_{k,n-1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $n-1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k.
    Dans ce cas, l'événement $E_{k+1,n}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient n boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de plus qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,n}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_2 qui contient 1 seule boule.
    Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :
    $$\mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big) \ = \ \frac{1}{n}$$

× Si $j \in [\![1, n-1]\!]$.
Commençons par déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
Si $E_{k,j-1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $j-1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k. **Dans ce cas, l'événement** $E_{k+1,j}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de plus qu'à l'instant précédent. Plus précisément, $E_{k+1,j}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_2 qui contient $n-(j-1)$ boules.
Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ \frac{n-j+1}{n}$$

Déterminons maintenant $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big)$.
Si $E_{k,j+1}$ est réalisé, **c'est que** l'urne U_1 contient $j+1$ boules (après l'échange effectué à l'instant k. **Dans ce cas, l'événement** $E_{k+1,j}$ **est réalisé si et seulement si** l'urne U_1 contient j boules à l'instant $k+1$, c'est-à-dire une boule de moins qu'à l'instant précédent. Dans ce cas, $E_{k+1,j}$ est réalisé si et seulement à l'instant k, le numéro choisi (dans $[\![1, n]\!]$) est porté par une boule se trouvant dans l'urne U_1 qui contient $j+1$ boules.
Le choix du numéro se faisant de manière équiprobable, on en déduit :

$$\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ \frac{j+1}{n}$$

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $(j, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$:

$$\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \ = \ \begin{cases} \dfrac{n-j+1}{n} & \text{si } j \in [\![1, n]\!] \text{ et } \ell = j-1 \\[2mm] \dfrac{j+1}{n} & \text{si } j \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } \ell = j+1 \\[2mm] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commentaire

- En question *2*, la démarche s'effectue en avant : on s'intéresse à ce qui se produit à l'instant $k+1$ en ayant comme hypothèse le contenu de l'urne à l'instant k. Dans la question suivante, on demande de réaliser une disjonction de cas en fonction des valeurs de j, qui correspond au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$. On doit alors procéder en arrière et réfléchir au nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant précédent. C'est un changement de point de vue qui rend la question *2* inutile et la question *3* inutilement complexe.
- Il est à noter un certain manque d'homogénéité dans l'énoncé. En effet, dans la question *2*, on n'insiste pas sur l'obligation de mettre en place une disjonction de cas. On le fait en revanche en question *3* (ce qui s'avère fort utile pour la question d'après).
- L'énoncé paraît assez peu pertinent dans sa manière de procéder. Il aurait été certainement préférable de supprimer la question *2* et de découper alors la question *3* comme suit.

 a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k,j})$.

 b) En procédant de même, donner la valeur de $\mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k,j})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$.

 c) Que vaut $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k,j})$ dans les autres cas ?

- Il est à noter que la quantité $\mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j})$ ne dépend pas de la valeur de k. Plus précisément, qu'importe l'étape de l'expérience où on se trouve : l'étape de l'urne U_1 à l'instant suivant ne dépend que de l'état de l'urne à l'instant présent. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}(E_{k+1,j}) = \mathbb{P}_{E_{0,\ell}}(E_{1,j})$$

 ce que l'on peut encore écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{\{N_k=\ell\}}(\{N_{k+1} = j\}) = \mathbb{P}_{\{N_0=\ell\}}(\{N_1 = j\})$$

- Dans cet énoncé, on travaille sur l'évolution d'une grandeur aléatoire (le nombre de boules dans l'urne U_1) qui varie dans le temps discret (initialement, puis à l'étape suivante, puis à celle d'après etc.). Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (c'est-à-dire la valeur de N_{k+1}, nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant $k+1$) ne dépend du passé (nombre de boules dans l'urne U_1 à les instants précédents) que par le présent (c'est-à-dire la valeur de N_k, nombre de boules dans l'urne U_1 à l'instant k). On dit alors que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov**. On peut par ailleurs préciser les points suivants :

 × la grandeur évaluée (ici, le nombre de boules dans l'urne U_1) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$) appelées des **états** de la chaîne de Markov. Lorsque cette grandeur prend une valeur i un jour k donné, on dit que la chaîne de Markov $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entre dans l'état i à l'instant k.

 × comme on l'a vu, l'évolution de la chaîne de Markov est indépendante du jour k considéré. On dit alors que cette chaîne est **homogène**.

 Pour résumer, on a affaire dans cet énoncé à une **chaîne de Markov homogène ayant un ensemble fini d'états**. Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme. Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov (`Centrale 1 2021 - PSI` et `Mines 1 2017 - PSI`). Le problème est, de ce point de vue, plutôt classique.

4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(E_{k,1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

et :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\,\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\,\mathbb{P}(E_{k,j+1})$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}\big)$ est un système complet d'événéments.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) & = & \sum\limits_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}\big(E_{k,\ell} \ \cap \ E_{k+1,j}\big) \\ & = & \sum\limits_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \times \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \\ & = & \sum\limits_{\ell \in [\![0,n]\!]} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,j}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \end{array}$$

- Trois cas se présentent.

  × Si $j = 0$, la formule s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(E_{k+1,0}\big) & = & \sum\limits_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell = 1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\ & & + \ \cancel{\sum\limits_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \neq 1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\ & = & \mathbb{P}_{E_{k,1}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,1}\big) \ = \ \dfrac{1}{n} \, \mathbb{P}\big(E_{k,1}\big) \end{array}$$

  × Si $j = n$, la formule s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(E_{k+1,n}\big) & = & \sum\limits_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell = n-1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\ & & + \ \cancel{\sum\limits_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \neq n-1}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\ & = & \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}\big(E_{k+1,n}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big) \ = \ \dfrac{1}{n} \, \mathbb{P}\big(E_{k,n-1}\big) \end{array}$$

  × Si $j \in [\![1, n-1]\!]$, la formule s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(E_{k+1,j}\big) & = & \sum\limits_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \in \{j-1,\, j+1\}}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\ & & + \ \cancel{\sum\limits_{\substack{\ell \in [\![0,n]\!] \\ \ell \notin \{j-1,\, j+1\}}} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,0}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big)} \\ & = & \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}\big(E_{k+1,j}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,j-1}\big) \\ & & + \ \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}\big(E_{k+1,j}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,j+1}\big) \\ & = & \dfrac{n-j+1}{n} \, \mathbb{P}\big(E_{k,j-1}\big) + \dfrac{j+1}{n} \, \mathbb{P}\big(E_{k,j+1}\big) \end{array}$$

□

5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0,$$

où A_n est la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & n-2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Démonstration.
Notons : $C_n = \Big(\mathbb{P}_{E_{0,j-1}}\big(E_{1,i-1}\big)\Big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n+1}} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
Démontrons : $\forall k \in \mathbb{N},\ Z_{k+1} = C_n \times Z_k$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $i \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned} \Big(C_n \times Z_k\Big)_{i+1,1} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \Big(C_n\Big)_{i+1,\ell} \times \Big(Z_k\Big)_{\ell,1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \Big(C_n\Big)_{i+1,\ell+1} \times \Big(Z_k\Big)_{\ell+1,1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{0,\ell}}\big(E_{1,i}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{E_{k,\ell}}\big(E_{k+1,i}\big) \times \mathbb{P}\big(E_{k,\ell}\big) \\ &= \mathbb{P}\big(E_{k+1,i}\big) \\ &= \Big(Z_{k+1}\Big)_{i+1,1} \end{aligned}$$

- On en déduit alors, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = C_n^k \times Z_0$$

Il suffit alors pour conclure de remarquer : $A_n = \dfrac{C_n}{n}$.

Commentaire

- La matrice C_n est appelée matrice de transition associée à la chaîne de Markov $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Elle permet de décrire l'évolution aléatoire de la grandeur considérée (c'est-à-dire le nombre de boules dans l'urne U_1).
- On peut remarquer que pour chaque colonne j de la matrice de transition, la somme des coefficients vaut 1. Cela se démontre à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{N_k=j\}}$ et du système complet d'événements $\Big(\{N_{k+1}=0\}, \ldots, \{N_{k+1}=n\}\Big)$. Plus précisément :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}_{\{N_k=j\}}\big(\{N_{k+1}=\ell\}\big) = 1$$

□