Couples de v.a. discrètes (DS de l'année 2018-2019)

I. Exercices généraux

Exercice : (EDHEC 2004)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. ***a)*** Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(\{Z = k\})$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geqslant 1$.

c) Vérifier que $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\{Z = k\}) = 1$.

On dispose de $n+1$ urnes U_0, U_1, ..., U_n telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- × si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages,
- × si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. ***a)*** Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité $\mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\})$.

b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\})$.

c) Pour tout k de $\{1, 2, \dots, n-1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i \leqslant n$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X = i\})$.

4. ***a)*** Montrer : $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k + \dfrac{1}{2^n}$.

b) Montrer : $\mathbb{P}(\{X = n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathbb{P}(\{X = i\})$ sous forme dune somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = i\}) = 1$.

Exercice : (EML 2014)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note

X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. *a)* Exprimer l'évenement $\{X_3 = 4\}$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}(\{X_3 = 4\})$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(\{X_3 = 2\}) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}(\{X_3 = 3\})$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $\mathbb{P}(\{X_n = n+1\})$.

5. Montrer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}_{\{N_1 = i\}}(\{X_n = 2\}) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}(\{X_n = 2\})$.

7. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $\{X_n > k\} = \{N_1 > N_2 > \ldots > N_k\}$.

En déduire que $\mathbb{P}(\{X_n > k\}) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!], \mathbb{P}(\{X_n = k\})$ à l'aide de $\mathbb{P}(\{X_n > k-1\})$ et de $\mathbb{P}(\{X_n > k\})$.

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\})$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \dfrac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathbb{P}(\{Z = k\}) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice : (EDHEC 2015 voie S)

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\displaystyle\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

2. ***a)*** Donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}\, x^n$.

b) En déduire que la série $\sum \displaystyle\binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3. ***a)*** Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de S_0.

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal : $(1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r$.

c) En déduire : $\forall x \in\,]0,1[\ ,\ \forall r \in \mathbb{N}\ ,\ \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

d) Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$.
Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

× X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.

× Y le nombre de manches gagnées par le joueur.

× G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

4. ***a)*** Donner la loi de X.
(on pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »)

b) On pose $T = X + 1$. Démontrer que T suit la loi géométrique de paramètre α.

c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5. ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
Déterminer, en distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$ la probabilité $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y=k\}\big)$.

b) En déduire à l'aide de la **Partie 1** la loi de Y.

6. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

7. ***a)*** Exprimer G en fonction de X et Y.

b) En déduire l'espérance de G.

Exercice : (EML 2018 voie S)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. ***a)*** Montrer que φ est une application linéaire.

b) Calculer $\varphi(X^n)$.

c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.

b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

3. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

a) Déterminer la loi de Z_2.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{\{Y_k = j\}}\big(\{Z_{k+1} = 1\}\big)$.
En déduire : $\mathbb{P}\big(\{Z_{k+1} = 1\}\big) = 1 - \dfrac{1}{n}\,\mathbb{E}(Y_k)$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_{k+1} = 1\}\big) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{Z_j = 1\}\big)$$

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}\big(\{Z_k = 1\}\big) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

4. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{Y_k = i\}\big)\ X^i$$

a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}(\{Y_{k+1}=i\}) = \frac{i}{n}\ \mathbb{P}\big(\{Y_k=i\}\big) + \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}\big([Y_k=i-1]\big)$$

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}\ X(1-X)G_k' + XG_k$$

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k(G_0)$$

5. ***a)*** Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\ \mathbb{E}(Y_k)+1$$

c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue en question ***3.e)***.

6. On rappelle que les polynômes P_0, ..., P_n sont définis à la question ***2.*** par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0,n]\!],\ \ P_j = X^j(1-X)^{n-j}$$

a) Calculer $\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$.

b) Montrer, pour tout j de $[\![0,n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i$$

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\right)X^i$$

d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}(\{Y_k=i\}) = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k$$

Exercice : (ESCP 2003)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.

On désigne par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- × B_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;
- × X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- × u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \alpha\, n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ appartienne à A.

b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. **Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de $\mathbb{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.

Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $\{X_n = k\}$?

Si $k \in [\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.

Montrer enfin que l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbb{P}(B_n)$**

a) Soit n un entier naturel non nul. établir, pour tout entier $k \in [\![n+1-a, n]\!]$ l'égalité :

$$\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \;=\; \frac{a-n+k}{s}\,\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) + \frac{b+n-k+1}{s}\,\mathbb{P}\big(\{X_n = k-1\}\big)$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout $k \in [\![1, n-a-1]\!]$.

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.

c) Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de u_n et de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\mathbb{P}(B_n)\big)_{n\geqslant 1}$?

Exercice : (HEC II S 2009 Parties I et II)

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles exsitent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.
Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \sup(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $Z_n = \inf(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.
On admet que T_n et Z_n sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$T_n(\omega) = \max\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_n(\omega)\big) \quad \text{et} \quad Z_n(\omega) = \min\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_n(\omega)\big)$$

On rappelle que si C désigne un élément de $\mathscr{A}$, on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement C, définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaire

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Établir les deux relations suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}(\{Y > k\})$$

Partie I. Inf et Sup

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $\mathbb{E}(U_1)$ et de $\mathbb{V}(U_1)$.

3. ***a)*** Calculer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\})$.

b) En déduire la loi de probabilité de T_n.

4. ***a)*** Montrer que la suite $(d_n(N))_{n\geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

c) Établir la formule suivante : $\mathbb{V}(T_n) = (2N-1)\, d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - {d_n}^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n)$.

d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}$.

En déduire que l'on a : $V(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$.

5. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.

6. On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'uin', a, b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function T = simulmax(n)` qui simule la variable aléatoire T_n.

Partie II. Couple (Inf, Sup)

7. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k,ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k,\ell) = P(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\})$.

a) Montrer, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\ \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

b) Établir, pour tout (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, la formule suivante :

$$\mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) = \phi_n(k,\ell) + \phi_n(k-1,\ell-1) - \phi_n(k-1,\ell) - \phi_n(k,\ell-1)$$

c) En déduire, en distinguant les trois cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $\mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\})$ en fonction de k et ℓ.

Exercice : (EML 2010)

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $\{\min(X_1,X_2) + X_3 > \max(X_1,X_2)\}$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{\Delta = 0\})$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\})\,\mathbb{P}(\{X_1 = n+k\})$.

b) En déduire : $\mathbb{P}(\{\Delta = n\}) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

4. *a)* Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $\{X_3 > \Delta\}$.

6. *a)* En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\})\,\mathbb{P}(\{X_3 > k\})$.

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$. On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y \leqslant t\}) = \mathbb{P}(\{X = k\})\,\mathbb{P}(\{Y \leqslant t\})$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

- ***a)*** Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}(\{Z \geqslant t\}) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\,\mathbb{P}(\{Y \geqslant kt\})$.
- ***b)*** En déduire : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}(\{Z \geqslant t\}) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.
- ***c)*** Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Exercice : (HEC 2005)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.
On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

- ***a)*** Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.
- ***b)*** On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
  Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

- ***a)*** Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{U = k\})$.
  En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1.
  Reconnaître la loi de U.
- ***b)*** Déterminer la loi du couple (U, Z).
- ***c)*** Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(\{Z = k\}) = \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \dbinom{\ell}{k} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\ell}$.
- ***d)*** Calculer $\mathbb{P}(\{Z = 1\})$.
  Montrer : $\mathbb{P}(\{Z = 0\}) = \dfrac{1}{3}$.

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question ***3.c)*** pour $k = i+1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\mathbb{P}(\{Z = i+1\}) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z = i+1\}) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z = i\})$$

f) En déduire la loi de Z.

Partie II. Tirages sans remise

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers

4. Déterminer la loi de X_1.

5. On suppose dans cette question que $n = 2$.
Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir.
En déduire la loi de X_2.

B. Étude du cas général

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

6. a) Décrire l'univers Ω des événements observables.

b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Pour tout entier naturel k, on note $a(n,k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$.
Par convention, $a(0,0) = 1$.

7. a) Préciser la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j)$.

b) Déterminer $a(n,n)$ et $a(n,n-1)$.

8. a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n,j)}{n!} = \binom{n}{j}\,\frac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$$

En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\,\frac{a(j,0)}{j!} = n!$$

Donner l'expression de $a(n,0)$ en fonction des nombres $\big(a(j,0)\big)_{0\leqslant j\leqslant n-1}$.

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.
Justifier l'égalité : $\binom{j}{i}\binom{k}{j} = \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}$, puis montrer :

$$\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} = 0$$

En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j}$$

9. a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j,0) \;=\; j! \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\, i!$$

Montrer l'égalité :

$$a(k,0) \;=\; k! \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i}\, i!$$

(On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n,0)$ trouvée dans la question ***8.a)***)

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k,0)$.

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Exercice : (HEC 2003)

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

b) Calculer la matrice $A^2 - 2a\,A$.
En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.

d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que la probabilité de l'événement $\{X = Y\}$ est donnée par : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) = \dfrac{p}{2-p}$.
En déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

c) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\{S = 2\} \cap \{D = 0\})$, $\mathbb{P}(\{S = 2\})$ et $\mathbb{P}(\{D = 0\})$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbb{P}(\{S = n\}) = (n-1)\,p^2\,q^{n-2}$.

e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Exercice : (ESSEC I 2013)

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.
On étudie le modèle suivant :

× le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;

× les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;

× On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;

× la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée**.

× pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathbb{P}(\{N = j\})$, $q_j = \mathbb{P}(\{U_1 = j\})$ et $r_j = \mathbb{P}(\{X = j\})$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\, p_n$.

3. Dans cette question ***3.***, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

b) Établir que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j\, (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n\, (1-\pi)^{m-n}$.

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^{\ell}\, (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

4. On suppose dans cette question ***4.*** que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda\,p)^j}{j!}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{1}{(n-j)!}\big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(y-i)$, et $\displaystyle\binom{y}{0} = 1$.

5. *La formule du binôme négatif.*
Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0,1[$.
Pour tout entier naturel n, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\,dt$.
On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n}\binom{c+k-1}{k}x^k + c\binom{c+n}{n}I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$: $\displaystyle 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $\displaystyle 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1+\ln(n))$.

En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\binom{c+n}{n}x^{n+1} = 0$.

c) En conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\binom{c+k-1}{k}x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{c+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

6. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $\displaystyle p_k = \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k\,p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

7. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

8. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in\,]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}$.

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}(\{N = k\})$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

(ii) Montrer : $b = -a(r + 1)$.

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.
En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k p_0$.

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

Exercice : (HEC 2002)

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ D(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathbb{P}(\{T \leqslant t\}) = \mathbb{P}(\{T > t\})$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.

1. **Coefficient d'avarie.**

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{[T>n-1]}([T = n])$$

a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la probabilité $\mathbb{P}([T = n])$ à l'aide de la fonction D. En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

b) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.

(i) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?

(ii) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n.

(iii) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

c) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \alpha$.

(i) Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $D(n) = (1 - \alpha)\ D(n - 1)$.

(ii) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

2. **Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.**

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi que T.

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k non nul, on pose : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$.

(S_k désigne donc l'instant où se produit la $k^{\text{ème}}$ panne et le $k^{\text{ème}}$ remplacement)

a) Soit m un entier naturel.
Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité :

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

b) (i) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

(ii) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k,\ \mathbb{P}([S_k = n]) = \binom{n-1}{k-1}\, p^k (1-p)^{n-k}$$