Couples de v.a. discrètes (DS de l'année 2018-2019)

I. Exercices généraux

Exercice : (EDHEC 2004)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

Démonstration.
L'expérience consiste en n lancers.
Donc l'ensemble Ω est ici l'ensemble des n-lancers constitués des éléments de $\{\text{Pile},\ \text{Face}\}$.

- L'événement $\{Z = 0\}$ est réalisé par le n-lancer $\omega = (\text{Face},\ \text{Face}, \dots,\ \text{Face})$ *(i.e.* $Z(\omega) = 0$*)*.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{Z = k\}$ est réalisé si et seulement si le premier Pile est obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer. En particulier :
  - × l'événement $\{Z = 1\}$ est réalisé par le n-lancer $\omega = (\text{Pile},\ \text{Face}, \dots,\ \text{Face})$.
    (i.e. $Z(\omega) = 1$*)*
  - × l'événement $\{Z = 2\}$ est réalisé par le n-lancer $\omega = (\text{Face},\ \text{Pile},\ \text{Face}, \dots,\ \text{Face})$.
    (i.e. $Z(\omega) = 2$*)*
  - × $\cdots$
  - × l'événement $\{Z = k\}$ est réalisé par le n-lancer $\omega = (\underbrace{\text{Face},\ \text{Face}, \dots,\ \text{Face}}_{(k-1) \text{ lancers}}, \text{Pile}, \text{Face}, \dots, \text{Face})$.
  - × $\cdots$
  - × l'événement $\{Z = n\}$ est réalisé par le n-lancer $\omega = (\text{Face},\ \text{Face}, \dots,\ \text{Face},\ \text{Pile})$.
    (i.e. $Z(\omega) = n$*)*

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

□

b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(\{Z = k\})$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geqslant 1$.

Démonstration.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

$$P_i \ : \ \text{« obtenir Pile au } i^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$
$$F_i \ : \ \text{« obtenir Face au } i^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 0$, alors :

$$\{Z = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z = 0\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \\
&= \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_n) \\
&= \mathbb{P}(F_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_n) && \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\
&= \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{Z = 0\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

- Si $k \geqslant 1$, alors :

$$\{Z = k\} = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z = k\}) &= \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\
&= \mathbb{P}(F_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(F_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k) && \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\
&= \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } k \geqslant 1 : \mathbb{P}(\{Z = k\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.}$$

Commentaire

On pouvait déterminer $\mathbb{P}(\{Z = 0\})$ en utilisant le fait que $(\{Z = k\})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z = 0\}) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{Z = k\}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \, \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Ce n'était cependant pas ce qui était attendu par l'énoncé, au regard de la question suivante. □

c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\{Z = k\}) = 1$.

Démonstration.

On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\{Z=k\}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\}) \\
&= \mathbb{P}(\{Z=0\}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \textit{ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison } \frac{1}{2} \neq 1\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\, \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\
&= \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \left(1 - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) \ = \ 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(\{Z=k\}) \ = \ 1}$$

□

On dispose de $n+1$ urnes U_0, U_1, $\ldots$, U_n telles que pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages,
- si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

Démonstration.
Montrons : $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour cela, on procède par double inclusion.

($\subseteq$) Il y a entre 0 et n boules blanches dans les $(n+1)$ urnes. Donc : $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

($\supseteq$) Montrons maintenant que la v.a.r. X peut prendre chaque valeur entière entre 0 et n.

- Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \ldots, \text{Face})$, alors l'événement $\{Z=0\}$ est réalisé, donc l'événement $\{X=0\}$ est réalisé (d'après l'énoncé).
- Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Pile}, \text{Face}, \ldots, \text{Face})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au 1^{er} lancer, alors on effectue un 1-tirage dans l'urne U_1.
  Si ce 1-tirage est (Boule blanche), alors l'événement $\{X=1\}$ est réalisé.
- Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \text{Pile}, \text{Face}, \ldots, \text{Face})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $2^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2.
  Si ce 2-tirage est (Boule blanche, Boule blanche), alors l'événement $\{X=2\}$ est réalisé.
- $\cdots$
- Si on obtient le n-lancer de pièce $(\text{Face}, \ldots, \text{Face}, \text{Pile})$, c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un n-tirage dans l'urne U_n.
  Si ce n-tirage est (Boule blanche, $\ldots$, Boule blanche), alors l'événement $\{X=n\}$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Finalement : } X(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

Commentaire

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages et de lancers qui réalisent les événements $\{X = i\}$. Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.
  Par exemple, pour l'événement $\{X = 1\}$, si on obtient le n-lancer de pièce (Face, Pile, Face, $\dots$, Face), c'est-à-dire si on a obtenu Pile au $2^{\text{ème}}$ lancer, alors on effectue un 2-tirage dans l'urne U_2.
  Si ce 2-tirage est (Boule blanche, Boule noire), alors l'événement $\{X = 1\}$ est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment : il est possible de tirer dans chacune des urnes U_i. De plus, les tirages dans cette urne peuvent fournir jusqu'à i boules blanches. Donc l'évément $\{X = i\}$ peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de déterminer $X(\Omega)$ mais ne fournit pas sa valeur, on peut penser que la simple réponse « $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ » (sans justification) permet d'obtenir la majeure partie des points alloués à cette question. Évidemment, si la question s'exprime sous la forme : « Montrer que $X(\Omega) = \cdots$ », il faut détailler la réponse.

$\square$

3. a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, la probabilité $\mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\})$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $i = 0$. D'après l'énoncé : $\{Z = 0\} \subseteq \{X = 0\}$. Donc :

$$\mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = 0\}) = \frac{\mathbb{P}(\{Z = 0\} \cap \{X = 0\})}{\mathbb{P}(\{Z = 0\})} = \frac{\mathbb{P}(\{Z = 0\})}{\mathbb{P}(\{Z = 0\})} = 1$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = 0\}) = 1}$$

- Si $1 \leqslant i \leqslant n$.
  La famille $(\{X = i\})_{i \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\}) \\ &= \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = 0\}) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\}) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\}) && \textit{(d'après le point précédent)} \end{aligned}$$

  On en déduit : $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\}) = 1 - 1 = 0$.
  Or, comme $\mathbb{P}_{\{Z=0\}}$ est une probabilité :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\}) \geqslant 0$$

  On a donc une somme nulle de termes positifs.
  On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X = i\}) = 0.}$$

Commentaire

Rappelons que pour tout événement A tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_A$ est une application probabilité. Elle vérifie donc les propriétés usuelles d'une telle application. En particulier, si $(B_1, \ldots, B_n)$ est un système complet d'événements :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_A(B_k) = 1$$

□

b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$, la probabilité $\mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\})$.
Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $i = n$.
D'après l'énoncé, l'événement $\{Z = n\}$ est réalisé si et seulement si on a obtenu le premier pile au $n^{\text{ème}}$ lancer. Si c'est le cas, on effectue un n-tirage dans l'urne U_n qui ne contient que des boules blanches (n boules blanches et $n - n = 0$ boule noire).
L'événement $\{X = n\}$ est alors réalisé si l'on a obtenu n boules blanches lors des n tirages successifs dans cette urne.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = n\}) \ = \ 1.}$$

- Si $0 \leqslant i \leqslant n-1$.
La famille $(\{X = i\})_{i \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\}) + \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = n\}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\}) + 1 && \textit{(d'après le point précédent)} \end{aligned}$$

On en déduit : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\}) \ = \ 1 - 1 \ = \ 0$.
Or, comme $\mathbb{P}_{\{Z=n\}}$ est une application probabilité :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\}) \geqslant 0$$

On a donc une somme nulle de termes positifs.
On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall i \in [\![0, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = i\}) = 0.}$$

c) Pour tout k de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i \leqslant n$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X = i\})$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
L'événement $\{Z = k\}$ est réalisé si et seulement si on a obtenu le premier pile au $k^{\text{ème}}$ lancer.
Si c'est le cas, on effectue alors un k-tirage dans l'urne U_k qui contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.

Deux cas se présentent alors.

- Si $0 \leqslant i \leqslant k$.
Cette deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli

indépendantes et de même paramètre $\frac{k}{n}$, paramètre qui correspond à la probabilité de l'obtention d'une boule blanche dans l'urne U_k.
La v.a.r. X est la v.a.r. qui compte le nombre de succès de cette expérience. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) \;=\; \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1-\frac{k}{n}\right)^{k-i}$$

- Si $k < i \leqslant n$.
  Il est impossible d'obtenir strictement plus de k boules blanches lors d'un k-tirage. Donc :

$$\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) \;=\; 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, pour tout } k \in [\![1, n-1]\!] \text{ et tout } i \in [\![0, n]\!] : \\ \mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{array}}$$

Commentaire

On verra dans le chapitre sur les couples de v.a.r. discrètes que cela signifie que la loi conditionnelle de la v.a.r. X sachant l'événement $\{Z=k\}$ est une loi binomiale de paramètre $\left(k, \frac{k}{n}\right)$.

□

4. ***a)*** Montrer : $\mathbb{P}(\{X=0\}) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.

Démonstration.
La famille $(\{Z=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X=0\}) \\
= & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\} \cap \{X=0\}) \\
= & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\})\, \mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=0\}) \\
= & \mathbb{P}(\{Z=0\})\, \mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X=0\}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{Z=k\})\, \mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=0\}) + \mathbb{P}(\{Z=n\})\, \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X=0\}) \\
= & \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{0} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-0} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0} \\
= & \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^k \;=\; \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n-k}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{X=0\}) \;=\; \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k.}$$

□

b) Montrer : $\mathbb{P}(\{X=n\}) = \frac{1}{2^n}$.

Démonstration.
La famille $(\{Z=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X=n\})\\
=\ &\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\}\cap\{X=n\})\\
=\ &\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\})\,\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=n\})\\
=\ &\mathbb{P}(\{Z=0\})\,\mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X=n\}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{Z=k\})\,\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=n\}) + \mathbb{P}(\{Z=n\})\,\mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X=n\})\\
=\ &\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k \times 0\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1 \ = \ \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{X=n\}) \ = \ \frac{1}{2^n}.}$$ □

c) Exprimer, pour tout i de $\{1,2,\dots,n-1\}$, $\mathbb{P}(\{X=i\})$ sous forme dune somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

Démonstration.
Soit $i\in[\![1,n-1]\!]$.
La famille $(\{Z=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{X=i\})\\
=\ &\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\}\cap\{X=i\})\\
=\ &\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Z=k\})\,\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\})\\
=\ &\mathbb{P}(\{Z=0\})\,\mathbb{P}_{\{Z=0\}}(\{X=i\}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{Z=k\})\,\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) + \mathbb{P}(\{Z=n\})\,\mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X=i\})\\
=\ &\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \times 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{Z=k\})\,\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \times 0\\
=\ &\sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(\{Z=k\})\,\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) + \sum_{k=i}^{n-1} \mathbb{P}(\{Z=k\})\,\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\})\\
=\ &\cancel{\sum_{k=1}^{i-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k \times 0\right)} + \sum_{k=i}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\\
=\ &\sum_{k=i}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\\
=\ &\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{2n}\right)^i\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } i\in[\![1,n-1]\!] : \mathbb{P}(\{X=i\}) \ = \ \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{2n}\right)^i\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}.}$$ □

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(\{X=i\})=1$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=i\}) &= \mathbb{P}(\{X=0\}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{X=i\}) + \mathbb{P}(\{X=n\}) \\
&= \left(\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} + \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

- Ensuite :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} - \binom{k}{0} \left(\frac{k}{2n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-0}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{k}{2n} + \frac{n-k}{2n}\right)^k - \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right)$$

(d'après la formule du binôme de Newton)

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}}\right)^k - \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$

(par linéarité)

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \neq 1$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\,\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=i\}) &= \frac{1}{2^n} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k} + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + 1 = \frac{2}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} + 1 = \cancel{\frac{1}{2^{n-1}}} - \cancel{\frac{1}{2^{n-1}}} + 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=i\}) = 1.}$$

□

Exercice : (EML 2014)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. a) Exprimer l'évenement $\{X_3 = 4\}$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}(\{X_3 = 4\})$.

Démonstration.
Rappelons qu'on effectue $n + 1 = 4$ tirages successifs (et avec remise) dans l'urne.

- L'événement $\{X_3 = 4\}$ est réalisé si et seulement si c'est le $4^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  × le numéro obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage.
  × le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage.
  Les 3 premiers tirages constituent donc une séquence strictement décroissante d'entiers de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ (l'urne ne contenant que les boules 1, 2 et 3).
  On a donc forcément obtenu 3 au premier tirage, 2 au $2^{\text{ème}}$ et 1 au $3^{\text{ème}}$.
  (le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage sera alors forcément supérieur ou égal à 1)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \{X_3 = 4\} = \{N_1 = 3\} \cap \{N_2 = 2\} \cap \{N_3 = 1\}.}$$

Commentaire

- Il est à noter que la décomposition de l'événément $\{X_3 = 4\}$ démontre la bonne compréhension et permet donc, à elle seule, d'obtenir la totalité des points alloués sur cette étape.
- Sur un exercice de probabilités discrètes, il faut prendre le temps en début d'énoncé de bien comprendre l'expérience aléatoire et les v.a.r. en présence. C'est aussi le but de la rédaction précédant la décomposition de l'événement : prendre le temps de caractériser la réalisation de l'événément permet de rentrer dans le sujet.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_3 = 4\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{N_1 = 3\} \cap \{N_2 = 2\} \cap \{N_3 = 1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{N_1 = 3\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{N_2 = 2\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{N_3 = 1\}\big) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} && \textit{(car pour tout } i \in [\![1,3]\!], N_i \sim \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_3 = 4\}\big) = \frac{1}{27}}$$

$\square$

b) Montrer que $\mathbb{P}(\{X_3 = 2\}) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}(\{X_3 = 3\})$.

Démonstration.

- L'événement $\{X_3 = 2\}$ est réalisé si et seulement si c'est le $2^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au 1^{er} tirage (les numéros obtenus aux $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ tirages ne sont pas contraints). Trois cas se présentent :
  × si on a obtenu 1 au premier tirage :
  alors on a pu tirer n'importe quel numéro au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 2 au premier tirage :
  alors on a tiré les numéros 2 ou 3 au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 3 au premier tirage :
  alors on a obligatoirement tiré le numéro 3 au deuxième tirage.

  Ainsi :
$$\begin{array}{rcl} \{X_3 = 2\} & = & \{N_1 = 1\} \cap \Big(\{N_2 = 1\} \cup \{N_2 = 2\} \cup \{N_2 = 3\} \Big) \\ & \cup & \{N_1 = 2\} \cap \Big(\{N_2 = 2\} \cup \{N_2 = 3\} \Big) \\ & \cup & \{N_1 = 3\} \cap \Big(\{N_2 = 3\} \Big) \\ & = & \Big(\{N_1 = 1\} \cap \Omega \Big) \cup \Big(\{N_1 = 2\} \cap \{N_2 \geqslant 2\} \Big) \cup \Big(\{N_1 = 3\} \cap \{N_2 = 3\} \Big) \end{array}$$

$$\boxed{\{X_3 = 2\} = \{N_1 = 1\} \cup \Big(\{N_1 = 2\} \cap \{N_2 \geqslant 2\} \Big) \cup \Big(\{N_1 = 3\} \cap \{N_2 = 3\} \Big)}$$

- On en déduit :
$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) & \\ = & \mathbb{P}\big(\{N_1 = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{N_1 = 2\} \cap \{N_2 \geqslant 2\}\big) + \mathbb{P}\big(\{N_1 = 3\} \cap \{N_2 = 3\}\big) & \\ = & \mathbb{P}\big(\{N_1 = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{N_1 = 2\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{N_2 \geqslant 2\}\big) + \mathbb{P}\big(\{N_1 = 3\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{N_2 = 3\}\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ = & \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+2+1}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} & \textit{(pour tout } i \in [\![1,3 \\ & & N_i \sim \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) = \dfrac{2}{3}}$$

- La famille $\big(\{X_3 = i\}\big)_{i = [\![2,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :
$$\mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_3 = 4\}\big) \ = \ 1$$
  Et ainsi :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) & = & 1 - \mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X_3 = 4\}\big) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{27} - \dfrac{2}{3} \\ & = & \dfrac{27}{27} - \dfrac{1}{27} - \dfrac{18}{27} \ = \ \dfrac{8}{27} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) = \frac{8}{27}}$$

□

2. Calculer l'espérance de X_3.

Démonstration.

- La v.a.r. X_3 admet une espérance car elle est finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(X_3) & = & 2 \times \mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) + 3 \times \mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) + 4 \times \mathbb{P}\big(\{X_3 = 4\}\big) \\ & = & 2 \times \dfrac{2}{3} + 3 \times \dfrac{8}{27} + 4 \times \dfrac{1}{27} \\ & = & \dfrac{36 + 24 + 4}{27} \ = \ \dfrac{64}{27}\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \frac{64}{27}}$$

□

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- À chaque instant k, l'expérience consiste au tirage d'une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Cette expérience possède donc n issues équiprobables.
  La v.a.r. N_k désigne le numéro obtenu lors de ce tirage.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } N_k \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

- La v.a.r. N_k possède une espérance et une variance car suit une loi usuelle.

  $$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N_k) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_k) = \frac{n^2 - 1}{12}}$$

□

4. Calculer $\mathbb{P}(\{X_n = n+1\})$.

Démonstration.

- L'événement $\{X_n = n+1\}$ est réalisé si et seulement si c'est le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  × ...
  × le numéro obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  × le numéro obtenu au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage.

  Ainsi, les numéros obtenus lors des n premiers tirages forment une séquence strictement décroissante. On en déduit, comme en question ***1.a)*** :

  $$\{X_n = n+1\} = \{N_1 = n\} \cap \ldots \cap \{N_n = 1\}$$

On en déduit, comme en question ***1.a)*** : $\{X_n = n+1\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{N_i = n+1-i\}$.

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{X_n = n+1\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{N_i = n+1-i\}\big) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_i = n+1-i\}\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], N_i \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_n = n+1\}\big) = \left(\frac{1}{n}\right)^n}$$

□

5. Montrer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $\mathbb{P}_{\{N_1=i\}}(\{X_n = 2\}) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
Si l'événement $\{N_1 = i\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée i lors du 1er tirage.
L'événement $\{X_n = 2\}$ est alors réalisé si on a obtenu une boule portant un numéro supérieur ou égal à i lors du 2ème tirage, c'est-à-dire portant un numéro dans l'ensemble $[\![i,n]\!]$.
Il y a $n-i+1$ boules vérifiant cette condition.

Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on en déduit :
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}_{\{N_1=i\}}(\{X_n = 2\}) = \dfrac{n-i+1}{n}$

Commentaire

- On pouvait aussi effectuer cette démonstration en revenant à la définition de probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{\{N_1=i\}}\big(\{X_n = 2\}\big) = \frac{\mathbb{P}\big(\{N_1 = i\} \cap \{X_n = 2\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big)}$$

L'événement $\{N_1 = i\} \cap \{X_n = 2\}$ est réalisé si et seulement si on a obtenu la boule numérotée i au 1er tirage et une boule portant un numéro supérieur ou égal lors du 2ème tirage. Ainsi :

$$\{N_1 = i\} \cap \{X_n = 2\} = \{N_1 = i\} \cap \{i \leqslant N_2 \leqslant n\}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\} \cap \{X_n = 2\}\big) & = & \mathbb{P}\left(\{N_1 = i\} \cap \{i \leqslant N_2 \leqslant n\}\right) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{i \leqslant N_2 \leqslant n\}\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big) \times \mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{k=i}^{n} \{N_2 = k\}\big) & \end{array}$$

Enfin, les événements de la réunion étant 2 à 2 incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{k=i}^{n} \{N_2 = k\}\big) = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_2 = k\}\big) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n-i+1}{n}$$

□

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big)$.

Démonstration.
La famille $\big(\{N_1 = i\}\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\} \cap \{X_n = 2\}\big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big) \times \mathbb{P}_{\{N_1=i\}}\big(\{X_n = 2\}\big) & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], \ \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n}\, \dfrac{n-i+1}{n} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{j}{n^2} & \textit{(en posant } j = n-i+1\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{j=1}^{n} j \ = \ \dfrac{1}{n^2}\, \dfrac{n(n+1)}{2} \ = \ \dfrac{n+1}{2n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) = \frac{n+1}{2n}}$$

□

7. Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $\{X_n > k\} = \{N_1 > N_2 > \ldots > N_k\}$.
En déduire que $\mathbb{P}(\{X_n > k\}) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

Démonstration.

- L'événement $\{X_n > k\}$ est réalisé si et seulement si la boule portant un numéro supérieur ou égal au celle du tirage précédent est tirée au mieux lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Cela signifie que :
  - × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  - × ...
  - × le numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage.

  Ainsi, les numéros obtenus lors des k premiers tirages forment une séquence strictement décroissante.
  $\boxed{\text{On en déduit : } \{X_n > k\} = \{N_1 > N_2\} \cap \{N_2 > N_3\} \cap \ldots \cap \{N_{k-1} > N_k\}.}$

Commentaire

L'énoncé présente l'écriture $\{N_1 > N_2 > \ldots > N_k\}$.

- Rappelons tout d'abord que le symbole $>$ est utilisé pour représenter la relation binaire liant 2 réels a et b : on note $a > b$ si a est strictement plus petit que b. Du fait du caractère transitif de cette relation, on se permet l'abus de notation : $a > b > c$ où c est un réel.
Rappelons : $a > b > c \Leftrightarrow (a > b \ \texttt{ET} \ b > c)$.
- Ces rappels étant faits, revenons à l'événement considéré :

$$\begin{aligned}
& \{N_1 > N_2 > \ldots > N_k\} \\
= \ & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) > \ldots > N_k(\omega)\ \} \\
= \ & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) \ \texttt{ET} \ N_2(\omega) > N_3(\omega) \ \texttt{ET} \ \ldots \ \texttt{ET} \ N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\
= \ & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega)\ \} \cap \ldots \cap \{\ \omega \in \Omega \mid N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\
= \ & \{N_1 > N_2\} \cap \{N_2 > N_3\} \cap \ldots \cap \{N_{k-1} > N_k\}
\end{aligned}$$

- L'événement $\{X_n > k\}$ est réalisé par tous les $(n+1)$-tirages commençant par une séquence strictement décroissante de k entiers.
Un tel $(n+1)$-tirage est entièrement déterminé par :
  × les k premiers entiers formant une séquence strictement décroissante : $\dbinom{n}{k}$ possibilités.
  En effet, une k-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$ est entièrement déterminée par le choix des k entiers différents de $[\![1, n]\!]$ constituant cette séquence. Une fois ces k entiers choisis, ils sont rangés dans l'ordre décroissant, ce qui ne forme qu'une seule k-séquence.
  Autrement dit, une partie à k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ fournit une et une seule k-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc une bijection entre l'ensemble des k-séquence strictement décroissante et l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$.
  × le $(k+1)^{\text{ème}}$ élément : n possibilités.
  × ...
  × le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément : n possibilités.
Il y a donc en tout $\dbinom{n}{k} \ n^{(n+1)-(k+1)+1} = \dbinom{n}{k} \ n^{n+1-k}$ tels $(n+1)$-tirages.
L'univers Ω, formé de tous les $(n+1)$-tirages est de cardinal : $\text{Card}(\Omega) = n^{n+1}$.
On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n > k\}\big) = \frac{\text{Card}\big(\{X_n > k\}\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k} \ n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_n > k\}\big) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}}$$

- Vérifions maintenant que cette formule est aussi vérifiée en $k = 0$ et $k = 1$.
  × Si $k = 0$:
    - D'une part : $\dfrac{1}{n^0}\dbinom{n}{0} = 1$.
    - D'autre part : $\{X_n > 0\} = \Omega$ car X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
    Ainsi, $\mathbb{P}\big(\{X_n > 0\}\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  × Si $k = 1$:
    - D'une part : $\dfrac{1}{n^1}\dbinom{n}{1} = \dfrac{1}{n} \ n = 1$.

- D'autre part : $\{X_n > 1\} = \Omega$ car X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
  Ainsi, $\mathbb{P}\big(\{X_n > 0\}\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } k = 0 \text{ et } k = 1.}$$

□

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(\{X_n = k\})$ à l'aide de $\mathbb{P}(\{X_n > k-1\})$ et de $\mathbb{P}(\{X_n > k\})$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.
Remarquons tout d'abord que, comme X_n **est à valeurs entières** :

$$\{X_n > k-1\} = \{X_n = k\} \cup \{X_n > k\}$$

Les événements $\{X_n = k\}$ et $\{X_n > k\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) = \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \mathbb{P}(\{X_n > k\})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X_n > k\}).}$$

□

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\})$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X_n admet une espérance car elle est finie.
- De plus :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_n) \\
= \ & \sum_{k \in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k\, \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k \Big(\ \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) - \ \mathbb{P}(\{X_n > k\})\Big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k\, \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) - \sum_{k=2}^{n+1} k\, \mathbb{P}(\{X_n > k\}) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} (k+1)\ \mathbb{P}(\{X_n > k\}) - \sum_{k=2}^{n+1} k\, \mathbb{P}(\{X_n > k\}) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}(\{X_n > k\}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\}) - \sum_{k=2}^{n+1} k\ \mathbb{P}(\{X_n > k\}) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 1 \times \mathbb{P}(\{X_n > 1\}) + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\ \mathbb{P}(\{X_n > k\})} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\}) - \Big(\cancel{\sum_{k=2}^{n} k\ \mathbb{P}(\{X_n > k\}} + (n+1)\ \mathbb{P}(\{X_n > n + \\
= \ & \mathbb{P}(\{X_n > 0\}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\}) - (n+1)\ \mathbb{P}(\{X_n > n+1\}) && \textit{(car } \{X_n > 1\} = \Omega = \{X_n > 0\}\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\}) - (n+1)\ \cancel{\mathbb{P}(\{X_n > n+1\})} && \textit{(car } \{X_n > n+1\} = \varnothing\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n > k\}\big)}$$

Commentaire

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$k\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = (k-1)\ \mathbb{P}(\{X > k-1\}) - k\ \mathbb{P}(\{X > k\}) + \mathbb{P}(\{X > k-1\})$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} k\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) &= \sum_{k=2}^{n+1} \Big((k-1)\ \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) - k\ \mathbb{P}(\{X_n > k\})\Big) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) \\
&= (2-1)\ \mathbb{P}(\{X_n > 2-1\}) - (n+1)\ \mathbb{P}(\{X_n > n+1\}) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) \\
&= -(n+1)\ \mathbb{P}(\{X_n > n+1\}) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\}) \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

- Il reste à effectuer ce calcul de somme.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n > k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} && \textit{(d'après la question 7)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

□

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Notons tout d'abord que, d'après la question ***8.*** :

$$\mathbb{P}(\{X_n = k\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X_n > k\})$$

Deux cas se présentent.

× Si $k \in [\![2, n]\!]$: on raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rrcll}
 & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \mathbb{P}(\{X_n = k\}) & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \mathbb{P}(\{X_n > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X_n > k\}) & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k} & = & \dfrac{1}{n^{k-1}}\dbinom{n}{k-1} - \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k} & \textit{(d'après la question 7. avec } k-1 \in [\![1, n-1]\!] \textit{ et } k \in [\![2, n]\!]\textit{)} \\
\Leftrightarrow & (k-1)\dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \textit{(en multipliant par } n^k > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & k\dbinom{n+1}{k} - \dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \\
\Leftrightarrow & (n+1)\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n+1}{k} & = & n\dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n}{k} & \textit{(en appliquant l'égalité } k\dbinom{m}{k} = m\dbinom{m-1}{k-1} \textit{ en } m = n+1\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \cancel{n\dbinom{n}{k-1}} + \dbinom{n}{k-1} - \dbinom{n+1}{k} & = & \cancel{n\dbinom{n}{k-1}} - \dbinom{n}{k} & \\
\Leftrightarrow & \dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} & = & \dbinom{n+1}{k} & \textit{(en réordonnant)}
\end{array}$$

La dernière égalité n'est autre qu'une instance de la formule du triangle de Pascal.
La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![2, n]\!] : \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}.}$$

× Si $k = n + 1$:

- D'une part :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{X_n = n+1\}) & = & \mathbb{P}(\{X_n > n\}) - \cancel{\mathbb{P}(\{X_n > n+1\})} & \textit{(car } X_n \textit{ est à valeurs dans } [\![2, n+1]\!]\textit{)} \\
 & = & \dfrac{1}{n^n}\dbinom{n+1}{n} & \textit{(d'après la question 7.)}
\end{array}$$

- D'autre part :

$$\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)-1}{n^{n+1}}\binom{n+1}{n+1} = \frac{n}{n^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la propriété est aussi vérifiée en } k = n+1.}$$

□

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \dfrac{k-1}{k!}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$ et soit $n \geqslant k$.
(on peut prendre n aussi grand que souhaité car on s'intéresse à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ d'une quantité dépendant de n)

D'après la question précédente, comme $k \in [\![2, n+1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_n = k\}) &= \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} \\
&= \frac{k-1}{n^k}\,\frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} \\
&= \frac{k-1}{k!}\,\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}}{n^k} \\
&= \frac{k-1}{k!}\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,\dots\,((n+1)-(k-1))}{n^k} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k-1}{k!}\,\frac{n^k}{n^k} = \frac{k-1}{k!}
\end{aligned}$$

En effet, le numérateur apparaît comme produit de k termes tous équivalents, lorsque n est dans un voisinage de $+\infty$, à n.

$$\boxed{\text{Comme } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{k!}, \text{ on a bien : } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = \frac{k-1}{k!}.}$$

□

12. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.
On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathbb{P}(\{Z = k\}) = \frac{k-1}{k!}$$

Démonstration.
Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}}\right) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}} - \frac{1}{1!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + 1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Cette limite est obtenue en reconnaissant les sommes partielles d'ordre $N-1$ et N de la série exponentielle de paramètre 1 qui est une série convergente.

On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ est convergente, de somme $\sum\limits_{k\geqslant 2}^{+\infty} \dfrac{k-1}{k!} = 1$.

Commentaire

- On prêtera toujours attention à la formulation des questions de l'énoncé. Une question du type « cette série est-elle convergente ? » suggère que la série en question ne l'est sans doute pas. On orientera donc ses recherches en ce sens dans un premier temps.
- Pour une question du type « montrer que cette série est convergente » sans que le calcul de somme soit demandé, on pensera en priorité à un théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- Ici, on est confonté à la question « montrer que cette série est convergente et calculer sa somme ». Le calcul de la somme (comme limite de le somme partielle) démontre la convergence et fournit le résultat du calcul demandé. C'est cette méthode qu'il faut regarder en priorité pour ce type de questions.
- La deuxième partie de la question aurait pu être formulée sous la forme « démontrer que la suite $\left(\frac{k-1}{k!}\right)_{k\geqslant 2}$ fournit une loi de probabilité ». Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{k-1}{k!} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \ = \ 1$$

C'est bien le cas ici. On considère alors une v.a.r. Z discrète qui suit cette loi. □

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} k\ \mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big) \ &= \ \sum_{k=2}^{N} k\ \frac{k-1}{k!} \\
&= \ \sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{(k-1)!} \\
&= \ \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} \\
&= \ \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

Or : $\sum\limits_{k=0}^{N-2} \dfrac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ en reconnaissant la somme partielle d'ordre $N-2$ de la série exponentielle de paramètre 1.

Ainsi, la v.a.r. admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) = \mathrm{e}^1$.

- Par ailleurs, on a vu en question ***9.*** :

$$\mathbb{E}(X_n) \ = \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ = \ \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\dfrac{1}{n} = 1$.

On en déduit, par composition de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \;=\; e^1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(Z) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n).}$$

Commentaire

On a démontré :
1) X_n converge en loi vers Z (question ***11.***),
2) $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$ (dans cette question).
Cela pourrait laisser penser que **1)** implique **2)**... Il n'en est rien :

$$X_n \text{ converge en loi vers } Z \quad \not\Rightarrow \quad \mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$$

De manière générale, on retiendra que la convergence en loi **n'implique pas** la convergence des moments (et vice versa évidemment).

□

Exercice : (`EDHEC 2015 voie S`)

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\dbinom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}$.

Démonstration.
Soit n dans un voisinage de $+\infty$.

$$\binom{n}{r} \;=\; \frac{n!}{r!(n-r)!} \;=\; \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(r-1))}{r!}$$

Or, pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$: $n-i \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

On en déduit : $n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(r-1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^r$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.}$$

Commentaire

Il est important de bien comprendre que la variable r est un entier indépendant de n fixé en début d'énoncé. Cela permet notamment d'obtenir :

$$\frac{n-(r-1)}{n} = 1 - \frac{r-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui démontre : $n-(r-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

□

2. ***a)*** Donner la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{r+2}\, x^n$.

Démonstration.
Comme $x \in \,]0,1[$, alors : $\dfrac{1}{x} > 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par croissances comparées : } n^{r+2}\, x^n \;=\; \dfrac{n^{r+2}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

□

b) En déduire que la série $\sum \dbinom{n}{r} x^n$ est convergente.

Démonstration.
On a :

× $\forall n \in \mathbb{N},\ \dbinom{n}{r} x^n \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× $\dbinom{n}{r} x^n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet : $\dfrac{\binom{n}{r} x^n}{\frac{1}{n^2}} \;=\; \binom{n}{r} n^2\, x^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}\, n^2\, x^n \;=\; \dfrac{1}{r!}\, n^{r+2}\, x^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

× La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente car c'est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par critère d'équivalence des séries à termes positifs,} \\ \text{que la série } \sum \dbinom{n}{r} x^n \text{ est convergente.}\end{array}}$$

□

3. ***a)*** Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} \dbinom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de S_0.

Démonstration.

- Soit $r \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente la série $\sum \dbinom{n}{r} x^n$ est convergente.
  Ainsi, la somme S_r est bien définie.
- De plus :

$$S_0 \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x}$$

  On reconnaît en effet la somme d'une série géométrique de raison $x \in \,]0,1[$.

$$\boxed{S_0 = \frac{1}{1-x}}$$

□

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal : $(1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(1-x)\, S_{r+1} &= (1-x) \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n \\
&= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} \right) - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\
&= \binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \left(\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} \right)\, x^{n+1} \\
&= \binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} \qquad \textit{(car } \binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}\textit{)} \\
&= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} \qquad \textit{(en reconnaissant le premier terme de la somme)} \\
&= x \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } (1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r.}$$

□

c) En déduire : $\forall x \in \,]0,1[, \; \forall r \in \mathbb{N}, \; \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\, x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,1[$.
Démontrons par récurrence : $\forall r \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(r)$ où $\mathcal{P}(r) : S_r = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $S_0 = \dfrac{1}{1-x}$.
  - D'autre part : $\dfrac{x^0}{(1-x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1-x}$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $r \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(r)$ et démontrons $\mathcal{P}(r+1)$ (*i.e.* $S_{r+1} = \dfrac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}}$).
  On a :

$$\begin{aligned}
S_{r+1} &= \frac{x}{1-x}\, S_r \qquad \textit{(d'après la question } \boldsymbol{3.b}\textit{))} \\
&= \frac{x}{1-x}\, \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(r+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall r \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(r).}$$ □

d) Donner enfin la valeur de $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = x^{-r} \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n} = x^{-r} \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

$$\boxed{\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}}$$ □

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$.
Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

× X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
× Y le nombre de manches gagnées par le joueur.
× G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

4. a) Donner la loi de X.
(on pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche »)

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
  En effet, le joueur peut être disqualifié avant même de jouer la première manche (dans ce cas, il n'a joué aucune manche) ou peut être disqualifié à l'issue de n'importe quelle manche suivante. Il peut donc jouer un nombre quelconque de manches.
  $$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$$
- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  L'événement $\{X = k\}$ est réalisé si et seulement si le joueur a joué k manches. Autrement dit, s'il a joué les k premières manches et a été disqualifié à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ manche. Ainsi :
  $$\{X = k\} = \overline{D_1} \cap \ldots \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}(\{X = k\}) &= \mathbb{P}\Big(\overline{D_1} \cap \ldots \cap \overline{D_{k-1}} \cap D_k\Big) \\
  &= \mathbb{P}\Big(\overline{D_1}\Big) \times \ldots \times \mathbb{P}\Big(\overline{D_k}\Big) \times \mathbb{P}(D_{k+1}) \quad \textit{(car les manches sont jouées de façon indépendante)} \\
  &= (1-\alpha) \times \ldots \times (1-\alpha) \times \alpha \\
  &= (1-\alpha)^k \, \alpha
  \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = (1-\alpha)^k \ \alpha}$$

Commentaire

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours.
C'est particulièrement le cas dans cet énoncé :

- on reconnaît ici la démonstration de cours, à un décalage d'indice près (*cf* question suivante) permettant d'illustrer la loi géométrique.
- on demande dans la question qui suit les propriétés caractéristiques de la loi géométrique. □

b) On pose $T = X + 1$. Démontrer que T suit la loi géométrique de paramètre α.

Démonstration.

- Tout d'abord : $T(\Omega) = (X+1)(\Omega) = \{x+1 \mid x \in \ X(\Omega)\} = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{T = k\}) & = & \mathbb{P}(\{X+1 = k\}) & \\ & = & \mathbb{P}(\{X = k-1\}) & \\ & = & (1-\alpha)^{k-1}\ \alpha & \textit{(d'après la question précédente et car } k-1 \in \mathbb{N}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } T \sim \mathcal{G}(\alpha).}$$ □

c) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Comme $T \sim \mathcal{G}(\alpha)$, T admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(T) \ = \ \frac{1}{\alpha} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(T) \ = \ \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.}$$

- Or, par définition : $X = T - 1$.
La v.a.r. X admet une espérance et une variance comme transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance et une variance. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X) & = & \mathbb{E}(T-1) & \\ & = & \mathbb{E}(T) - 1 & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{\alpha} - 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(X) \ = \ \frac{1-\alpha}{\alpha}.}$$

Et :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(X) & = & \mathbb{V}(T-1) & \\ & = & \mathbb{V}(T) & \textit{(par propriété de la variance)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}(X) \ = \ \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.}$$ □

5. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
Déterminer, en distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$ la probabilité $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big)$.

Démonstration.

- Si l'événement $\{X = n\}$ est réalisé, c'est que le joueur a joué n manches avant d'être disqualifié.
  - × Ces n manches correspondent à une expérience consistant en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (correspondant à la probabilité de gagner un euro au cours de la manche).
  - × La v.a.r. Y compte le nombre de succès au cours de cette expérience.

On en déduit : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big) = \dbinom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$.
Et : $\forall k > n$, $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big) = 0$.

Commentaire

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on s'intéresse à l'application $\mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y = \cdot\})$ définie par :

$$\mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y = \cdot\}) \ : \ \begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \mathbb{P}_{\{X=n\}}(\{Y = k\}) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = k\})}{\mathbb{P}(\{X = n\})} \end{array}$$

  Cette application est appelée loi conditionnelle de Y relativement à l'événement $\{X = n\}$. On parle aussi de loi conditionnelle de Y sachant que l'événement $\{X = n\}$ est réalisé. Cette définition sera vue dans le chapitre « Couples de v.a.r. discrètes ».
- On démontre dans cette question que la loi conditionnelle de la v.a.r. Y relativement à l'événement $\{X = n\}$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

□

b) En déduire à l'aide de la **Partie 1** la loi de Y.

Démonstration.

- Notons tout d'abord : $\mathbb{P}_{\{X=0\}}(\{Y = 0\}) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}_{\{X=0\}}(\{Y = k\}) = 0$.
  En effet, si $\{X = 0\}$ est réalisé, c'est que le joueur est disqualifié avant d'avoir pu jouer la première manche. Dans ce cas, il ne gagne aucune manche et Y prend donc la valeur 0.

  Ainsi, la formule de la question précédente est valable dans le cas $n = 0$.
- La famille $\big(\{X = n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=n\} \cap \{Y=k\}\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y=k\}\big) && \textit{(car pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)\, \cancel{\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y=k\}\big)} + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y=k\}\big) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n\, \alpha \binom{n}{k} p^k\, (1-p)^{n-k} && \textit{(d'après les questions } \textbf{4.a)} \textit{ et } \textbf{5.a)}\textit{)} \\
&= \alpha\, p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-\alpha)^n\, (1-p)^{n-k} \\
&= \alpha\, (1-\alpha)^k\, p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \big((1-\alpha)\,(1-p)\big)^{n-k} \\
&= \alpha\, (1-\alpha)^k\, p^k\, \frac{1}{\big(1-(1-\alpha)\,(1-p)\big)^{k+1}} && \textit{(d'après } \textbf{3.d)} \textit{ avec } r=k \textit{ et } x=(1-\alpha)\,(1-p)\textit{)} \\
&= \alpha\, (1-\alpha)^k\, p^k\, \frac{1}{\big(\cancel{1}-(\cancel{1}-p-\alpha+\alpha\, p)\big)^{k+1}} \\
&= \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\, \frac{(1-\alpha)^k\, p^k}{(p+\alpha-\alpha\, p)^k} = \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p} \left(\frac{(1-\alpha)\, p}{p+\alpha-\alpha\, p}\right)^k
\end{aligned}$$

- Enfin, on remarque :

$$\frac{(1-\alpha)\, p}{p+\alpha-\alpha\, p} = \frac{p-\alpha\, p}{p+\alpha-\alpha\, p} = \frac{(p+\alpha-\alpha\, p)-\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p} = 1 - \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big) = \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p} \left(1 - \frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\right)^k.}$$

Commentaire

- La démonstration est une illustration d'une méthode classique : connaissant la loi conditionnelle de Y relativement à $\{X = n\}$ (*i.e.* l'application $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = \cdot\}\big)$), on obtient la loi de Y (*i.e.* l'application $\mathbb{P}\big(\{Y = \cdot\}\big)$) par l'utilisation de la formule des probabilités totales. Cette méthode sera vue dans le chapitre « Couples de v.a.r. discrètes ».
- Cette méthode ne présente pas de difficulté conceptuelle : il s'agit simplement d'appliquer la formule des probabilités totales.
  En revanche, cette question soulève quelques difficultés techniques :
  × le résultat des quesitons ***4.a)*** et ***5.a)*** doivent être connus pour traiter cette question.
  × la valeur de $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big)$ dépend de la situation de k par rapport à n. Plus précisément, il faut vérifier que la condition $k \leqslant n$ est respectée si l'on souhaite écrire : $\mathbb{P}_{\{X=n\}}\big(\{Y = k\}\big) = \dbinom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$.
  × on manipule plusieurs variables. La variable n est muette (variable d'itération), la variable k a elle été introduite en début de démonstration et est donc fixée une bonne fois pour toute. Il reste alors à manipuler correctement les variables α et p qui sont des variables globales de l'énoncé.

  Il faut donc être particulièrement vigilant et faire preuve de rigueur pour éviter toute erreur de manipulation. Si de telles erreurs peuvent se produire, il est par contre interdit de ne pas connaître la manière de traiter une telle question : il suffit d'appliquer la méthode vue en cours. □

6. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

Démonstration.

- Par analogie avec la question ***4.b)***, on introduit la v.a.r. $Z = Y + 1$. On a alors :
  × $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$
  × $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = \dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p} \left(1 - \dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\right)^{k-1}$

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\right).}$$

- La v.a.r. Z admet une espérance et une variance car elle suit une loi usuelle.
  Comme $Y = Z - 1$, la v.a.r. Y admet une espérance et une variance comme transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance et une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) \ = \ \mathbb{E}(Z-1) \ = \ \mathbb{E}(Z) - 1 \ = \ \dfrac{1}{\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}} - 1 \ = \ \dfrac{p+\alpha-\alpha\, p}{\alpha} - 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{p-\alpha\, p}{\alpha} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\; p}$$

Et :

$$\mathbb{V}(Y) \ = \ \mathbb{V}(Z-1) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \dfrac{1-\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}}{\left(\frac{\alpha}{p+\alpha-\alpha\, p}\right)^2} \ = \ \left(\dfrac{p+\alpha-\alpha\, p}{\alpha}\right)^2 \ \dfrac{p-\alpha\, p}{p+\alpha-\alpha\, p}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}.}$$

□

7. a) Exprimer G en fonction de X et Y.

Démonstration.
D'après l'énoncé, le joueur :

× gagne un euro à chaque manche gagnée.

× perd un euro à chaque manche perdue.

Or le nombre de manches gagnées est donné par la v.a.r. Y.
Le nombre de manches jouées étant donné par la v.a.r. X, le nombre de manches perdues est donné par : $Y - X$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } G = 1 \cdot Y - 1 \cdot (X - Y) = 2Y - X.}$$

□

b) En déduire l'espérance de G.

Démonstration.

- La v.a.r. G admet une espérance car est la combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(G) & = & \mathbb{E}(2Y - X) & \\ & = & 2\,\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & 2\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\,p - \dfrac{1-\alpha}{\alpha} & \\ & = & \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\,(2p-1) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) \;=\; \frac{1-\alpha}{\alpha}\,(2p-1)}$$

□

Exercice : (EML 2018 voie S)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP$$

Commentaire

L'énoncé prend le parti de noter indifféremment P et $P(X)$, ce qui permet d'alléger les notations. En contrepartie, ce choix peut amener à des confusions sur les objets manipulés. Afin d'aviter ces confusions, on évitera, dans ce corrigé, d'utiliser l'abus de notations autorisé par l'énoncé.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P_1, P_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
& \big(\varphi(\lambda \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(X) \\
= \ & \frac{1}{n}\, X(1-X)(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)'(X) + X(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)(X) \\
= \ & \frac{1}{n}\, X(1-X)\big(\lambda_1 \cdot P_1'(X) + \lambda_2 \cdot P_2'(X)\big) + \lambda_1 \cdot X\, P_1(X) + \lambda_2 \cdot X\, P_2(X) && \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
= \ & \lambda_1 \cdot \left(\frac{1}{n}\, X(1-X)P_1'(X) + X\, P_1(X)\right) + \lambda_2 \cdot \left(\frac{1}{n}\, X(1-X)P_2'(X) + X\, P_2(X)\right) \\
= \ & \lambda_1 \cdot \big(\varphi(P_1)\big)(X) + \lambda_2 \cdot \big(\varphi(P_2)\big)(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } \varphi \text{ est linéaire.}}$$

□

b) Calculer $\varphi\,(X^n)$.

Démonstration.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $Q_k(X) = X^k$, et donc $Q_k'(X) = kX^{k-1}$.

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(Q_n)\big)(X) \ &= \ \frac{1}{\cancel{n}}\, X(1-X)\, \cancel{n}\, X^{n-1} + X\ X^n \\
&= \ X^n(1-X) + X^{n+1} \\
&= \ X^n - \cancel{X^{n+1}} + \cancel{X^{n+1}} \\
&= \ X^n \ = \ Q_n(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(Q_n) \ = \ Q_n}$$

Commentaire

On remarque alors que le polynôme Q_n est vecteur propre de φ associé à la valeur propre 1.

□

c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- On sait déjà d'après la question ***1.*** tel que φ est une application linéaire.
- Montrons : $\forall P \in E,\ \varphi(P) \in E$.
  Soit $P \in E$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P(X) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k\ X^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k\ Q_k(X)$$

× Comme φ est linéaire : $\varphi(P) \ = \ \varphi\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\ Q_k\right) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\ \varphi(Q_k)$.
On en déduit : $\deg\big(\varphi(P)\big) \ \leqslant \ \max\Big(\deg\big(\varphi(Q_0), \dots \varphi(Q_n)\big)\Big)$.

× Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Par définition : $\big(\varphi(Q_k)\big)(X) = \dfrac{1}{n}\ X(1-X)Q_k'(X) + XQ_k(X)$.

Ainsi :
$$\begin{array}{rcl} \deg\Big(\big(\varphi(Q_k)\big)(X)\Big) & = & \deg\Big(\dfrac{1}{n}\ X(1-X)Q_k'(X) + XQ_k(X)\Big) \\ & \leqslant & \max\Big(\deg\Big(\dfrac{1}{n}\ X(1-X)Q_k'(X)\Big), \deg\Big(XQ_k(X)\Big)\Big) \\ & = & \max\Big(k+1, k+1\Big) \ = \ k+1 \end{array}$$

(on peut aussi calculer : $\big(\varphi(Q_k)\big)(X) = \dfrac{k}{n}\ X^k + \dfrac{n-k}{n}\ X^{k+1}$*)*

On en déduit en particulier : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(\varphi(Q_k)) \leqslant k+1 \leqslant n$.

× De plus, d'après la question précédente : $\deg(\varphi(Q_n)) = n$

Finalement, on obtient : $\deg(P) \leqslant n$. Autrement dit : $\varphi(P) \in E$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

2. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcl} P_k'(X) & = & kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1} \\ & = & X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}\big(k(1-X) - (n-k)X\big) \\ & = & X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k - nX) \end{array}$$
- On en déduit :
$$\begin{array}{rcl} \big(\varphi(P_k)\big)(X) & = & \dfrac{1}{n}\ X(1-X)X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}(k-nX) + X\,X^k(1-X)^{n-k} \\ & = & \dfrac{1}{n}\ X^k(1-X)^{n-k}(k-nX) + X\,X^k(1-X)^{n-k} \\ & = & X^k(1-X)^{n-k}\left(\dfrac{1}{n}(k-nX) + X\right) \\ & = & X^k(1-X)^{n-k}\left(\dfrac{k}{n} - \cancel{X} + \cancel{X}\right) \ = \ \dfrac{k}{n}\ X^k(1-X)^{n-k} \ = \ \dfrac{k}{n}\ P_k(X) \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \varphi(P_k) = \dfrac{k}{n}\ P_k}$$

□

b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathscr{B}' = (P_0, \ldots, P_n)$ est libre.
Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Supposons :
$$\lambda_0 \cdot P_0 + \lambda_1 \cdot P_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \lambda_n \cdot P_n \ = \ 0_E$$
Ainsi, par définition :
$$\lambda_0 \cdot (1-X)^n + \lambda_1 \cdot X(1-X)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot X^{n-1}(1-X) + \lambda_n \cdot X^n \ = \ 0_E$$
Ce qui revient à dire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0\ (1-x)^n + \lambda_1\ x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot x^{n-1}(1-x) + \lambda_n\ x^n \ = \ 0 \quad (*)$$

- En appliquant l'égalité $(*)$ en $x = 1$, on obtient :
$$\lambda_0 \, \cancel{(1-1)^n} + \lambda_1 \, \cancel{1\,(1-1)^{n-1}} + \cdots + \lambda_{n-1} \, \cancel{1^{n-1}\,(1-1)} + \lambda_n \, 1^n \ = \ 0$$
Et on a donc : $\lambda_n = 0$. L'égalité $(*)$ se réécrit alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda_0 \ (1-x)^n + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1}(1-x) \ = \ 0$$
On peut alors factoriser par $(1-x)$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (1-x)\big(\lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1}\big) \ = \ 0$$
Ce qui permet de conclure, en divisant par $(1-x)$:
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1} \ = \ 0$$
Enfin, comme la fonction $P : x \mapsto \lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1}$ est polynomiale, elle est continue et cette égalité est aussi vérifiée en 0 (par passage à la limite, on obtient : $P(1) = \lim\limits_{x \to 1} P(x) = 0$). Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \lambda_0 \ (1-x)^{n-1} + \lambda_1 \ x(1-x)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1} \ x^{n-1} \ = \ 0 \quad (**)$$
- On peut alors itérer le procédé consistant à évaluer en 1 puis mettre en facteur et diviser par $(1-x)$. On obtient alors au bout de n étapes :
$$\lambda_n \ = \ \lambda_{n-1} \ = \ \cdots \ = \ \lambda_1 \ = \ \lambda_0 = 0$$
$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est libre.}}$$

Commentaire

- Dans la question précédente, on a démontré que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_k) = \dfrac{k}{n} \cdot P_k$.
On dit alors (*cf* cours à venir sur la réduciton d'endomorphismes) que P_k est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\dfrac{k}{n}$.
- Ainsi, la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de $n+1$ vecteurs associés à $n+1$ valeurs propres distinctes. Cela permet d'affirmer (*cf* cours à venir) que cette famille est libre.

- On en déduit que la famille $\mathscr{B}'$:
  - × est libre,
  - × vérifie : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(E)$

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}' \text{ est donc une base de } E.}$$

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
D'après la question ***2.a)*** :
$$\varphi(P_k) \ = \ 0 \cdot P_0 + \cdots + 0 \cdot P_{k-1} + \frac{k}{n} \cdot P_k + 0 \cdot P_{k+1} + \cdots + 0 \cdot P_n$$
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi(P_k)) \ = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{k}{n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (où le coefficient $\dfrac{k}{n}$ est en $k^{\text{ème}}$ position).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

3. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $k^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

a) Déterminer la loi de Z_2.

Démonstration.

- En deux tirages, deux cas se présentent :
  - × soit on obtient le même numéro aux deux tirages, c'est-à-dire $\{Z_2 = 0\}$ est réalisé,
  - × soit on obtient deux numéros distincts sur les deux tirages, c'est-à-dire $\{Z_2 = 1\}$ est réalisé.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z_2(\Omega) \ = \ \{0, 1\}.}$$

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit la v.a.r. T_i correspondant au numéro obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage.
  Lors du $i^{\text{ème}}$ tirage, l'expérience possède n issues différentes (on peut tirer n'importe laquelle des n boules) qui sont équiprobables.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall i \in [\![1, n]\!],\ T_i \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

  Notons au passage que les v.a.r. T_i sont indépendantes car les tirages le sont.

- La famille $(\{T_1 = k\})_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{Z_2 = 0\}) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{T_1 = k\} \cap \{Z_2 = 0\}) & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{T_1 = k\} \cap \{T_2 = k\}) & (*) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{T_1 = k\}) \times \mathbb{P}(\{T_2 = k\}) & \textit{(car } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} & \textit{(car } T_1 \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!]) \textit{ et } T_2 \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])\textit{)} \\ & = & \cancel{n} \times \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \ = \ \dfrac{1}{n} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } Z_2 \sim \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$

$(*)$: l'événement $\{T_1 = k\} \cap \{Z_2 = 0\}$ est réalisé si et seulement si :

× $\{T_1 = k\}$ est réalisé, c'est à dire qu'on a obtenu la boule numérotée k lors du 1^{er} tirage.

× **et** $\{Z_2 = 0\}$ est réalisé, c'est à dire que le $2^{\text{ème}}$ tirage a amené un numéro qui a déjà été tiré.
On a donc obtenu, lors de ce $2^{\text{ème}}$ tirage, la même boule qu'au 1^{er} tirage à savoir la la boule numérotée k.

On en déduit : $\{T_1 = k\} \cap \{Z_2 = 0\} = \{T_1 = k\} \cap \{T_2 = k\}$.

Commentaire

Comme l'énoncé introduit des variables aléatoires pour cet exercice (plutôt que des événements), on a ici privilégié l'introduction des v.a.r. T_i. Cependant, la démonstration s'effectue également en introduisant les événements $B_{i,j}$:

$$B_{i,j} \quad = \quad \text{« obtenir le numéro } j \text{ au } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

□

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{\{Y_k = j\}}\big(\{Z_{k+1} = 1\}\big)$.
En déduire : $\mathbb{P}\big(\{Z_{k+1} = 1\}\big) = 1 - \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(Y_k)$.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $Y_k(\Omega)$. Deux cas se présentent :

  × si $k < n$.
  Dans ce cas, lors des k premiers tirages on obtient au maximum k numéros distincts.

  $$\boxed{\text{Si } k < n \text{ alors } Y_k(\Omega) = [\![1, k]\!].}$$

  × si $k \geqslant n$.
  Dans ce cas, lors des k premiers tirages on obtient au maximum n numéros distincts (on ne peut obtenir plus de numéros distincts que de boules présentes dans l'urne).

  $$\boxed{\text{Si } k \geqslant n \text{ alors } Y_k(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

  $$\boxed{\text{On déduit de cette étude : } Y_k(\Omega) \ = \ [\![1, \min(k, n)]\!].}$$

- Soit $j \in [\![1, k]\!]$. Deux cas se présentent :

  × si $j > \min(k, n)$, alors : $\{Y_k = j\} = \varnothing$.
  (comme on a supposé $j \in [\![1, k]\!]$, cela correspond au cas où $n < j \leqslant k$)

  Dans ce cas, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{Y_k = j\}}(\{Z_{k+1} = 1\})$ n'est pas définie.

  Commentaire

  Il est assez naturel de faire cette disjonction de cas si on a déterminé correctement l'ensemble image dans la question précédente. Au vu de l'énoncé, il semble que le concepteur n'a pas pensé à ce cas. En conséquence, ne pas faire cette disjonction n'a certainement pas été sanctionné dans le barème officiel.

× si $j \leqslant \min(k, n)$.
(comme on a supposé $j \in [\![1, k]\!]$, cela correspond au cas où $j \leqslant n$)

Si l'événement $\{Y_k = j\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu j numéros distincts lors des k premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $\{Z_{k+1} = 1\}$ est réalisé si et seulement si le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage amène un numéro qui n'a pas été obtenu précédemment. Autrement dit, si l'on obtenu l'une des $n - j$ boules non encore piochées lors des k premiers tirages.
Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(\{Z_{k+1} = 1\}) \ = \ \frac{n-j}{n} \ = \ 1 - \frac{j}{n}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![1, \min(k, n)]\!],\ \mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(\{Z_{k+1} = 1\}) \ = \ 1 - \frac{j}{n}.}$$

- La famille $(\{Y_k = j\})_{j \in [\![1, \min(k,n)]\!]}$ forme un système complet d'événements (SCE).
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) &= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}(\{Y_k = j\} \cap \{Z_{k+1} = 1\}) \\
&= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}(\{Y_k = j\})\, \mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(\{Z_{k=1} = 1\}) && \textit{(car : } \forall j \in [\![1, k]\!], \ \mathbb{P}(\{Y_k = j\}) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}(\{Y_k = j\}) \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\min(k,n)} \mathbb{P}(\{Y_k = j\}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} j\, \mathbb{P}(\{Y_k = j\}) \\
&= 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\min(k,n)} j\, \mathbb{P}(\{Y_k = j\}) && \textit{(car } (\{Y_k = j\})_{j \in [\![1,\min(k,n)]\!]} \textit{ est un SCE)} \\
&= 1 - \frac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k) && \textit{(par définition de l'espérance)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) \ = \ 1 - \frac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k)}$$

□

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_{k+1} = 1\}\big) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{Z_j = 1\}\big)$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que le nombre de numéros distincts tirés lors des k premiers tirages est égal au nombre de tirages où l'on a tiré un numéro non encore apparu.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j.}$$

- Comme $Y_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Z_j$, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) & = & 1 - \dfrac{1}{n}\, \mathbb{E}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} Z_j\right) & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{E}(Z_j) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{array}$$

- Or, par définition de l'espérance, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$:

$$\mathbb{E}(Z_j) \ = \ \cancel{0 \times \mathbb{P}(\{Z_j = 0\})} + 1 \times \mathbb{P}(\{Z_j = 1\}) \ = \ \mathbb{P}(\{Z_j = 1\})$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) \ = \ 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{Z_j = 1\}).}$$

□

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}\big(\{Z_k = 1\}\big) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : \mathbb{P}(\{Z_k = 1\}) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

▸ **Initialisation** :
D'une part, Z_1 est la v.a.r. constante égale à 1. Donc : $\mathbb{P}(\{Z_1 = 1\}) = 1$.
D'autre part, : $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{1-1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{0} = 1$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Supposons : $\forall j \in [\![1, k]\!], \mathcal{P}(j)$, et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k}$).

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) & = & 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{Z_j = 1\}) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{j-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{j} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{n} \dfrac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{\cancel{1} - (\cancel{1} - \frac{1}{n})} & \textit{(car } 1 - \dfrac{1}{n} \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - \cancel{\dfrac{1}{n}} \dfrac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{\cancel{\frac{1}{n}}} & \\ & = & \cancel{1} - \cancel{1} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k} \ = \ \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{Z_k = 1\}) \ = \ \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}}$$

□

e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On rappelle qu'on a démontré en question ***3.b)*** :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) & = & 1 - \frac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k) \\ \text{donc} & \mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) - 1 & = & -\frac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k) \\ \text{d'où} & -n\big(\mathbb{P}(\{Z_{k+1} = 1\}) - 1\big) & = & \mathbb{E}(Y_k) \end{array}$$

- On obtient, grâce à la question précédente :

$$\mathbb{E}(Y_k) \ = \ -n \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \ = \ n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right)$$

- De plus, d'après l'énoncé : $Y_0 = 0$. Donc : $\mathbb{E}(Y_0) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_0) = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y_k) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right)}$$

□

4. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big(\, \{Y_k = i\}\,\big)\ X^i$$

a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

Démonstration.

- Par définition de G_0 :

$$G_0(X) \ = \ \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_0 = i\})\ X^i$$

Or Y_0 est la v.a.r. constante égale à 0. Donc :

$$\mathbb{P}(\{Y_0 = 0\}) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Y_0 = i\}) = 0$$

On en déduit :

$$G_0(X) \ = \ \mathbb{P}(\{Y_0 = 0\})\ X^0 + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{Y_0 = i\})\ X^i} \ = \ 1$$

$$\boxed{G_0(X) = 1}$$

- Par définition de G_1 :

$$G_1(X) \ = \ \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_1 = i\})\ X^i$$

× Déterminons la loi de Y_1.
En un seul tirage, on obtient obligatoirement un numéro (distinct). Donc $Y_1(\Omega) = \{1\}$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y_1 \text{ est la v.a.r. constante égale à 1.}}$$

× En particulier :

$$\mathbb{P}(\{Y_1 = 1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ \mathbb{P}(\{Y_1 = i\}) = 0$$

× On en déduit :

$$G_1(X) \;=\; \cancel{\mathbb{P}(\{Y_1 = 0\})\ X^0} + \mathbb{P}(\{Y_1 = 1\})\ X^1 + \cancel{\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(\{Y_1 = i\})\ X^i} \;=\; X$$

$$\boxed{G_1(X) = X}$$

- Par définition de G_2 :

$$G_2(X) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_2 = i\})\ X^i$$

× Déterminons la loi de Y_2.
En deux tirages, deux cas se présentent :

- soit on obtient le même numéro aux deux tirages, c'est-à-dire $\{Y_2 = 1\}$ est réalisé,
- soit on obtient deux numéros distincts sur les deux tirages, c'est-à-dire $\{Y_2 = 2\}$ est réalisé.

On en déduit : $Y_2(\Omega) \;=\; \{1, 2\}$.

× L'événement $\{Y_2 = 1\}$ est réalisé si et seulement si un seul numéro a été tiré lors des deux premiers tirages. Autrement dit, le $2^{\text{ème}}$ tirage a amené le même numéro que le premier.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \{Y_2 = 1\} \;=\; \{Z_2 = 0\}.}$$

On en déduit, d'après la question ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}(\{Y_2 = 1\} \;=\; \mathbb{P}(\{Z_2 = 0\}) \;=\; \frac{1}{n}$$

Comme la famille $(\{Y_2 = 1\}, \{Y_2 = 2\})$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}(\{Y_2 = 2\}) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\{Y_2 = 1\}) \;=\; 1 - \frac{1}{n}$$

Et donc, bien sûr :

$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\},\ \mathbb{P}(\{Y_2 = i\}) = 0$$

× Finalement :

$$\begin{aligned} G_2(X) \;&=\; \cancel{\mathbb{P}(\{Y_2 = 0\})\ X^0} + \mathbb{P}(\{Y_2 = 1\})\ X^1 + \mathbb{P}(\{Y_2 = 2\})\ X^2 + \cancel{\sum_{i=3}^{n} \mathbb{P}(\{Y_2 = i\})\ X^i} \\ &=\; \frac{1}{n}\ X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{G_2(X) = \frac{1}{n}\ X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) X^2}$$

□

b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(\{Y_{k+1} = i\}) = \frac{i}{n}\ \mathbb{P}\big(\,\{Y_k = i\}\,\big) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}\big([Y_k = i - 1]\big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Traitons tout d'abord le cas $k = 0$ qui amène à une étude particulière.
  En effet, rappelons que les v.a.r. Y_0 et Y_1 sont constantes :

$$Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad Y_1 = 1$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Par définition des v.a.r. Y_0 et Y_1 :

$$\mathbb{P}(\{Y_0 = i\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{Y_0 = i-1\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{cases}$$

On en déduit :

$$\frac{i}{n}\, \mathbb{P}\big(\{Y_0 = i\}\big) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}\big([Y_0 = i-1]\big) \;=\; \begin{cases} \frac{0}{n} & \text{si } i = 0 \\ 1 - \frac{1-1}{n} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{cases}$$

et on retrouve bien la valeur de $\mathbb{P}\big(\{Y_1 = i\}\big)$ puisque :

$$\mathbb{P}\big(\{Y_1 = i\}\big) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \in [\![2, n]\!] \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall i \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(\{Y_1 = i\}) \;=\; \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}(\{Y_0 = i-1\}) + \frac{i}{n}\, \mathbb{P}(\{Y_0 = i\}).}$$

- Considérons maintenant $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![2, n]\!]$.
  (Les cas $i = 0$ et $i = 1$ sont un peu à part car amène à considérer un nombre négatif de numéros distincts puisqu'alors $i - 1 \leqslant 0$. Ces cas sont traités en fin de question.)

  L'événement $\{Y_{k+1} = i\}$ est réalisé si et seulement si i numéros distincts ont été tirés lors des $k + 1$ premiers tirages. Cela résulte de deux cas :

  × soit on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages et le tirage suivant (le $(k+1)^{\text{ème}}$) a amené un numéro déjà obtenu.

  Autrement dit, l'événement : $\{Y_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = 0\}$ est réalisé.

  × soit on a obtenu $i - 1$ numéros distincts lors des k premiers tirages et le tirage suivant (le $(k+1)^{\text{ème}}$) a amené un nouveau numéro.

  Autrement dit, l'événement : $\{Y_k = i - 1\} \cap \{Z_{k+1} = 1\}$ est réalisé.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit :} \\ \{Y_{k+1} = i\} \;=\; \big(\{Y_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = 0\}\big) \cup \big(\{Y_k = i-1\} \cap \{Z_{k+1} = 1\}\big).\end{array}}$$

Par incompatibilité des événements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Y_{k+1} = i\}) &= \mathbb{P}\left(\{Y_k = i-1\} \cap \{Z_{k+1} = 1\}\right) + \mathbb{P}\left(\{Y_k = i\} \cap \{Z_{k+1} = 0\}\right) \\ &= \mathbb{P}(\{Y_k = i-1\})\, \mathbb{P}_{\{Y_k = i-1\}}\left(\{Z_{k+1} = 1\}\right) + \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\, \mathbb{P}_{\{Y_k = i\}}\left(\{Z_{k+1} = 0\}\right) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est valide car $\mathbb{P}(\{Y_k = i-1\}) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\{Y_k = i\}) \neq 0$ puisque $i \geqslant 2$.

Déterminons maintenant $\mathbb{P}_{\{Y_k = i-1\}}\left(\{Z_{k+1} = 1\}\right)$ et $\mathbb{P}_{\{Y_k = i\}}\left(\{Z_{k+1} = 0\}\right)$.

× Si l'événement $\{Y_k = i-1\}$ est réalisé, c'est que lors des k premiers tirages, on a tiré $i-1$ numéros distincts. Dans ce cas, l'événement $\{Z_{k+1} = 1\}$ est réalisé si et seulement si on pioche l'un des $n-(i-1)$ numéros restants.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{\{Y_k=i-1\}}(\{Z_{k+1}=1\}) = \frac{n-(i-1)}{n} = 1 - \frac{i-1}{n}.}$$

× Si l'événement $\{Y_k = i\}$ est réalisé, c'est que lors des k premiers tirages, on a tiré i numéros distincts. Dans ce cas, l'événement $\{Z_{k+1} = 0\}$ est réalisé si et seulement si on pioche l'un de ces i numéros.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{\{Y_k=i\}}(\{Z_{k+1}=0\}) = \frac{i}{n}.}$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![2,n]\!], \mathbb{P}(\{Y_{k+1}=i\}) = \left(1-\frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}(\{Y_k=i-1\}) + \frac{i}{n}\,\mathbb{P}(\{Y_k=i\}).}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer ce résultat en utilisant la formule des probabilités totales.

La famille $(\{Y_k = j\})_{j\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y_{k+1}=i\}) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_k=j\}\cap\{Y_{k+1}=i\}) \\
&= \cancel{\sum_{j=0}^{i-2} \mathbb{P}(\{Y_k=j\}\cap\{Y_{k+1}=i\})} + \mathbb{P}(\{Y_k=i-1\}\cap\{Y_{k+1}=i\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{Y_k=i\}\cap\{Y_{k+1}=i\}) + \cancel{\sum_{j=i+1}^{k} \mathbb{P}(\{Y_k=j\}\cap\{Y_{k+1}=i\})}
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $j \notin \{i-1, i\}$: $\{Y_k = j\} \cap \{Y_{k+1} = i\} = \varnothing$.
Il suffit alors de remarquer :

$$\begin{aligned}
& \{Y_k=i-1\}\cap\{Y_{k+1}=i\} = \{Y_k=i-1\}\cap\{Z_{k+1}=1\} \\
\text{et}\quad & \{Y_k=i\}\cap\{Y_{k+1}=i\} = \{Y_k=i\}\cap\{Z_{k+1}=0\}
\end{aligned}$$

- Il reste alors à traiter les cas où $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0,1\}$.

× Si $i = 0$, il suffit de remarquer :

$$\{Y_{k+1}=0\}=\varnothing \quad \text{et} \quad \{Y_k=-1\}=\varnothing \quad \text{et} \quad \{Y_k=0\}=\varnothing$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(\{Y_{k+1}=0\}) = 0 = \left(1-\frac{0-1}{n}\right)\times 0 + \frac{0}{n}\times 0.}$$

× Si $i = 1$, on remarque, en raisonnant comme précédemment :

$$\{Y_{k+1}=1\} = \{Y_k=1\}\cap\{Y_{k+1}=1\}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y_{k+1}=1\}) &= \mathbb{P}(\{Y_k=1\}\cap\{Y_{k+1}=1\}) \\
&= \mathbb{P}\left(\{Y_k=1\}\cap\{Z_{k+1}=0\}\right) \\
&= \mathbb{P}(\{Y_k=1\})\ \mathbb{P}_{\{Y_k=1\}}\left(\{Z_{k+1}=0\}\right) \\
&= \mathbb{P}(\{Y_k=1\})\ \frac{1}{n} && \textit{(en raisonnant une nouvelle fois comme précédemment)} \\
&= \left(1-\frac{1-1}{n}\right)\ \mathbb{P}(\{Y_k=1-1\})+\frac{1}{n}\ \mathbb{P}(\{Y_k=1\})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}(\{Y_{k+1}=1\})\ =\ \left(1-\frac{1-1}{n}\right)\ \mathbb{P}(\{Y_k=1-1\})+\frac{1}{n}\ \mathbb{P}(\{Y_k=1\})}$$

□

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$: $G_{k+1}=\dfrac{1}{n}\ X(1-X)G_k'+XG_k$.

Démonstration.
Soit $k\in\mathbb{N}$.

- Tout d'abord : $G_k'(X)\ =\ \sum\limits_{i=0}^{n}\mathbb{P}(\{Y_k=i\})\ i\,X^{i-1}\ =\ \sum\limits_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(\{Y_k=i\})\,X^{i-1}$.
- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
G_{k+1}(X) &= \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(\{Y_{k+1}=i\})\ X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}(\{Y_k=i-1\})+\frac{i}{n}\ \mathbb{P}(\{Y_k=i\})\right)\ X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\ \mathbb{P}(\{Y_k=i-1\})\ X^i+\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}\ \mathbb{P}(\{Y_k=i\})\ X^i \qquad (*)
\end{aligned}$$

- Étudions la première somme de l'égalité $(*)$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}(\{Y_k = i-1\})\ X^i \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}(\{Y_k = i-1\})\ X^i && \textit{(car } \{Y_k = -1\} = \varnothing\textit{)} \\
= \quad & \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^{i+1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \quad & \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^{i+1} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i\ \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^{i+1} \\
= \quad & X \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i\ \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^{i+1} && \textit{(car } 0\ \mathbb{P}(\{Y_k = 0\})\, X^1 = 0\textit{)} \\
= \quad & X\big(G_k(X) - \mathbb{P}(\{Y_k = n\})\, X^n\big) - \frac{1}{n}\ X^2 \sum_{i=1}^{n-1} i\ \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^{i-1} \\
= \quad & X\ G_k(X) - \mathbb{P}(\{Y_k = n\})\ X^{n+1} - \frac{1}{n}\ X^2 \big(G_k'(X) - n\ \mathbb{P}(\{Y_k = n\})\ X^{n-1}\big) \\
= \quad & X\ G_k(X) - \cancel{\mathbb{P}(\{Y_k = n\})\ X^{n+1}} - \frac{1}{n}\ X^2\ G_k'(X) + \cancel{\mathbb{P}(\{Y_k = n\})\ X^{n+1}} \\
= \quad & X\ G_k(X) - \frac{1}{n}\ X^2\ G_k'(X)
\end{aligned}$$

- Étudions la seconde somme de l'égalité $(*)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\ \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^i \quad &= \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i\ \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^i && \textit{(car } 0\ \mathbb{P}(\{Y_k = 0\})\, X^0 = 0\textit{)} \\
&= \quad \frac{1}{n}\ X \sum_{i=1}^{n} i\ \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\ X^i \quad = \quad \frac{1}{n}\ X\ G_k'(X)
\end{aligned}$$

En reprenant $(*)$, on obtient :

$$\boxed{G_{k+1}(X) \ = \ X\ G_k(X) - \frac{1}{n}\ X^2\ G_k'(X) + \frac{1}{n}\ X\ G_k'(X) \ = \ X\, G_k(X) + \frac{1}{n}\ X(1-X)G_k'(X).}$$

□

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$: $G_k = \varphi^k(G_0)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $G_k = \varphi^k(G_0)$.

- **Initialisation** :
  Comme $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$, on a : $\varphi^0(G_0) = G_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $G_{k+1} = \varphi^{k+1}(G_0)$).

$$\begin{array}{rcll} G_{k+1}(X) & = & \dfrac{1}{n}\, X(1-X)\; G_k'(X) + X\; G_k(X) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \big(\varphi(G_k)\big)(X) & \textit{(par définition de } \varphi\textit{)} \\ & = & \Big(\varphi\big(\varphi^k(G_0)\big)\Big)(X) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \big(\varphi^{k+1}(G_0)\big)(X) & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ G_k = \varphi^k(G_0).}$$

□

5. a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Par définition de G_k :

$$G_k(1) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\; 1^i \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_k = i\})$$

Or la famille $(\{Y_k = i\})_{i \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements, donc : $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_k = i\}) = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi : } G_k(1) = 1.}$$

- Par définition de G_k' :

$$G_k'(1) \;=\; \sum_{i=0}^{n} i\; \mathbb{P}(\{Y_k = i\}) 1^i \;=\; \sum_{i=0}^{n} i\; \mathbb{P}(\{Y_k = i\}) \;=\; \mathbb{E}(Y_k)$$

$$\boxed{G_k'(1) = \mathbb{E}(Y_k).}$$

□

b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$: $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\; \mathbb{E}(Y_k) + 1$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = G_{k+1}'(1)$.
- Or, d'après la question ***4.c)*** :

$$G_{k+1}(X) \;=\; \frac{1}{n}\; X(1-X)\; G_k'(X) + X\; G_k(X)$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} G_{k+1}'(X) & = & \dfrac{1}{n}\Big((1-X)\; G_k'(X) + X\big(-G_k'(X) + (1-X)G_k''(X)\big)\Big) + G_k(X) + X\; G_k'(X) \\ & = & \dfrac{1}{n}\; (1-2X)G_k'(X) + \dfrac{1}{n}\; (1-X)G_k''(X) + G_k(X) + X\; G_k'(X) \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(Y_{k+1}) & = & G'_{k+1}(X) \\ & = & \frac{1}{n}\,(1-2)G'_k(1) + \cancel{\frac{1}{n}\,(1-1)G''_k(1)} + G_k(1) + 1\; G'_k(1) \\ & = & \left(1-\frac{1}{n}\right) G'_k(1) + G_k(1) \;=\; \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(Y_k) + 1 \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)}\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(Y_k) + 1}$$

□

c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue en question ***6.e)***.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = \mathbb{E}(Y_k)$.
  Alors, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\ u_k + 1$$

  La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc arithmético-géométrique.
- L'équation de point fixe associée à la suite (u_k) est :

$$x = \left(1-\frac{1}{n}\right)\ x + 1$$

  Elle admet pour unique solution : $\lambda = n$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rcccccccl} u_{k+1} & = & \left(1-\frac{1}{n}\right) & \times & u_k & + & 1 & & (L_1) \\ \lambda & = & \left(1-\frac{1}{n}\right) & \times & \lambda & + & 1 & & (L_2) \\ \text{et donc} \quad u_{k+1}-\lambda & = & \left(1-\frac{1}{n}\right) & \times & (u_k-\lambda) & & & & (L_1)-(L_2)\end{array}$$

  Notons alors (v_k) la suite de terme général $v_k = u_k - \lambda$.
- La suite (v_k) est géométrique de raison $1-\frac{1}{n}$.
  Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$v_k \;=\; \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \times v_0 \;=\; \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \times (u_0-\lambda)$$

  On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k \;=\; v_k + \lambda \;=\; \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \times (u_0-\lambda) + \lambda$$

- Enfin : $u_0 \;=\; \mathbb{E}(Y_0) \;=\; 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_k) = -n\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^k + n = n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right).}$$

□

6. On rappelle que les polynômes $P_0, \dots, P_n$ sont définis à la question ***5.*** par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0,n]\!],\ \ P_j = X^j(1-X)^{n-j}$$

a) Calculer $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X) & = & \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j(1-X)^{n-j} & \textit{(par définition de } P_j\textit{)} \\ & = & \big(\cancel{X} + (1-\cancel{X})\big)^n & \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\ & = & 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X) = 1}$$

□

b) Montrer, pour tout j de $[\![0,n]\!]$: $P_j = \sum\limits_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$.

Démonstration.
On calcule :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}\ X^i & = & \sum\limits_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k\ X^{k+j} & \textit{(avec le changement d'indice } k = i-j\textit{)} \\ & = & X^j \sum\limits_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k\ X^k & \\ & = & X^j \sum\limits_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-X)^k\ 1^{n-j-k} & \\ & = & X^j\ (-X+1)^{n-j} & \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\ & = & P_j(X) & \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i = P_j(X)}$$

□

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***6.a)*** :

$$G_0(X)\ =\ 1\ =\ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j(X)$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme φ est une application linéaire, il en est de même de φ^k. Ainsi :

$$\varphi^k(G_0) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^k(P_j)$$

- De plus, d'après la question ***2.a)*** : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_j) = \dfrac{j}{n}\, P_j$.
On en déduit, par récurrence immédiate :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\; \varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k\, P_j$$

On en déduit :

$$\varphi^k(G_0) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$$

- Enfin, d'après la question précédente :

$$P_j(X) = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\big(\varphi^k(G_0)\big)(X) \;&=\; \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(\sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i\right) \\
&=\; \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \left(\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i\right) \\
&=\; \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \left(\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N},\ \big(\varphi^k(G_0)\big)(X) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}\right) X^i}$$ □

d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(\{Y_k = i\}) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- D'après la question ***4.d)*** :

$$\begin{array}{ccc}
G_k & = & \varphi^k(G_0) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y_k = i\})\, X^i & & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}\right) X^i
\end{array}$$

(d'après la question précédente)

- Or la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(on rappelle : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $Q_i(X) = X^i$)
Donc la décomposition du polynôme G_k sur cette base est unique.
En particulier, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(\{Y_k = i\}) \;=\; \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

- Montrons alors maintenant, pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]$ tel que $j \leqslant i$:

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

× D'une part :

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!\,\cancel{(n-j)!}}\ \frac{\cancel{(n-j)!}}{(i-j)!\,\big((n-\cancel{j})-(i-\cancel{j})\big)!} = \frac{n!}{j!\,(i-j)!\,(n-i)!}$$

× D'autre part :

$$\binom{i}{j}\binom{n}{i} = \frac{\cancel{i!}}{j!\,(i-j)!}\ \frac{n!}{\cancel{i!}\,(n-i)!} = \frac{n!}{j!\,(i-j)!\,(n-i)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (i,j) \in [\![0,n]\!] \text{ tel que } j \leqslant i : \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i}\binom{i}{j}.}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{Y_k = i\}) = \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(\{Y_k = i\}) = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient n individus)
On souhaite alors construire une partie P à i éléments de cet ensemble contenant j éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de i individus dans lequel figurent j représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à i éléments de E : $\binom{n}{i}$ possibilités.
On distingue ensuite j éléments de cet ensemble P : $\binom{i}{j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les i individus et on élit ensuite j représentants de ces individus)
Ainsi, il y a $\binom{i}{j}\binom{n}{i}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les j éléments à distinguer : $\binom{n}{j}$ possibilités.
On choisit ensuite $i-j$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les j éléments précédents : $\binom{n-j}{i-j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants puis on leur adjoint un groupe de $i-j$ individus)
Ainsi, il y a $\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat. □

Exercice : (ESCP 2003)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

× si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne,

× si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

× B_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » ;

× X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;

× u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\, x_{n+1} = (s-1)\, x_n + b + n$$

a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \alpha\, n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ appartienne à A.

Démonstration.

- Supposons que $(v_n) \in A$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s\, v_{n+1} = (s-1) v_n + b + n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$\begin{array}{rl} & s\, v_{n+1} = (s-1) v_n + b + n \\ \Leftrightarrow & s(\alpha(n+1) + \beta) = (s-1)(\alpha\, n + \beta) + n + b \\ \Leftrightarrow & s(n+1)\, \alpha + s\, \beta = n(s-1)\, \alpha + (s-1)\, \beta + n + b \\ \Leftrightarrow & \big(s(n+1) - n(s-1)\big)\, \alpha + \big(\cancel{s} - (\cancel{s} - 1)\big)\, \beta = n + b \\ \Leftrightarrow & (\cancel{sn} + s - \cancel{ns} + n)\, \alpha + \beta = n + b \\ \Leftrightarrow & (s+n)\, \alpha + \beta = n + b \end{array}$$

En particulier, pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (s+1)\, \alpha & + & \beta & = & 1 + b \\ (s+2)\, \alpha & + & \beta & = & 2 + b \end{array} \right. \quad \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} (s+1)\, \alpha & + & \beta & = & 1 + b \\ \alpha & & & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - (s+1) L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & b - s \\ \alpha & = & 1 \end{array} \right.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n + b - s$.

- Vérifions maintenant que la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n + b - s$$

appartient bien à A.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- × D'une part :

$$s\,v_{n+1} \;=\; s(n+1)+b-s \;=\; sn+s+sb-s^2$$

- × D'autre part :

$$\begin{aligned}(s-1)v_n+b+n &= (s-1)(n+b-s)+b+n\\ &= sn-\cancel{n}+bs-\cancel{b}-s^2+s+\cancel{b}+\cancel{n}\\ &= sn+bs-s^2+s\end{aligned}$$

On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s\,v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n$.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ appartient à } A \text{ si et seulement si } \alpha = 1 \text{ et } \beta = b - s.}$$

□

b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= x_{n+1}-v_{n+1}\\ &= \frac{1}{s}\big((s-1)x_n+\cancel{b+n}\big)-\frac{1}{s}\ \big((s-1)v_n+\cancel{b+n}\big)\\ &= \frac{s-1}{s}\ (x_n-v_n)\\ &= \frac{s-1}{s}\ y_n\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (y_n) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{s-1}{s}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit :

$$y_n \;=\; \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} y_1$$

Or : $y_1 \;=\; x_1 - v_1 \;=\; x_1 - (1+b-s)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1-1-b+s).}$$

- De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = y_n + v_n$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (x_1-1-b+s)+n+b-s.}$$

□

2. **Expression de la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de $\mathbb{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

Démonstration.

- Lors du premier tirage, on pioche parmi les s boules disponibles, dont b blanches.
Chaque issue est équiprobable.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{s}.}$$

- Tout d'abord : $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
  En effet, au premier tirage, seules deux issues sont possibles :
  - × on pioche une boule blanche, c'est-à-dire $\{X_1 = 1\}$ est réalisé,
  - × on pioche une boule noire, c'est-à-dire $\{X_1 = 0\}$ est réalisé.

  De plus : $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\}) \;=\; \mathbb{P}(B_1) \;=\; \dfrac{b}{s}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{s}\right)\text{. Donc : } u_1 = \mathbb{E}(X_1) = \frac{b}{s}.}$$

□

b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

Démonstration.
La famille $(B_1, \overline{B_1})$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

Déterminons $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$ et $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2)$.

- Si l'événement B_1 est réalisé, c'est qu'on a pioché une boule blanche au premier tirage. Elle est remise dans l'urne.
  Dans ce cas, l'événement B_2 est réalisé si et seulement si on a pioché une boule blanche au $2^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne contenant toujours a boules noires et b boules blanches. Ainsi :
  $$\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \;=\; \frac{b}{s}$$
- Si l'événement $\overline{B_1}$ est réalisé, c'est qu'on a pioché une boule noire au premier tirage. Elle est remplacée par une boule blanche dans l'urne.
  Dans ce cas, l'événement B_2 est réalisé si et seulement si on a pioché une boule blanche au $2^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne contenant alors $a-1$ boules noires et $b+1$ boules blanches. Ainsi :
  $$\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) \;=\; \frac{b+1}{s}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \frac{b}{s} \times \frac{b}{s} + \left(1 - \frac{b}{s}\right)\left(\frac{b+1}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{b^2}{s} + (b+1)\left(1 - \frac{b}{s}\right)\right) \\ &= \frac{1}{s}\left(\cancel{\frac{b^2}{s}} + b - \cancel{\frac{b^2}{s}} + 1 - \frac{b}{s}\right) \;=\; \frac{b+1-\frac{b}{s}}{s} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Or } u_1 = \frac{b}{s} \text{ d'après la question précédente, donc : } \mathbb{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}.}$$

□

c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$.

Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n = k\}}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Si l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé, alors on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages. On a donc également tiré $(n-k)$ boules noires que l'on a toutes remplacées par des boules blanches. À la fin du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient donc $a-(n-k)$ boules noires et $b+(n-k)$ boules blanches (ce qui est possible car $n \leqslant a$).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}.}$$

- En n tirages, on peut piocher de 0 à n boules blanches.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

- La famille $(\{X_n = k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_n = k\} \cap B_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n = k\})\, \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(B_{n+1}) && \textit{(car } \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n = k\})\ \frac{b+n-k}{s} && \textit{(d'après le point précédent)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{b+n}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) - \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \\
&= \frac{b+n}{s} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) - \frac{1}{s}\ \mathbb{E}(X_n) && \textit{(par définition de l'espérance)} \\
&= \frac{b+n}{s} \times 1 - \frac{1}{s}\ \mathbb{E}(X_n) && \textit{(car } (\{X_n = k\})_{k\in[\![0,n]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
&= \frac{b+n}{s} - \frac{1}{s}\ u_n && \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \\
&= \frac{b+n-u_n}{s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B_{n+1}) \ = \ \frac{b+n-u_n}{s}}$$

□

d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, quel est l'événement $\{X_n = k\}$?
Si $k \in [\![n-a, n]\!]$, justifier l'égalité : $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$.
Montrer enfin que l'égalité : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

Démonstration.

- Si $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, alors l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé si et seulement si on a pioché k boules blanches lors des n premiers tirages. Cela signifie que l'on a pioché $n-k$ boules noires. Or :

$$0 \leqslant k \leqslant n-a-1 \ \Leftrightarrow\ 0 \geqslant -k \geqslant -n+a+1 \ \Leftrightarrow\ n \geqslant n-k \geqslant \cancel{n} - \cancel{n} + a + 1$$

L'urne contient initialement a boules noires, il est donc impossible d'en pioché plus de $a+1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![0, n-a-1]\!],\ \{X_n = k\} = \varnothing.}$$

- Si $k \in [\![n-a, n]\!]$.
  Si l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé, alors on a tiré k boules blanches au cours des n premiers tirages. On a donc également tiré $(n-k)$ boules noires que l'on a toutes remplacées par des boules blanches. À la fin du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient donc $a-(n-k)$ boules noires et $b+(n-k)$ boules blanches. Ce qui est possible car :

$$n - a \leqslant k \leqslant n \ \Leftrightarrow\ -n + a \geqslant -k \geqslant -n \ \Leftrightarrow\ \cancel{n} - \cancel{n} + a \geqslant n - k \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![n-a, n]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}.}$$

- Comme, pour tout $k \in [\![0, n-a-1]\!]$, $\{X_n = k\} = \varnothing$, on en déduit : $X(\Omega) = [\![n-a, n]\!]$.
  Donc la famille $(\{X_n = k\})_{k \in [\![n-a,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.

> Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements et avec les mêmes arguments qu'en question précédente, on obtient :
> $$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$$
> □

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbb{P}(B_n)$**

a) Soit n un entier naturel non nul. établir, pour tout entier k de l'intervalle $[n+1-a, n]$ l'égalité :

$$\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \ = \ \frac{a-n+k}{s}\, \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) + \frac{b+n-k+1}{s}\, \mathbb{P}\big(\{X_n = k-1\}\big)$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout $k \in [\![1, n-a-1]\!]$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![n+1-a, n]\!]$.
  La famille $(B_{n+1}, \overline{B_{n+1}})$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = k\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = k\} \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = k\} \cap \overline{B_{n+1}}\big)$$

- Or :
  × tout d'abord :
  $$\{X_{n+1} = k\} \cap B_{n+1} \ = \ \{X_n = k-1\} \cap B_{n+1}$$
  × de plus :
  $$\{X_{n+1} = k\} \cap \overline{B_{n+1}} \ = \ \{X_n = k\} \cap \overline{B_{n+1}}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X_{n+1} = k\}) \\
= \ & \mathbb{P}(\{X_n = k-1\} \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \overline{B_{n+1}}\big) \\
= \ & \mathbb{P}(\{X_n = k-1\})\, \mathbb{P}_{\{X_n=k-1\}}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(\{X_n = k\})\, \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\overline{B_{n+1}}\big) && \textit{(car } (k-1,k) \in \big(X_n(\Omega)\big)^2 \textit{ avec } X_n(\Omega) = [\![n-a,n]\!]\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}(\{X_n = k-1\})\, \frac{b+n-k+1}{s} + \mathbb{P}(\{X_n = k\})\, \big(1 - \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}(B_{n+1})\big) && \textit{(d'après \textbf{2.d)})} \\
= \ & \mathbb{P}(\{X_n = k-1\})\, \frac{b+n-k+1}{s} + \mathbb{P}(\{X_n = k\})\, \left(1 - \frac{b+n-k}{s}\right) && \textit{(d'après \textbf{2.d)})} \\
= \ & \frac{b+n-k+1}{s}\, \mathbb{P}(\{X_n = k-1\}) + \mathbb{P}(\{X_n = k\})\, \frac{a-n+k}{s} && \textit{(car } a = s - b\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, pour tout } k \in [\![n-a, n]\!] : \\ \mathbb{P}(\{X_{n+1} = k\}) \ = \ \dfrac{b+n-k+1}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k-1\}) + \dfrac{a-n+k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}).\end{array}}$$

- Cas $k = n+1$.
  - × D'une part, l'événement $\{X_{n+1} = n+1\}$ est réalisé si et seulement si on a tiré que des boules blanches. Donc :

$$\{X_{n+1} = n+1\} \ = \ \{X_n = n\} \cap B_{n+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_{n+1} = n+1\}) \ &= \ \mathbb{P}(\{X_n = n\} \cap B_{n+1}) \ = \ \mathbb{P}(\{X_n = n\})\ \mathbb{P}_{\{X_n=n\}}(B_{n+1}) \\ &= \ \mathbb{P}(\{X_n = n\})\ \frac{b+\cancel{n}-\cancel{n}}{s} && \textit{(d'après } \textbf{2.d)}\textit{)} \\ &= \ \frac{b}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = n\})\end{aligned}$$

  - × D'autre part, comme $\{X_n = n+1\} = \varnothing$:

$$\frac{a-n+(n+1)}{s}\ \cancel{\mathbb{P}(\{X_n = n+1\})} + \frac{b+\cancel{n}-(\cancel{n}+\cancel{1})+\cancel{1}}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = n\}) \ = \ \frac{b}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = n\})$$

$$\boxed{\text{L'égalité est toujours vérifiée pour } k = n+1.}$$

- Cas $k = n-a$.
  - × D'une part, on a toujours :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = n-a\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X_n = n-a-1\} \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}\big(\{X_n = n-a\} \cap \overline{B_{n+1}}\big)$$

Or :

$$\{X_n = n-a-1\} \cap B_{n+1} \ = \ \varnothing \cap B_{n+1} \ = \ \varnothing$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_{n+1} = n-a\}) \ &= \ \mathbb{P}\big(\{X_n = n-a\} \cap \overline{B_{n+1}}\big) \\ &= \ \mathbb{P}(\{X_n = n-a\})\ \mathbb{P}_{\{X_n=n-a\}}(\overline{B_{n+1}}) \\ &= \ \mathbb{P}(\{X_n = n-a\})\ \big(1 - \mathbb{P}_{\{X_n=n-a\}}(B_{n+1})\big) \\ &= \ \mathbb{P}(\{X_n = n-a\})\ \left(1 - \frac{b+n-(n-a)}{s}\right) \\ &= \ \left(1 - \frac{a+b}{s}\right)\ \mathbb{P}(\{X_n = n-a\}) \\ &= \ \cancel{(1-1)}\ \mathbb{P}(\{X_n = n-a\}) \ = \ 0\end{aligned}$$

  - × D'autre part :

$$\begin{aligned}&\frac{a-n+(n-a)}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = n-a\}) + \frac{b+n-(n-a)+1}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = n-a-1\}) \\ = \ &0 \times \mathbb{P}(\{X_n = n-a\}) + \frac{b+a+1}{s} \times 0 \ = \ 0\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité est vérifiée car $\{X_n = n-a-1\} = \varnothing$.

$$\boxed{\text{L'égalité est toujours vérifiée pour } k = n - a.}$$

- Cas $k \in [\![1, n-a-1]\!]$.
  - × D'une part, l'événement $\{X_{n+1} = k\}$ est réalisé si et seulement si on a pioché k boules blanches lors des $(n+1)$ premiers tirages. Cela signifie que l'on a pioché $n-k$ boules noires. Or :

$$1 \leqslant k \leqslant n-a-1 \ \Leftrightarrow\ -1 \geqslant -k \geqslant -n+a+1 \ \Leftrightarrow\ n-1 \geqslant n-k \geqslant \cancel{n} - \cancel{n} + a + 1$$

    L'urne contient initialement a boules noires, il est donc impossible d'en pioché plus de $a+1$. On en déduit : $\forall k \in [\![1, n-a-1]\!]$, $\{X_{n+1} = k\} = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}(\{X_{n+1} = k\}) \ = \ 0$$

  - × D'autre part, comme d'après ***2.d)*** $\{X_n = k\} = \varnothing$ et $\{X_n = k-1\} = \varnothing$, on a :

$$\frac{a-n+k}{s}\ \cancel{\mathbb{P}(\{X_n = n+1\})} + \frac{b+n-k+1}{s}\ \cancel{\mathbb{P}(\{X_n = n\})} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{L'égalité est vérifiée pour } k \in [\![1, n-a-1]\!].}$$

□

b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de $u_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1})$:

$$\begin{array}{rll}
 & u_{n+1} & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n+1} k\,\mathbb{P}(\{X_{n+1} = k\}) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n+1} k\,\mathbb{P}(\{X_{n+1} = k\}) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k \left(\dfrac{b+n-k+1}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k-1\}) + \dfrac{a-n+k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \right) & \textit{(d'après 3.a))} \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n+1} k\, \dfrac{b+n-k+1}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k-1\}) + \sum\limits_{k=1}^{n+1} k\, \dfrac{a-n+k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)\, \dfrac{b+n-k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \sum\limits_{k=1}^{n+1} k\, \dfrac{a-n+k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \dfrac{b+n-k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b+n-k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) & \\
 & + \ \sum\limits_{k=1}^{n} k\, \dfrac{a-n+k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + (n+1)\dfrac{a+1}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = n+1\}) & \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \dfrac{b+n-k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b+n-k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) & \\
 & + \ \sum\limits_{k=0}^{n} k\, \dfrac{a-n+k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) & \textit{(car } \{X_n = n+1\} = \varnothing\textit{)} \\
= & \sum\limits_{k=0}^{n} k \left(\dfrac{b+n-k}{s} + \dfrac{a-n+k}{s} \right) \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \mathbb{P}(B_{n+1}) &
\end{array}$$

En effet, d'après les questions ***2.c)*** et ***2.d)*** :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{b+n-k}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} k\ \frac{a+b}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \frac{b+n-u_n}{s} \qquad \textit{(d'après \textbf{2.d)})} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\ \frac{s}{s}\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}(\{X_n = k\}) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= \mathbb{E}(X_n) + \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= u_n + \frac{b+n-u_n}{s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{s-1}{s}\ u_n + \frac{b+n}{s}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  En multipliant par s l'égalité précédente, on obtient :

$$s\, u_{n+1} \;=\; (s-1)u_n + b + n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ appartient à } A.}$$

□

c) Donner, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de u_n et de $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.b)*** :

$$u_n \;=\; \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + n + b - s$$

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{2.a)}} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + n + b - s.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions ***2.c)*** et ***2.d)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \frac{b+n-u_n}{s} \\
&= \frac{1}{s}\left(\cancel{b+n} - \left(\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} (u_1 - 1 - b + s) + \cancel{n+b} - s\right)\right) \qquad \textit{(d'après le point précédent)} \\
&= -\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1 - \frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right)}$$

□

d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $\big(\mathbb{P}(B_n)\big)_{n\geqslant 1}$?

Démonstration.

- La suite $\left(\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{s-1}{s}$ avec $\left|\dfrac{s-1}{s}\right| < 1$.
  Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} = 0$$
- De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n+b-s = +\infty$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$
- Enfin :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) \ = \ 1 - \frac{1}{s} \times 0 \times \left(\frac{b}{s} - 1 - b + s\right) \ = \ 1 - 0$$
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) = 1}$$

□

Exercice : (HEC II S 2009 Parties I et II)

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance lorsqu'elles exsitent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.
Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \sup(U_1, U_2, \dots, U_n)$ et $Z_n = \inf(U_1, U_2, \dots, U_n)$.
On admet que T_n et Z_n sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :
$$T_n(\omega) = \max\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\big) \qquad \text{et} \qquad Z_n(\omega) = \min\big(U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega)\big)$$
On rappelle que si C désigne un élément de $\mathscr{A}$, on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement C, définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :
$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaire

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Établir les deux relations suivantes :
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\}) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\ \mathbb{P}(\{Y > k\})$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y est une v.a.r. finie. Donc elle admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{Y = k\})$$

- Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned} \{Y > k-1\} &= \{Y \geqslant k\} && \textit{(car Y est à valeurs entières)} \\ &= \{Y = k\} \cup \{Y > k\} \end{aligned}$$

De plus les événements $\{Y = k\}$ et $\{Y > k\}$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{Y > k-1\}) = \mathbb{P}(\{Y = k\}) + \mathbb{P}(\{Y > k\})$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{Y = k\}) = \mathbb{P}(\{Y > k-1\}) - \mathbb{P}(\{Y > k\}).}$$

- On calcule alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(Y) \\ = \ & \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{Y = k\}) \\ = \ & \sum_{k=1}^{N} k\,\Big(\mathbb{P}(\{Y > k-1\}) - \mathbb{P}(\{Y > k\})\Big) \\ = \ & \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{Y > k-1\}) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{Y > k\}) \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\mathbb{P}(\{Y > k\}) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{Y > k\}) && \textit{(par décalage d'indice)} \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} k\,\mathbb{P}(\{Y > k\}) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\}) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(\{Y > k\}) && \textit{(par linéarité)} \\ = \ & 0 \times \mathbb{P}(\{Y > 0\}) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\,\mathbb{P}(\{Y > k\})} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\}) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\,\mathbb{P}(\{Y > k\}} + N\,\mathbb{P}(\{Y > N\})\right) \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\}) + \cancel{N\,\mathbb{P}(\{Y > N\})} && \textit{(car, comme $Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$: $\{Y > N\} = \varnothing$)} \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\})}$$

Commentaire

On pouvait également résoudre cette question en partant de l'égalité entre événements suivante, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} \{Y > k\} & = & \{Y \geqslant k+1\} \qquad \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & \displaystyle\bigcup_{i=k+1}^{N} \{Y = i\} \end{array}$$

Les événements $\{Y = k+1\}$, ..., $\{Y = N\}$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{N} \{Y = i\}\right) = \sum_{i=k+1}^{N} \mathbb{P}(\{Y = i\})$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Y > k\}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=k+1}^{N} \mathbb{P}(\{Y = i\}) \\ & = & \displaystyle\sum_{0 \leqslant k < i \leqslant N} \mathbb{P}(\{Y = i\}) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}(\{Y = i\}) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\{Y = i\}) \sum_{k=0}^{i-1} 1 \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} i\, \mathbb{P}(\{Y = i\}) \; = \; \mathbb{E}(Y) \end{array}$$

Commentaire

- Cette dernière méthode est un peu plus courte, mais fait intervenir une interversion de sommes qui peut être périlleuse.
- Elle a également l'inconvénient de ne pas s'adapter facilement au cas d'une v.a.r. Y où $Y(\Omega)$ est infini (cf ESSEC II 2016).

- La v.a.r. Y admet un moment d'ordre 2 car c'est une v.a.r. finie. De plus :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(Y^2) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}(\{Y = k\}) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k^2\, \Big(\mathbb{P}(\{Y > k-1\}) - \mathbb{P}(\{Y > k\})\Big) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k-1\}) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k\}) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2 \mathbb{P}(\{Y > k\}) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k\}) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (k^2+2k+1) \mathbb{P}(\{Y > k\}) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k\}) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k\}) + \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}(\{Y > k\}) - \sum_{k=1}^{N} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k\}) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 0^2 \times \mathbb{P}(\{Y > 0\}) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k\})} + \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}(\{Y > k\}) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k^2\, \mathbb{P}(\{Y > k\}} + N^2\, \mathbb{P}(\{Y > \right. \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}(\{Y > k\}) + \cancel{N^2\, \mathbb{P}(\{Y > N\}}) && \textit{(car, comme } Y(\Omega) = [\![1, N]\!] \textit{ :} \\
& && \{Y > N\} = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}(\{Y > k\})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) \ = \ \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \mathbb{P}(\{Y > k\})}$$

□

Partie I. Inf et Sup

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $\mathbb{E}(U_1)$ et de $\mathbb{V}(U_1)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } U_1 \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!]) : \mathbb{E}(U_1) = \frac{N+1}{2},\ \mathbb{V}(U_1) = \frac{N^2-1}{12}.}$$

□

3. a) Calculer, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\})$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\{T_n \leqslant k\} \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} \{U_i \leqslant k\}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\}) \ &= \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i \leqslant k\}\right) \\
&= \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{U_i \leqslant k\}) && \textit{(par indépendance des} \\
& && \textit{v.a.r. } U_1, \ldots, U_n\textit{)}
\end{aligned}$$

- Calculons maintenant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{U_i \leqslant k\})$.
  - × Tout d'abord :

$$\{U_i \leqslant k\} = \bigcup_{j=1}^{k} \{U_i = j\}$$

  - × On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{U_i \leqslant k\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k} \{U_i = j\}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{U_i = j\}) && \textit{(car } \{U_i = 1\}, \ldots, \{U_i = k\} \textit{ sont incompatibles)} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N} && \textit{(car } U_i \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])\textit{)} \\
&= \frac{k}{N}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{U_i \leqslant k\}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{N} = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\}) = \left(\frac{k}{N}\right)^n}$$

□

b) En déduire la loi de probabilité de T_n.

Démonstration.

- Tout d'abord : $T_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!]$. En effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $U_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
- Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
\{T_n \leqslant k\} &= \{T_n = k\} \cup \{T_n < k\} \\
&= \{T_n = k\} \cup \{T_n \leqslant k - 1\} && \textit{(car } T_n \textit{ est à valeurs entières)}
\end{aligned}$$

  Comme $\{T_n = k\}$ et $\{T_n \leqslant k - 1\}$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\}) = \mathbb{P}(\{T_n = k\}) + \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k - 1\})$$

  D'où :

$$\mathbb{P}(\{T_n = k\}) = \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\}) - \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k - 1\})$$

  Deux cas se présentent alors :
  - × si $k \geqslant 2$, alors $k \in [\![1, N]\!]$ et $k - 1 \in [\![1, N]\!]$. On peut donc appliquer la question précédente et on obtient :

$$\mathbb{P}(\{T_n = k\}) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$$

  - × si $k = 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T_n = 1\}) &= \mathbb{P}(\{T_n \leqslant 1\}) - \mathbb{P}(\{T_n \leqslant 0\}) \\
&= \mathbb{P}(\{T_n \leqslant 1\}) && \textit{(car, comme } T_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!] \textit{ : } \{T_n \leqslant 0\} = \varnothing\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^n && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

On vérifie que la formule obtenue pour $k \geqslant 2$ est toujours vraie pour $k = 1$:

$$\left(\frac{1}{N}\right)^n - \left(\frac{1-1}{N}\right)^n = \left(\frac{1}{N}\right)^n - \cancel{\left(\frac{0}{N}\right)^n} = \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

On a donc bien :

$$\mathbb{P}(\{T_n = 1\}) = \left(\frac{1}{N}\right)^n - \left(\frac{1-1}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(\{T_n = k\}) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.}$$

□

4. ***a)*** Montrer que la suite $(d_n(N))_{n \geqslant 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$d_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \left(\frac{1}{N}\right)^n + \left(\frac{2}{N}\right)^n + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

- Or, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$: $\left|\dfrac{k}{N}\right| < 1$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la suite } (d_n(N))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente en tant que} \\ \text{somme de suites convergentes et : } \lim\limits_{n \to +\infty} d_n(N) = 0.\end{array}}$$

□

b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{T_n > k\}) && \textit{(d'après la question \textbf{1.})} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\})\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) && \textit{(d'après la question \textbf{3.a)})} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} 1 - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N - d_n(N)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = N - d_n(N)}$$

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n(N) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n) = N.}$$

□

c) Établir la formule suivante : $\mathbb{V}(T_n) = (2N-1)\, d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - {d_n}^2(N)$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance car c'est une v.a.r. finie.
- On détermine d'abord $\mathbb{E}(T_n^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n^2) &= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\,\mathbb{P}(\{T_n > k\}) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\big(1 - \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\})\big) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) - \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= 2\sum_{k=0}^{N-1} k + \sum_{k=0}^{N-1} 1 - \left(\sum_{k=0}^{N-1} 2k\left(\frac{k}{N}\right)^n + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right) \\
&= \cancel{2}\,\frac{(N-1)N}{\cancel{2}} + N - 2\sum_{k=0}^{N-1} k\left(\frac{k}{N}\right)^n - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \\
&= N^2 - \cancel{N} + \cancel{N} - 2\sum_{k=0}^{N-1} k\,\frac{k^n}{N^n} - d_n(N) \\
&= N^2 - 2N\sum_{k=0}^{N-1} \frac{k^{n+1}}{N^{n+1}} - d_n(N) \\
&= N^2 - 2N\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - d_n(N) \\
&= N^2 - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n(N)
\end{aligned}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T_n) &= \mathbb{E}(T_n^2) - \big(\mathbb{E}(T_n)\big)^2 \\
&= N^2 - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n(N) - \big(N - d_n(N)\big)^2 \\
&= \cancel{N^2} - 2N\, d_{n+1}(N) - d_n(N) - \Big(\cancel{N^2} - 2N\, d_n(N) + \big(d_n(N)\big)^2\Big) \\
&= (2N-1)d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) \;=\; (2N-1)d_n(N) - 2N\, d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2}$$

- Or, d'après la question ***4.a)*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$. On a donc aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_{n+1}(N) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(T_n) = 0.}$$

□

d) Montrer que si $N \geqslant 2$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$.

En déduire que l'on a : $V(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N)$.

Démonstration.

- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} &= \frac{\left(\frac{1}{N}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{N}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n+1} \left(\dfrac{\left(\frac{1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}} + \dfrac{\left(\frac{2}{\cancel{N}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}} + \cdots + \dfrac{\left(\frac{N-2}{\cancel{N}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n+1}} + 1 \right)}{\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n} \left(\dfrac{\left(\frac{1}{\cancel{N}}\right)^{n}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n}} + \dfrac{\left(\frac{2}{\cancel{N}}\right)^{n}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n}} + \cdots + \dfrac{\left(\frac{N-2}{\cancel{N}}\right)^{n}}{\left(\frac{N-1}{\cancel{N}}\right)^{n}} + 1 \right)} \\
&= \frac{N-1}{N} \, \frac{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n} + 1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n} + 1}
\end{aligned}$$

- Or, pour tout $k \in [\![1, N-2]\!]$: $\left|\dfrac{k}{N-1}\right| < 1$. D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k}{N-1} = 0$.

  On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n} + \left(\frac{2}{N-1}\right)^{n} + \cdots + \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{n} + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n \to +\infty} \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}.}$$

- Déterminons, si elle existe, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{V}(T_n)}{d_n(N)}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{V}(T_n)}{d_n(N)} &= (2N-1) - 2N \frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - d_n(N) && \textit{(d'après la question 4.c))} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2N - 1 - 2N\left(1 - \frac{1}{N}\right) - 0 = 1 && \textit{(d'après ce qui précède et la question 4.a))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{V}(T_n)}{d_n(N)} = 1 \,;\ \text{c'est-à-dire } \mathbb{V}(T_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} d_n(N).}$$

□

5. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $Z_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!]$. En effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $U_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
- Soit $k \in [\![1, N]\!]$.
  - × Pour commencer :

$$\{Z_n > k\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{U_i > k\}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{Z_n > k\}) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{U_i > k\}\right) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{U_i > k\}) & \textit{(car les v.a.r. } U_1, \ldots, U_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \big(1 - \mathbb{P}(\{U_i \leqslant k\})\big) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \dfrac{k}{N}\right) & \textit{(calcul effectué en } \boldsymbol{3.a)}\textit{)} \\
& = & \left(1 - \dfrac{k}{N}\right)^n &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(\{Z_n > k\}) = \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n}$$

× Soit $k \in [\![1, N]\!]$. De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\{Z_n > k-1\} & = & \{Z_n \geqslant k\} & \textit{(car } Z_n \textit{ est à valeurs entières)} \\
& = & \{Z_n = k\} \cup \{Z_n > k\} &
\end{array}$$

Or les événements $\{Z_n = k\}$ et $\{Z_n > k\}$ sont incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}(\{Z_n > k-1\}) \ = \ \mathbb{P}(\{Z_n = k\}) + \mathbb{P}(\{Z_n > k\})$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{Z_n = k\}) \ = \ \mathbb{P}(\{Z_n > k-1\}) - \mathbb{P}(\{Z_n > k\})$$

Deux cas se présentent alors :

- si $k \geqslant 2$, alors $k \in [\![1, N]\!]$ et $k - 1 \in [\![1, N]\!]$. On peut donc utiliser les calculs précédents. On obtient :

$$\mathbb{P}(\{Z_n = k\}) \ = \ \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$$

- si $k = 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{Z_n = 1\}) & = & \mathbb{P}(\{Z_n > 0\}) - \mathbb{P}(\{Z_n > 1\}) & \\
& = & 1 - \mathbb{P}(\{Z_n > 1\}) & \textit{(car, comme } Z_n(\Omega) \subset [\![1, N]\!] \textit{ : } \{Z_n > 0\} = \Omega\textit{)} \\
& = & 1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n & \textit{(d'après les calculs précédents)}
\end{array}$$

On vérifie que la formule obtenue pour $k \geqslant 2$ est toujours vraie pour $k = 1$:

$$\left(1 - \frac{1-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \ = \ (1)^n - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \ = \ 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

On a donc bien :

$$\mathbb{P}(\{Z_n = 1\}) \ = \ \left(1 - \frac{1-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(\{Z_n = k\}) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n.}$$

Commentaire

On détermine dans cette question la loi du minimum de v.a.r. indépendantes. On déterminait en question ***3.***, la loi du maximum de v.a.r. indépendantes. C'est extrêmement fréquent aux concours. Les techniques pour répondre à ces questions sont classiques, il est donc indispensable de les maîtriser.

- La v.a.r. Z_n admet une variance (et donc une espérance), car c'est une v.a.r. finie.
- Déterminons $\mathbb{E}(Z_n)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Z_n > k\}) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n && \textit{(d'après les calculs précédents)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^n && \textit{(avec le changement d'indice } j = N-k\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^n + \left(\frac{N}{N}\right)^n \\
&= d_n(N) + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) \ = \ d_n(N) + 1}$$

Commentaire

Le changement d'indice $j = N - k$ est en fait une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n &= \left(\frac{N}{N}\right)^n + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \cdots + \left(\frac{N-(N-2)}{N}\right)^n + \left(\frac{N-(N-1)}{N}\right)^n \\
&= \left(\frac{N}{N}\right)^n + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \cdots + \left(\frac{2}{N}\right)^n + \left(\frac{1}{N}\right)^n \\
\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^n &= \left(\frac{1}{N}\right)^n + \left(\frac{2}{N}\right)^n + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \left(\frac{N}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

- Déterminons $\mathbb{E}(Z_n^2)$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Z_n^2) & = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}(\{Z_n > k\}) & \textit{(d'après la question \textbf{1.})} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{N-1} 2k\,\mathbb{P}(\{Z_n > k\}) + \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(\{Z_n > k\}) & \\
& = & 2\sum\limits_{k=0}^{N-1} k\,\mathbb{P}(\{Z_n > k\}) + \mathbb{E}(Z_n) & \textit{(d'après la question \textbf{1.})} \\
& = & 2\sum\limits_{k=0}^{N-1} k\left(\dfrac{N-k}{N}\right)^n + \mathbb{E}(Z_n) & \textit{(d'après les calculs précédents)} \\
& = & 2\sum\limits_{j=1}^{N} (N-j)\left(\dfrac{j}{N}\right)^n + \mathbb{E}(Z_n) & \textit{(avec le changement d'indice } j = N-k\textit{)} \\
& = & 2N\sum\limits_{j=1}^{N} \left(\dfrac{j}{N}\right)^n - 2\sum\limits_{j=1}^{N} \dfrac{j^{n+1}}{N^n} + \big(d_n(N)+1\big) & \textit{(d'après le point précédent)} \\
& = & 2N\,\big(d_n(N)+1\big) - 2N\sum\limits_{j=1}^{N} \left(\dfrac{j}{N}\right)^{n+1} + d_n(N)+1 & \textit{(démontré dans le point précédent)} \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + 2N + 1 - 2N\,\big(d_{n+1}(N)+1\big) & \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + 1 - 2N\,d_{n+1}(N) &
\end{array}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(Z_n) & = & \mathbb{E}(Z_n^2) - \big(\mathbb{E}(Z_n)\big)^2 \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + 1 - 2N\,d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)+1\big)^2 \\
& = & (2N+1)\,d_n(N) + \cancel{1} - 2N\,d_{n+1}(N) - \Big(\big(d_n(N)\big)^2 + 2\,d_n(N) + \cancel{1}\Big) \\
& = & (2N-1)\,d_n(N) - 2N\,d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) = (2N-1)\,d_n(N) - 2N\,d_{n+1}(N) - \big(d_n(N)\big)^2 = \mathbb{V}(T_n)}$$

□

Partie II. Couple (Inf, Sup)

7. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple (k,ℓ) de $\mathbb{N}^2$: $\phi_n(k,\ell) = \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\})$.

a) Montrer, pour tout $(k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\[2ex] \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $(k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$. Deux cas se présentent.

- si $k \leqslant \ell$.

× Tout d'abord : $\{T_n \leqslant k\} \subset \{Z_n \leqslant \ell\}$. Démontrons le.
Soit $\omega \in \{T_n \leqslant k\}$. Alors : $T_n(\omega) \leqslant k$. Or :

$$Z_n(\omega) \leqslant T_n(\omega) \leqslant k \leqslant \ell$$

Donc : $Z_n(\omega) \leqslant \ell$, c'est-à-dire $\omega \in \{Z_n \leqslant \ell\}$.

× On en déduit :

$$\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\} \ = \ \{T_n \leqslant k\}$$

Ainsi :

$$\Phi_n(k,\ell) \ = \ \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}) \ = \ \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\})$$

On en conclut, d'après la question ***3.a)***, que si $k \leqslant \ell$: $\Phi_n(k,\ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

- si $k > \ell$

× Tout d'abord :

$$\{T_n \leqslant k\} \ = \ \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\}\Big)$$

Les événements $\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}$ et $\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\}$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\}) \ = \ \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\} + \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\}) \ = \ \Phi_n(k,\ell) + \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\})$$

× Or :

$$\begin{aligned}
\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\} &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i \leqslant k\}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i > \ell\}\right) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \big(\{U_i \leqslant k\} \cap \{U_i > \ell\}\big) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\ell < U_i \leqslant k\}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\ell < U_i \leqslant k\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\ell < U_i \leqslant k\}) && \textit{(car les v.a.r. } U_1, \ldots, U_n \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

× Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme U_i est à valeurs entières :

$$\{\ell < U_i \leqslant k\} \ = \ \{\ell + 1 \leqslant U_i \leqslant k\}$$

D'où :

$$\{\ell < U_i \leqslant k\} \ = \ \bigcup_{j=\ell+1}^{k} \{U_i = j\}$$

Or les événements $\{U_i = \ell + 1\}, \ldots, \{U_i = k\}$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\ell < U_i \leqslant k\}) &= \sum_{j=\ell+1}^{k} \mathbb{P}(\{U_i = j\}) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{k} \frac{1}{N} && \textit{(car } U_i \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])\textit{)} \\
&= \frac{k - (\ell+1) + 1}{N} \ = \ \frac{k-\ell}{N}
\end{aligned}$$

× On obtient alors :

$$\mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\}) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\ell < U_i \leqslant k\}) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \frac{k-\ell}{N} \ = \ \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, d'après } \textbf{\textit{3.a)}}\text{, si } k > \ell : \\ \Phi_n(k,\ell) = \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\}) - \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n > \ell\}) \ = \ \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n.\end{array}}$$

□

b) Établir, pour tout (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, la formule suivante :

$$\mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) = \phi_n(k,\ell) + \phi_n(k-1,\ell-1) - \phi_n(k-1,\ell) - \phi_n(k,\ell-1)$$

Démonstration.
Soit $(k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$.

- Tout d'abord, comme T_n et Z_n sont à valeurs entières :

$$\begin{array}{rl} & \{T_n \leqslant k\} \ \cap \ \{Z_n \leqslant \ell\} \\ = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) \\ = & A_n \cup B_n \cup C_n \end{array}$$

- D'après la formule du crible, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}) & = & \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) \\ & - & \mathbb{P}(A_n \cap B_n) - \mathbb{P}(A_n \cap C_n) - \mathbb{P}(B_n \cap C_n) \\ & + & \mathbb{P}(A_n \cap B_n \cap C_n) \end{array}$$

- Étudions ces intersections :

× $$\begin{array}{rcl} A_n \cap B_n & = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cap \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \\ & = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{T_n \leqslant k-1\}\Big) \cap \Big(\{Z_n = \ell\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \\ & = & \varnothing \cap \{Z_n = \ell\} \\ & = & \varnothing \end{array}$$

× $$\begin{array}{rcl} A_n \cap C_n & = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cap \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) \\ & = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{T_n \leqslant k\}\Big) \cap \Big(\{Z_n = \ell\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) \\ & = & \{T_n = k\} \cap \varnothing \\ & = & \varnothing \end{array}$$

× $$\begin{array}{rcl} B_n \cap C_n & = & \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n = \ell-1\}\Big) \cap \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \\ & = & \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{T_n \leqslant k-1\}\Big) \cap \Big(\{Z_n = \ell-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \\ & = & \{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\} \end{array}$$

× $A_n \cap B_n \cap C_n$.

$$A_n \cap B_n \cap C_n \ = \ \varnothing \cap C_n \ = \ \varnothing$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}) \\ = & \mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) + \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}) + \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell - 1\}) \\ - & \mathbb{P}(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}) \end{array}$$

  Autrement dit :

$$\Phi_n(k, \ell) \;=\; \mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) + \Phi_n(k-1, \ell) + \Phi_n(k, \ell-1) - \Phi_n(k-1, \ell-1)$$

$$\boxed{\forall (k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2,\ \mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) = \Phi_n(k, \ell) - \Phi_n(k-1, \ell) - \Phi_n(k, \ell-1) + \Phi_n(k-1, \ell-1)}$$

Commentaire

L'égalité entre événements :

$$\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\} \ = \ \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell - 1\}\Big)$$

peut sembler sortie du chapeau. C'est en fait un peu le cas. Plus précisément, c'est ici l'énoncé (le résultat à obtenir) qui nous pousse à écrire cette réunion. On pouvait l'obtenir aussi en raisonnant comme suit.

$$\begin{array}{cll} & \{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\} & \\ = & \Big(\{T_n = k\} \cup \{T_n < k\}\Big) \cap \Big(\{Z_n = \ell\} \cup \{Z_n < \ell\}\Big) & \\ = & \Big(\{T_n = k\} \cup \{T_n \leqslant k-1\}\Big) \cap \Big(\{Z_n = \ell\} \cup \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) & \textit{(car } T_n \textit{ et } Z_n \textit{ sont à valeurs entières)} \\ = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) & \\ \cup & \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) & \textit{par distributivité de } \cup \textit{ sur } \cap\textit{)} \\ = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cup E_n \cup F_n \cup G_n & \end{array}$$

On cherche maintenant à exprimer $E_n \cup F_n \cup G_n$ sous la forme d'une réunion de 2 événements.

$$E_n \cup F_n \cup G_n \ = \ E_n \cup F_n \cup G_n \cup G_n \ = \ (E_n \cup G_n) \cup (F_n \cup G_n)$$

Or :

× $E_n \cup G_n$

$$\begin{array}{cl} = & \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) \\ = & \Big(\{T_n = k\} \cup \{T_n \leqslant k-1\}\Big) \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\} \\ = & \{T_n \leqslant k\} \cap \{z_n \leqslant \ell-1\} \end{array}$$

× $F_n \cup G_n$

$$\begin{array}{cl} = & \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) \\ = & \{T_n \leqslant k-1\} \cap \Big(\{Z_n = \ell\} \cup \{Z_n \leqslant \ell-1\}\Big) \\ = & \{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\} \end{array}$$

On obtient bien finalement :

$$\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\} \ = \ \Big(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k-1\} \cap \{Z_n \leqslant \ell\}\Big) \cup \Big(\{T_n \leqslant k\} \cap \{Z_n \leqslant \ell - 1\}\Big)$$

□

c) En déduire, en distinguant les trois cas $k < \ell$, $k = \ell$ et $k > \ell$, l'expression de $\mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\})$ en fonction de k et ℓ.

Démonstration.
Soit $(k, \ell) \in [\![1, N]\!]^2$. D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) = \Phi_n(k, \ell) - \Phi_n(k-1, \ell) - \Phi_n(k, \ell-1) + \Phi_n(k-1, \ell-1)$$

Trois cas se présentent.

- si $k < \ell$, alors d'après ***3.a)*** :

  $\times$ comme $k < \ell$: $\Phi_n(k,\ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$,

  $\times$ de plus $k-1 < k < \ell$, donc : $\Phi_n(k-1,\ell) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$,

  $\times$ ensuite, comme $k < \ell$, alors : $k \leqslant \ell - 1$ (car k et ℓ sont des entiers).
  Donc : $\Phi_n(k,\ell-1) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$,

  $\times$ enfin $k-1 < \ell-1$, donc : $\Phi_n(k-1,\ell-1) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$.

  Finalement :

  $$\mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) \; = \; \cancel{\left(\dfrac{k}{N}\right)^n} - \cancel{\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n} - \cancel{\left(\dfrac{k}{N}\right)^n} + \cancel{\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n} \; = \; 0$$

  $$\boxed{\text{Si } k < \ell : \mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) = 0.}$$

- si $k = \ell$, alors d'après ***3.a)*** :

  $\times$ comme $k = \ell$: $\Phi_n(k,\ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$,

  $\times$ de plus $k-1 < k = \ell$, donc : $\Phi_n(k-1,\ell) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$,

  $\times$ ensuite, comme $k = \ell$, alors : $k > \ell - 1$. Donc :

  $$\begin{aligned} \Phi_n(k,\ell-1) &= \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-(\ell-1)}{N}\right)^n \\ &= \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{\cancel{k}-(\cancel{k}-1)}{N}\right)^n \qquad \textit{(car } k = \ell\textit{)} \\ &= \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

  $\times$ enfin $k-1 = \ell-1$, donc : $\Phi_n(k-1,\ell-1) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n$.

  Finalement :

  $$\mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) \; = \; \cancel{\left(\dfrac{k}{N}\right)^n} - \cancel{\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n} - \left(\cancel{\left(\dfrac{k}{N}\right)^n} - \left(\dfrac{1}{N}\right)^n\right) + \cancel{\left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n} \; = \; \dfrac{1}{N^n}$$

  $$\boxed{\text{Si } k = \ell : \mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) = \dfrac{1}{N^n}.}$$

- si $k > \ell$, alors d'après ***3.a)*** :

  $\times$ comme $k > \ell$: $\Phi_n(k,\ell) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-\ell}{N}\right)^n$,

  $\times$ de plus, comme $k > \ell$, alors : $k-1 \geqslant \ell$ (car k et ℓ sont des entiers).
  Donc : $\Phi_n(k-1,\ell) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n - \left(\dfrac{(k-1)-\ell}{N}\right)^n$,

  $\times$ ensuite $k > \ell > \ell - 1$, donc : $\Phi_n(k,\ell-1) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-(\ell-1)}{N}\right)^n$,

× enfin $k-1 > \ell-1$, donc :

$$\Phi_n(k-1,\ell-1) = \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{(k-\cancel{1})-(\ell-\cancel{1})}{N}\right)^n = \left(\frac{k-1}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n$$

Finalement :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) \\ = \ & \left(\cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n\right) - \left(\cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-1-\ell}{N}\right)^n\right) \\ - \ & \left(\cancel{\left(\frac{k}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n\right) + \left(\cancel{\left(\frac{k-1}{N}\right)^n} - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n\right) \\ = \ & \left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } k > \ell : \mathbb{P}(\{T_n = k\} \cap \{Z_n = \ell\}) = \left(\frac{k-\ell-1}{N}\right)^n + \left(\frac{k-\ell+1}{N}\right)^n - 2\left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.}$$ □

Exercice : (EML 2010)

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in \,]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1-p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $\{\min(X_1,X_2) + X_3 > \max(X_1,X_2)\}$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

Démonstration.
D'après l'énoncé, $X_1 \sim \mathcal{G}(p)$. Autrement dit :

× $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
× $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{X_1 = k\}) = p\, q^{k-1}$.

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}.}$$ □

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{\Delta = 0\})$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\{\Delta = 0\} = \{|X_1 - X_2| = 0\} = \{X_1 - X_2 = 0\}$.

- La famille $(\{X_2 = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = 0\}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 - X_2 = 0\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\})\, \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1}\, p\, q^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \;=\; p^2 \, \frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \;=\; \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = \frac{p}{1+q}}$$

□

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\})\, \mathbb{P}(\{X_1 = n + k\})$.

Démonstration.
La famille $(\{X_2 = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\} \;\cap\; \{X_1 - X_2 = n\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\} \;\cap\; \{X_1 = k + n\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\}) \;\times\; \mathbb{P}(\{X_1 = k + n\}) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\})\, \mathbb{P}(\{X_1 = k + n\})}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}(\{\Delta = n\}) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\{\Delta = n\} \;=\; \{\ |X_1 - X_2| = n\} \;=\; \{X_1 - X_2 = n\} \;\cup\; \{X_1 - X_2 = -n\}$$

- Comme $n \neq 0$, les événements $\{X_1 - X_2 = n\}$ et $\{X_1 - X_2 = -n\}$ sont incompatibles.
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\ |X_1 - X_2| = n\}) &= \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) \;+\; \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = -n\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) \;+\; \mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = n\})
\end{aligned}$$

- Reprenons le calcul de la question précédente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_2 = k\}) \times \mathbb{P}(\{X_1 = k+n\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1} \times p\, q^{k+n-1} \\
&= p^2\, q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\
&= p^2\, q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} \\
&= p^2\, q^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p^2\, q^n\, \frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}}\, q^n\, \frac{1}{\cancel{(1-q)}\,(1+q)} = \frac{p\, q^n}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X_1 - X_2 = n\}\big) = \frac{p\,q^n}{1+q}}$$

- On vient de démontrer que pour tout couple (U, V) de v.a.r. indépedantes et de même loi géométrique on a :

$$\mathbb{P}(\{U - V = n\}) = \frac{p\,q^n}{1+q}$$

$$\boxed{\text{En choisissant } U = X_2 \text{ et } V = X_1, \text{ on obtient : } \mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = n\}) = \frac{p\,q^n}{1+q}.}$$

- Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\ \Delta = n\}) &= \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) + \mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = n\}) \\
&= 2\ \mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) = 2\ \frac{p\,q^n}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{\ \Delta = n\}) = 2\ \frac{p\,q^n}{1+q}.}$$

Commentaire

- Lorsque deux v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi, on a évidemment, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\mathbb{P}\big(\{a \leqslant X_1 \leqslant b\}\big) = \mathbb{P}\big(\{a \leqslant X_2 \leqslant b\}\big)$$
Ce type de résultat est vérifié pour tout événement écrit avec une seule v.a.r. (on peut alors remplacer X_1 par X_2).
- Lorsque l'on travaille sur une somme de v.a.r. , il faut faire attention. De manière générale :
$$\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 = n\}) \cancel{=} \mathbb{P}(\{X_1 + X_1 = n\}) = \mathbb{P}(\{\ 2\,X_1 = n\})$$
On ne peut remplacer la v.a.r. X_2 par la v.a.r. X_1 déjà présente dans l'expression. Par contre, si on dispose d'une autre v.a.r. X_3 elle aussi de même loi que X_1 et X_2, on peut écrire :
$$\mathbb{P}(\{X_1 + X_2 = n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 + X_3 = n\})$$
Cela peut être vu comme un renommage de la v.a.r. considéré.
- C'est cette idée qui nous a permis d'établir l'égalité :
$$\mathbb{P}(\{X_1 - X_2 = n\}) = \mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = n\})$$
Il était aussi possible d'effectuer le calcul de $\mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = n\})$ en mettant en place de nouveau la rédaction à l'aide de la formule des probabilités totales.
La famille $(\{X_1 = k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = n\}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 - X_1 = n\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k + n\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_1 = k\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 = k + n\}) \qquad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{k-1} \times p\, q^{k+n-1} = \frac{p\, q^n}{1+q}
\end{aligned}$$
□

4. a) Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\Delta = |X_1 - X_2| \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ étant à valeurs entières, } \Delta(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- La v.a.r. Δ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\, \mathbb{P}\big(\{\Delta = n\}\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k\, \mathbb{P}\big(\{\Delta = k\}\big) &= \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}\big(\{\Delta = k\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} k\, \frac{2\, p\, q^k}{1+q} && \textit{(d'après la question précédente et car } k \geqslant 1\textit{)} \\
&= 2\, \frac{p\, q}{1+q} \sum_{k=1}^{N} k\, q^{k-1} \quad \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 2\, \frac{\cancel{p}\, q}{1+q}\, \frac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}}
\end{aligned}$$

La limite est obtenue en reconnaissant la somme partielle d'ordre N d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in\,]-1, 1[$.
On en déduit que Δ admet une espérance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(\Delta) = \frac{2\, q}{(1+q)(1-q)}.}$$

□

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\, \mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(X_1 - X_2)^2 \;=\; {X_1}^2 - 2\, X_1 X_2 + {X_2}^2$$

La v.a.r. $(X_1 - X_2)^2$ admet une espérance car elle est la combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Plus précisément :

× ${X_1}^2$ (resp. ${X_2}^2$) admet une espérance car X_1 suit une loi géométrique et admet donc un moment d'ordre 2.

× $X_1\, X_2$ admet une espérance car X_1 et X_2 admettent toutes les deux un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } (X_1 - X_2)^2 \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) &= \mathbb{E}\big({X_1}^2 - 2\, X_1 X_2 + {X_2}^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1 X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1\big)\, \mathbb{E}\big(X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) && \textit{(car les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1\big)\, \mathbb{E}\big(X_1\big) + \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) && \textit{(les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi donc } \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) \textit{ et } \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)\textit{)} \\
&= 2\, \Big(\mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - \mathbb{E}\big(X_1\big)^2\Big) \;=\; 2\, \mathbb{V}(X_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) \;=\; 2\, \mathbb{V}(X_1)}$$

- Remarquons alors : $\Delta^2 = |X_2 - X_1|^2 = (X_2 - X_1)^2$.
On en conclut, d'après le point précédent, que la v.a.r. Δ admet un moment d'ordre 2.

De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(\Delta) & = & \mathbb{E}(\Delta^2) - \big(\mathbb{E}(\Delta)\big)^2 & \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
& = & 2\,\mathbb{V}(X_1) - \left(\dfrac{2\,q}{(1+q)\,(1-q)}\right)^2 & \\
& = & 2\,\dfrac{q}{p^2} - \dfrac{4\,q^2}{(1+q)^2\,(1-q)^2} & \textit{(car } X_1 \sim \mathcal{G}\,(p)\textit{)} \\
& = & \dfrac{2\,q}{p^2}\left(1 - \dfrac{2\,q}{(1+q)^2}\right) & \\
& = & \dfrac{2\,q}{p^2}\,\dfrac{(1+q)^2 - 2\,q}{(1+q)^2} \;=\; \dfrac{2}{p^2}\,\dfrac{(1+\cancel{2q}+q^2) - \cancel{2q}}{(1+q)^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(\Delta) \;=\; 2\,\frac{q\,(1+q^2)}{p^2\,(1+q)^2}}$$

□

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $\{X_3 > \Delta\}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$A \;=\; \{\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)\} \;=\; \{X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\}$$

- Démontrons alors : $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$.
  Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(\omega) & = & |X_2(\omega) - X_1(\omega)| \\
& = & \left\{\begin{array}{ll} X_2(\omega) - X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \geqslant X_1(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) < X_1(\omega) \end{array}\right. \\
& = & \max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) - \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) \\
& = & \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega)
\end{array}$$

  On a donc démontré :

$$\forall \omega \in \Omega,\; \Delta(\omega) = \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2).}$$

$$\boxed{\text{Et : } A \;=\; \{X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\} \;=\; \{X_3 > \Delta\}.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'une v.a.r. X est une **application** de Ω dans $\mathbb{R}$. Ainsi, démontrer l'égalité de deux v.a.r. ($X = Y$) c'est démontrer que ces deux **applications** sont égales en tout point. Plus précisément :
$$X = Y \ \Leftrightarrow\ \forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = Y(\omega)$$
Au passage :
  × lorsque l'on note $X = 5$, cela signifie que la v.a.r. X est la v.a.r. constante égale à 5 (la propriété : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = 5$ est vérifiée).
  × lorsqu'on écrit « la v.a.r. X prend la valeur 5 si ... » signifie qu'il **existe** (au moins) un tirage $\omega \in \Omega$ pour lequel $X(\omega) = 5$.

  Il existe malheureusement des énoncés dans lesquels ces deux expressions sont confondues. Ce ne devrait pas être le cas : il n'y a pas lieu de confondre les symboles $\forall$ et $\exists$.
- On trouvera dans certains corrigés une disjonction de cas du type :

  ~~× Si $X_1 > X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_1$ et $\min(X_1, X_2) = X_2$ ...~~
  ~~× Si $X_1 \leqslant X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_2$ et $\min(X_1, X_2) = X_1$ ...~~

  Cette disjonction de cas n'a pas de sens.
  Pour comprendre pourquoi ce n'est pas le cas, il faut avoir bien saisi la différence entre la relation d'ordre opérant sur les réels et celle opérant sur les applications.
  × Lorsque a et b sont des réels, on a :
  $$a \leqslant b \quad \texttt{OU} \quad a > b$$
  On dit que la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur les réels est une relation d'ordre **totale** : on peut toujours comparer deux réels.
  × La relation d'ordre sur les v.a.r. est elle aussi notée $\leqslant$ et est définie par :
  $$X_1 \leqslant X_2 \ \Leftrightarrow\ \forall \omega \in \Omega,\ X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$$
  Cette relation d'ordre n'est pas **totale**. Autrement dit, il existe des v.a.r. X_1 et X_2 qui ne sont pas comparables par la relation $\leqslant$. Plus précisément, dès qu'il existe deux tirages $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$ tels que :
  $$X_1(\omega_1) \leqslant X_2(\omega_1) \quad \text{et} \quad X_1(\omega_2) > X_2(\omega_2)$$
  alors aucune des relations : $X_1 \leqslant X_2$ et $X_1 > X_2$ n'est vérifiée puisque chacune de ces deux inégalités définie une propriété qui doit être vérifiée **pour tout** ω.

  La relation d'ordre définie sur les v.a.r. est dite **partielle** (on ne peut pas comparer tous les v.a.r.). La disjonction de cas présentée plus haut fait l'hypothèse forte que l'on peut comparer les v.a.r. X_1 et X_2. Cette hypothèse n'est pas raisonnable et une telle disjonction n'a donc pas lieu d'être.

□

6. a) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\})\, \mathbb{P}(\{X_3 > k\})$.

Démonstration.
La famille $(\{\Delta = k\})_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}(\{X_3 > \Delta\}) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\} \ \cap \ \{X_3 > \Delta\}) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\} \ \cap \ \{X_3 > k\}) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_3 > k\}) & \textit{(car Δ et X_3 sont indépendantes)}\end{array}$$

L'indépendance de X_3 et Δ est une conséquence du lemme des coalitions : comme X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, les v.a.r. $|X_2 - X_1|$ et X_3 sont indépendantes.

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X_3 > \Delta\}) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_3 > k\})}$$

□

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\{X_3 > \Delta\}) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_3 > k\})$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}(\{\Delta = 0\}) \ \times \ \mathbb{P}(\{X_3 > 0\}) & = & \mathbb{P}(\{\Delta = 0\}) \ \times \ 1 & \textit{(car $\{X_3 > 0\} = \Omega$ puisque $X_3(\Omega) = \mathbb{N}^*$)} \\ & = & \dfrac{p}{1+q} & \textit{(d'après la question 2.)}\end{array}$$

- Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(\{X_3 > k\}) \ = \ q^k$.

Commentaire

- On utilise ici ce résultat sans donner la démonstration car elle n'est pas exigée par l'énoncé (ce qui arrive parfois).
- Il faut savoir démontrer cette propriété.
  Pour ce faire, démontrons tout d'abord :

$$\mathbb{P}(\{X > k\}) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\{X > k\}}\right) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\})$$

Par ailleurs : $\{X \leqslant k\} \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \ \{X = i\}$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ \{X = i\}\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(\{X = i\}\right) & \textit{(par incompatibilité)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p \ q^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p \ \dfrac{1-q^k}{1-q} \ = \ 1 - q^k & \end{array}$$

Enfin : $\mathbb{P}(\{X > k\}) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) \ = \ 1 - (1 - q^k) \ = \ q^k$.

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_3 > \Delta\}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\}) \times \mathbb{P}(\{X_3 > k\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\Delta = 0\}) \times \mathbb{P}(\{X_3 > 0\}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\Delta = k\}) \times \mathbb{P}(\{X_3 > k\}) \\
&= \frac{p}{1+q} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,p\,q^k}{1+q} \times q^k \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \left(\frac{1}{1-q^2} - 1 \right) && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{p}{1+q} \left(1 + 2\,\frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - q^2)}{1-q^2} \right) \\
&= \frac{p}{1+q}\, \frac{1 - q^2 + 2q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{p}{1+q}\, \frac{1+q^2}{1-q^2} = \frac{\cancel{1-q}}{1+q}\, \frac{1+q^2}{(\cancel{1-q})(1+q)} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\{X_3 > \Delta\}\big) = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}.}$$

□

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in \,]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in \,]0,+\infty[$. On note $q = 1-p$. On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y \leqslant t\}) = \mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y \leqslant t\})$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } Y \sim \mathcal{E}(\lambda), \text{ alors une densité de } Y \text{ est : } f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \\ \text{De plus : } \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{\lambda^2}.\end{array}}$$

□

8. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a) Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\mathbb{P}(\{Z \geqslant t\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y \geqslant kt\})$.

Démonstration.
Soit $t \in [0,+\infty[$.

- Comme $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors la famille $(\{X = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
- Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{Z \geqslant t\}) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z \geqslant t\}) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{X = k\} \cap \left\{\frac{Y}{X} \geqslant t\right\}\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{X = k\} \cap \left\{\frac{Y}{k} \geqslant t\right\}\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y \geqslant kt\}) & \textit{(car } k > 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \mathbb{P}(\{Y \geqslant kt\}) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}(\{Z \leqslant t\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \mathbb{P}(\{Y \geqslant kt\})}$$

□

b) En déduire : $\forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}(\{Z \geqslant t\}) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(\{Z \geqslant t\}) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \mathbb{P}(\{Y \geqslant kt\}) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \big(1 - \mathbb{P}(\{Y < kt\})\big) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\, p\ \big(1 - F_Y(kt)\big) & \textit{(car } X \sim \mathcal{G}(p) \textit{ et } Y \textit{ est à densité)} \\
& = & p \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, kt} & \textit{(car } Y \sim \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } kt \geqslant 0\textit{)} \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda\,(k-1)t} & \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^{k}\ \mathrm{e}^{-\lambda\, kt} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(q\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^k & \\
& = & p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ \dfrac{1}{1 - q\ \mathrm{e}^{-\lambda t}} &
\end{array}$$

La dernière égalité est obtenue en reconnaissant la somme de la série géométrique de raison $q\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \in\,]-1, 1[$ (en effet : $q \in [0, 1[$ et $\mathrm{e}^{-\lambda t} \in [0, 1[$ car $t \geqslant 0$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}(\{Z \geqslant t\}) = \frac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}.}$$

Commentaire

On rappelle que, si $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F_Y est définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

□

c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × comme $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors : $Y(\Omega) = [0, +\infty[$,
  - × comme $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Déterminons la fonction de répartition F_Z de Z.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x \in]-\infty, 0[$, alors $\{Z \leqslant x\} = \varnothing$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). Donc :

$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}(\{Z \leqslant x\}) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  - × Si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}(\{Z \leqslant x\}) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\{Z > x\})$$

Or : $\{Z \geqslant x\} \;=\; \{Z = x\} \cup \{Z > x\}$.
Les événements $\{Z = x\}$ et $\{Z > x\}$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}(\{Z \geqslant x\}) \;=\; \mathbb{P}(\{Z = x\}) + \mathbb{P}(\{Z > x\})$$

On en déduit :

$$F_Z(x) \;=\; 1 - \big(\mathbb{P}(\{Z \geqslant x\}) - \mathbb{P}(\{Z = x\})\big) \;=\; 1 - \frac{p\, e^{-\lambda x}}{1 - q\, e^{-\lambda x}} + \mathbb{P}(\{Z = x\})$$

où la dernière égalité est obtenue avec la question ***8.b)***.
Déterminons alors $\mathbb{P}(\{Z = x\})$.
Avec le même raisonnement qu'en question ***8.a)***, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Z = x\}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y = kt\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(car, comme Y est une v.a.r. à densité : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\{Y = a\}) = 0$)

On en déduit :

$$F_Z(x) \;=\; 1 - \frac{p\, e^{-\lambda x}}{1 - q\, e^{-\lambda x}} - 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{p\, e^{-\lambda x}}{1 - q\, e^{-\lambda x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- Montrons que Z est une v.a.r. à densité.

× La fonction F_Z est continue :

- sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
- sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
- en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) = 0$.
  D'autre part :

$$\lim_{x \to 0^+} F_Z(x) \;=\; F_Z(0) \;=\; 1 - \frac{p\,\mathrm{e}^0}{1 - q\,\mathrm{e}^0} \;=\; 1 - \frac{p}{1-q} \;=\; 1 - \frac{p}{p} \;=\; 1 - 1 \;=\; 0$$

  On en déduit : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Z(x) \;=\; F_Z(0) \;=\; \lim\limits_{x \to 0^+} F_Z(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

× La fonction F_Z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité de F_Z sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Z de Z, on dérive la fonction F_Z sur les intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

  × Si $x \in \,]-\infty, 0[$:

$$f_Z(x) \;=\; F_Z'(x) \;=\; 0$$

  × Si $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_Z(x) \;&=\; F_Z'(x) \;=\; -\frac{p\,(-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x})\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big) - p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big(-q(-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x})\big)}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2} \\ &=\; \frac{\lambda\,p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2}\,\Big(1 - \cancel{q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}} + \cancel{q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}\Big) \\ &=\; \frac{\lambda\,p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2} \end{aligned}$$

  × Enfin, on **choisit** : $f_Z(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Une densité } f_Z \text{ de } Z \text{ est donc : } f_Z : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\[2mm] \dfrac{\lambda\,p\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}}{\big(1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x}\big)^2} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. .}$$

Commentaire

- Lorsqu'on cherche à déterminer la fonction de répartition F_Z, on ne sait pas encore que la v.a.r. Z est une v.a.r. à densité. Ainsi, on ne peut affirmer sans démonstration :

$$\mathbb{P}(\{Z > x\}) \ = \ \mathbb{P}(\{Z \geqslant x\})$$

C'est pourquoi on démontre $\mathbb{P}(\{Z = x\}) = 0$.
- En reprenant la démonstration de la question ***8.b)***, on peut remarquer :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ \mathbb{P}(\{Z > t\}) = \mathbb{P}(\{Z \geqslant t\})$$

Cela provient du fait que : $\mathbb{P}(\{Y < kt\}) = \mathbb{P}(\{Y \leqslant kt\})$ (car Y est une v.a.r. à densité). Il aurait certainement été plus judicieux que l'énoncé demande le calcul de $\mathbb{P}(\{Z > t\})$ en ***8.b)*** : cela aurait évité d'avoir à déterminer : $\mathbb{P}(\{Z = t\})$.

□

Exercice : (HEC 2005)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.
On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.

a) Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.

Démonstration.
Dans un premier temps, considérons que l'expérience ne s'arrête pas et que les tirages continuent indéfiniment même si l'on obtient des paires.

- Les tirages étant effectués avec remise, le résultat possible de l'expérience est un ∞-tirage. Chacun de ces ∞-tirage doit contenir tous les résultats partiels de l'expérience, à savoir les résultats obtenus lors de chaque étape de l'expérience.
Comme à chaque étape on effectue un tirage simultané dans les deux urnes, un résultat partiel peut être représenté par un couple de valeurs de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{On peut donc choisir : } \Omega = \big([\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]\big)^{\mathbb{N}^*}.}$$

- On choisit alors pour $\mathscr{A}$ la tribu discrète associée à Ω.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega).}$$

- Il reste alors à définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
Pour ce faire, on s'intéresse à des événements particuliers.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(c_1, \dots, c_k) \in \big([\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]\big)^k$. On définit :

$$A^{(c_1,\dots,c_k)} \ = \ \{(u_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \in \Omega \mid \forall i \in [\![1, k]\!], \ u_i = c_i\}$$

Autrement dit, l'événement $A^{(c_1,\dots,c_k)}$ est constitué de tous les ∞-tirages $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ qui commencent par le k-uplet de **couples** $(c_1,\dots,c_k)$. On définit alors $\mathbb{P}$ comme l'application σ-additive qui attribue la même probabilité à tous ces événements.
Plus précisément, on définit $\mathbb{P}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (c_1,\dots,c_k) \in \big([\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\big)^k,\ \mathbb{P}\big(A^{(c_1,\dots,c_k)}\big) \ = \ \left(\frac{1}{n^2}\right)^k$$

(ce résultat provient du fait que : $\operatorname{Card}\left(\big([\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]\big)^k\right) \ = \ (n^2)^k$*)*

$$\boxed{\text{Le triplet } (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \text{ ainsi défini est un espace probabilisé.}}$$

Nous avons fait initialement l'hypothèse que l'expérience de s'arrêtait pas. Si l'expérience s'arrête dès l'apparition de la première paire, on peut considérer l'espace probabilisé $(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P}')$ suivant :

× Ω' est obtenu à partir de Ω en coupant chaque ∞-tirage à la première paire obtenue (Ω' est alors constitué de suites mais aussi de séquences finies).

× $\mathscr{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$.

× $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_{|\mathscr{A}'}$ (restriciton de $\mathbb{P}$ à la tribu $\mathscr{A}'$).

□

Commentaire

- La notion d'∞-tirage n'est pas définie dans le programme officiel. Elle est introduite ici pour aider à distinguer entre le résultat de l'expérience (une suite de couples de l'ensemble $[\![1, n]\!]$) et un résultat partiel de l'expérience (le couple d'éléments de $[\![1, n]\!]$ que l'on obtient lors d'une étape *i.e.* lors d'un tirage).
- On ne peut considérer la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{A})$. En effet, cette application n'est définie que lorsque l'ensemble Ω est fini. La probabilité uniforme est alors l'application qui à tout événement élémentaire attribue la même probabilité, à savoir :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \ = \ \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

  On ne peut agir de la sorte ici, car Ω est infini. L'application $\mathbb{P}$ que l'on a défini dans cette question est telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = 0$. Ainsi, l'application $\mathbb{P}$ associe bien à chaque événement élémentaire la même probabilité mais cette probabilité est nulle.
- Le caractère uniforme que l'application $\mathbb{P}$ doit vérifier est qu'à chaque étape, la probabilité d'obtenir chacun des tirages (on parle ici de tirage et pas d'∞-tirage) doit être la même. Démontrons que c'est bien le cas pour la probabilité $\mathbb{P}$ définie dans cette question.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, définissons l'événement :

$$B_k^{(i,j)} : \text{« le résultat du } k^{\text{ème}} \text{ tirage est le couple } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ »}$$

  L'idée est alors de décomposer l'événement $B_k^{(i,j)}$ suivant les événements qui ont permis la définition de $\mathbb{P}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a alors :

$$B_k^{(i,j)} \ = \bigcup_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} A^{(c_1,\dots,c_{k-1},(i,j))}$$

  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(B_k^{(i,j)}\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} A^{(c_1,\dots,c_{k-1},(i,j))}\Big) \\
&= \sum_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} \mathbb{P}\big(A^{(c_1,\dots,c_{k-1},(i,j))}\big) \qquad \textit{(par } \sigma\textit{-additivité)} \\
&= \sum_{(c_1,\dots,c_{k-1}) \in \left([\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]\right)^{k-1}} \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \qquad \textit{(par définition de } \mathbb{P}\textit{)} \\
&= \left(n^2\right)^{k-1} \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \ = \ \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

  la dernière ligne est obtenue en remarquant : $\text{Card}\left(\left([\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]\right)^{k-1}\right) = \left(n^2\right)^{k-1}$.
- S'interroger sur la définition de Ω est important car cela permet de comprendre plus précisément ce qu'est l'expérience. Il est par exemple utile de comprendre si, au cours de l'expérience, on effectue :
  × un nombre de tirages fini fixé à l'avance.
  × un nombre infini de tirages.

  Ce point est particulièrement important lorsque l'on demande de reconnaître une loi classique : on ne s'oriente pas vers le même type de loi si l'expérience consiste une succession finie ou infinie d'épreuves de Bernoulli.

Commentaire

- Arrêter l'expérience lors de la découverte de la première paire n'a aucun intérêt. Cela complique l'écriture de l'espace probabilisé ($(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P}')$ au lieu de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$). Il est ainsi préférable de considérer que l'expérience continue même après la découverte de la $1^{\text{ère}}$ paire. On pourra alors considérer la v.a.r. qui donne le rang d'apparition de la $2^{\text{ème}}$ paire (classique dans un tel exercice) ou de la $3^{\text{ème}}$, …, $k^{\text{ème}}$ …
- Définir un espace probablisé n'est pas chose aisée. D'ailleurs, on n'a pas démontré que l'application $\mathbb{P}$ que l'on a définie est bien une application probabilité. L'esprit du programme est plutôt de considérer qu'il existe un espace probabilisé. C'est l'hypothèse qui sera faite dans la plupart des sujets. Au pire, on peut demander de renseigner l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ et, dans le cas où Ω est fini, d'indiquer que l'on choisit pour $\mathbb{P}$ l'application probabilité uniforme. Mais il ne paraît pas raisonnable de demander la définition de $\mathbb{P}$ lorsque l'univers Ω est infini. Il est d'ailleurs difficile de comprendre ce qu'attendait cet énoncé.

b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.

Démonstration.
On se permet, dans cette question uniquement, de considérer que l'expérience continue même après l'obtention d'une paire. On verra, notamment en question ***3.a)***, comment rédiger sans faire cette hypothèse.

- L'expérience aléatoire consiste en la succession infinie d'épreuves de Bernoulli (tirage simultanée des deux boules) indépendantes et de même paramètre de succès $p = \dfrac{1}{n}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir une paire). Précisons l'obtention du paramètre p :

$$p = \frac{\text{nombre de paires d'éléments de } [\![1, n]\!]}{\text{nombre de couples d'éléments de } [\![1, n]\!]} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

- La v.a.r. Y est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \sim \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{n}\right).}$$

- On en déduit que Y admet une espérance et une variance. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \\ \mathbb{V}(Y) &= \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) n^2 = \frac{n-1}{n}\, n^2 = n\,(n-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = n \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = n\,(n-1)}$$

□

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{U = k\})$.
En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1.
Reconnaître la loi de U.

Commentaire

L'énoncé aurait pu, une nouvelle fois, présenter différemment l'expérience en n'exigeant pas son arrêt lors de la découverte de la première boule blanche numérotée 1.
Il aurait alors fallu adopter la présentation suivante :
× l'expérience consiste à effectuer des tirages avec remise.
× on note alors U le rang d'apparition de la première boule blanche tirée.
On adopte dans la suite du corrigé le point de vue de l'exercice, à savoir l'arrêt de l'expérience pour la condition citée.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $\{U = k\}$ est réalisé si et seulement si k tirages ont été effectués au cours de l'expérience. Autrement dit, si la première boule blanche numérotée 1 est apparue lors du $k^{\text{ème}}$ tirage.
- Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, et tout $i \in [\![1, 2]\!]$ on note :

$$B_\ell^{(i,-)} : \text{« la boule blanche numéro } i \text{ est obtenue lors du } \ell^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

  D'après ce qui précède :

$$\{U = k\} \;=\; B_1^{(2,-)} \,\cap\, \ldots \,\cap\, B_{k-1}^{(2,-)} \,\cap\, B_k^{(1,-)}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big(\{U = k\}\big) \\ = \;& \mathbb{P}\Big(B_1^{(2,-)}\Big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(2,-)}}\Big(B_2^{(2,-)}\Big) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1^{(2,-)} \cap \ldots \cap B_{k-2}^{(2,-)}}\Big(B_{k-1}^{(2,-)}\Big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(2,-)} \cap \ldots \cap B_{k-1}^{(2,-)}}\Big(B_k^{(1,-)}\Big) \\ = \;& \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \times \ldots \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

  En effet, à chaque tirage, on peut obtenir chacun des 4 couples différents avec la même probabilité. Deux de ces couples commencent par 1 (ce qui signifie que la boule blanche numérotée 1 est tirée) et deux autres commencent par 2 (c'est la boule blanche numérotée 2 qui est tirée).
- En résumé :
  × $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (la boule blanche numérotée 1 peut apparaître lors de n'importe quel tirage).
  × $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\{U = k\}\big) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } U \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

Commentaire

- La manière dont est présentée l'expérience influe sur la rédaction. Ici, on ne peut pas dire que les tirages sont indépendants. On comprend aisément qu'il y a une influence du résultat d'un tirage sur le résultat du suivant, ce qui se traduit en terme de probabilités. Plus précisément, considérons l'événement « obtenir la boule blanche numérotée 1 lors des deux premiers tirages ». Cet événement est l'événement impossible puisque l'expérience prend fin lors de l'obtention de la première boule blanche numérotée 1. On a alors :

$$\underbrace{\mathbb{P}\Big(B_1^{(1,-)} \cap B_2^{(1,-)}\Big)}_{=\,0} \neq \underbrace{\mathbb{P}\Big(B_1^{(1,-)}\Big) \times \mathbb{P}\Big(B_2^{(1,-)}\Big)}_{=\,\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

- Si l'on considère que l'expérience ne s'arrête jamais, on peut mettre en place la rédaction usuelle qui suit pour démontrer : $U \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
  - × L'expérience aléatoire consiste en la succession infinie d'épreuves de Bernoulli (tirage simultanée des deux boules) indépendantes et de même paramètre de succès $p = \dfrac{1}{2}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir la boule blanche numérotée 1).
  - × La v.a.r. U est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

- Il reste à déterminer la probabilité de l'événement C : « ne jamais obtenir la boule blanche numérotée 1 ». Remarquons tout d'abord :

$$\overline{C} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{U = k\}$$

En effet, $\overline{C}$ est réalisé si et seulement si il existe un rang $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\{U = k\}$ est réalisé. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{C}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{U = k\}\Big) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{U = k\}\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big(\{U = k\}\big)_{k \in \mathbb{N}^*} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1\right) && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } \tfrac{1}{2} \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1\right) \ = \ 1 - (2 - 1) \ = \ 1 - 1 \ = \ 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de ne jamais tirer la boule blanche numérotée 1 est nulle.}}$$

Commentaire

On raisonne ici à l'aide de l'événement contraire de C.
On peut aussi raisonner directement sur C :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(C) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \{U \neq k\}\Big) & \\ & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{N} \{U \neq k\}\Big) & \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \end{array}$$

On doit alors calculer $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{N} \{U \neq k\}\Big)$. Les événements constituant cette intersection n'étant pas indépendants, il n'y a alors guère le choix : il est nécessaire de raisonner à l'aide de l'événement contraire. Plus précisément :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{N} \{U \neq k\}\Big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{N} \{U = k\}\Big)$$

On retombe alors sur une démonstration similaire à la précédente. □

b) Déterminer la loi du couple (U, Z).

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  Par ailleurs : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. En effet, lors de l'expérience, il est possible :
  - × de n'obtenir aucune paire. Par exemple, si $\omega = \big((1,2)\big)$, alors $Z(\omega) = 0$.
  - × d'obtenir une seule paire. Par exemple, si $\omega = \big((2,2),(1,2)\big)$, alors $Z(\omega) = 1$.
  - × ...
  - × d'obtenir j paires ($j \in \mathbb{N}^*$). Par exemple, si $\omega = \big(\underbrace{(2,2),\dots,(2,2)}_{j \text{ fois}},(1,2)\big)$, alors $Z(\omega) = j$.
  - × ...
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et soit $j \in \mathbb{N}$.

	L'événément $\{U = i\} \cap \{Z = j\}$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $\{U = i\}$ est réalisé	et	l'événément $\{Z = j\}$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	On a effectué i tirages (la $1^{\text{ère}}$ boule blanche numérotée 1 a été obtenue lors du $i^{\text{ème}}$ tirage)	et	on a obtenu j paires

  Deux cas se présentent.
  - × Si $i < j$, alors : $\{U = i\} \cap \{Z = j\} = \varnothing$.
    En effet, on ne peut obtenir plus de paires que le nombre de tirages effectués.

    $$\boxed{\text{Si } i < j \text{ alors } \mathbb{P}\big(\{U = i\} \cap \{Z = j\}\big) = 0.}$$

  - × Si $i \geqslant j$, il s'agit alors de dénombrer l'ensemble des i-tirages qui réalisent l'événement $\{U = i\} \cap \{Z = j\}$. De tels i-tirages sont constituées de j paires.
    Deux cas se présentent.

– Un i-tirage qui réalise l'événement $\{U = i\} \cap \{Z = j\}$ et **qui finit par une paire** est constitué de $j-1$ paires $(2,2)$, d'une paire $(1,1)$ (en dernière position) et de $i-j$ couples $(2,1)$. Un tel i-tirage est entièrement déterminé par :

  ▸ la position des $j-1$ paires $(2,2)$ sur les $i-1$ premières places : $\binom{i-1}{j-1}$ possibilités.

  Il y a $\binom{i-1}{j-1}$ tels i-tirages.

– Un i-tirage qui réalise l'événement $\{U = i\} \cap \{Z = j\}$ et **qui ne finit par une paire** est constitué de j paires $(2,2)$, d'un couple $(1,2)$ (en dernière position) et de $i-j$ couples $(2,1)$. Un tel i-tirage est entièrement déterminé par :

  ▸ la position des j paires $(2,2)$ sur les $i-1$ premières places : $\binom{i-1}{j}$ possibilités.

  Il y a $\binom{i-1}{j}$ tels i-tirages.

Ainsi, il y a :

$$\binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j} = \binom{i}{j} \quad \textit{(d'après la formule du triangle de Pascal)}$$

i-tirages réalisant l'événement $\{U = i\} \cap \{Z = j\}$.

Comme il y a en tout 4^i i-tirages (Card $\left(\left([\![1,2]\!] \times [\![1,2]\!]\right)^i\right) = 4^i$), on a :

$$\mathbb{P}\big(\{U = i\} \cap \{Z = j\}\big) = \frac{\binom{i}{j}}{4^i}$$

$$\boxed{\text{Si } i \geqslant j,\ \mathbb{P}\big(\{U = i\} \cap \{Z = j\}\big) = \frac{1}{4^i}\binom{i}{j}.}$$

Commentaire

- On peut remarquer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0, i]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\{U=i\}}\big(\{Z=j\}\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{U=i\} \cap \{Z=j\}\big)}{\mathbb{P}(\{U=i\})} \\
&= \frac{\binom{i}{j}\frac{1}{4^i}}{\frac{1}{2^i}} = \binom{i}{j} \frac{1}{4^i}\, 2^i = \binom{i}{j} \frac{1}{2^i} \\
&= \binom{i}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{i-j}
\end{aligned}$$

  Cela permet de conclure que la loi conditionnelle de Z sachant (que l'événement) $\{U = i\}$ (est réalisé) est la loi $\mathcal{B}\left(i, \dfrac{1}{2}\right)$.

- Il semble assez naturel, pour la question posée, de définir plutôt la loi conditionnelle et de s'en servir pour définir la loi de couple à l'aide de l'égalité (vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0, i]\!]$) :

$$\mathbb{P}\big(\{U=i\} \cap \{Z=j\}\big) = \mathbb{P}(\{U=i\})\ \mathbb{P}_{\{U=i\}}\big(\{Z=j\}\big)$$

  Mais peut-on facilement déterminer $\mathbb{P}_{\{U=i\}}\big(\{Z=j\}\big)$?
  On a envie de rédiger comme suit.
  - Si $\{U = i\}$ est réalisé, c'est que la première boule blanche numérotée 1 apparaît lors du $i^{\text{ème}}$ tirage. Dans ce cas, l'événement $\{Z = j\}$ est réalisé si et seulement si ces i premiers tirages contiennent exactement j paires.
  - L'expérience a donc consisté en une succession de i épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) de même paramètre de succès $p = \frac{1}{2}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir une paire).

  Il manque un argument important pour conclure que l'on a bien affaire à une loi binomiale : les épreuves de Bernoulli doivent être **indépendantes**. Or, on a déjà vu que l'hypothèse d'indépendance n'est pas raisonnable puisque l'on considère que l'expérience prend fin dès la découverte de la première boule blanche numérotée 1. □

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(\{Z = k\}) = \sum\limits_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$.

Démonstration.
La famille $\big(\{U = \ell\}\big)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{U=\ell\} \cap \{Z=k\}\big) \\
&= \cancel{\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell<k}}^{+\infty} \mathbb{P}(\{U=\ell\} \cap \{Z=k\})} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \geqslant k}}^{+\infty} \mathbb{P}(\{U=\ell\} \cap \{Z=k\}) \\
&= \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\{U=\ell\} \cap \{Z=k\}) \qquad \textit{(car } k \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}.}$$

Commentaire

- Il n'est pas envisageable de ne pas savoir comment traiter cette question : déterminer une loi marginale à partir d'une loi de couple est une méthode classique qu'il faut parfaitement connaître. Seule la 4ème égalité nécessite d'avoir très précisément déterminé la loi du couple (U, Z). On rappelle que tout ce qui est écrit **de juste** sera comptabilisé aux concours. Une erreur précédente sur la loi de couple ne devrait pas être de nouveau pénalisée ici.
- Le résultat étant formulé, cette question nous révèle en ce que l'on était supposé trouver pour la loi du couple (U, Z). Cela permet de se rassurer quant aux résultats obtenus précédemment (ou de déceler une erreur qu'on essaiera alors de corriger). □

d) Calculer $\mathbb{P}(\{Z=1\})$.
Montrer : $\mathbb{P}(\{Z=0\}) = \dfrac{1}{3}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z=1\}\big) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \binom{\ell}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1} \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique dérivée première de raison } \tfrac{1}{4} \in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\cancel{4}} \frac{4^{\cancel{2}}}{3^2} = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Z=1\}\big) = \frac{4}{9}}$$

- En reprenant la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z=0\}\big) &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \geqslant 0}}^{+\infty} \mathbb{P}(\{U=\ell\} \cap \{Z=0\}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{U=\ell\} \cap \{Z=0\}) && \textit{(car } [\![1,+\infty[\![\cap [\![0,+\infty[\![= [\![1,+\infty[\![\textit{)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \binom{\ell}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} - \left(\frac{1}{4}\right)^{0} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{\frac{3}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Z=0\}\big) \;=\; \frac{1}{3}}$$

Commentaire

- La formule démontrée en question précédente est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On ne peut donc pas l'appliquer en $k=0$. Pour obtenir la valeur de $\mathbb{P}\big(\{Z=0\}\big)$ on cherche dans la démonstration de la question précédente à quel moment l'hypothèse $k \geqslant 1$ a été utilisée. On modifie la fin en conséquence.
- Le fait que cette question demande le calcul de $\mathbb{P}\big(\{Z=0\}\big)$ alors que la précédente consiste à démontrer une formule pour $\mathbb{P}\big(\{Z=k\}\big)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ doit alerter : le cas $k=0$ est forcément un cas particulier (sinon on aurait écrit directement une formule pour tout $k \in \mathbb{N}$). Il n'est pas facile de penser à ce cas particulier $k=0$ lors de la résolution de la question précédente. C'est pourquoi on traite d'abord le cas $k \in \mathbb{N}^*$ (le cas qui ne pose pas de problème).
- Enfin, on remarque que l'énoncé donne la valeur à trouver pour $\mathbb{P}\big(\{Z=0\}\big)$. Cela permet de repérer qu'on commet une erreur si l'on essaie d'utiliser la formule de la question précédente lorsque $k=0$.

$\square$

e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question ***3.c)*** pour $k=i+1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\mathbb{P}(\{Z=i+1\}) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i+1\}) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i\})$$

Commentaire

L'énoncé de cette question contient tous les éléments permettant de la résoudre. Il faut s'efforcer de repérer et traiter ce type de questions qui décrivent précisément la méthode de résolution.

Démonstration.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i+1\}) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i\})$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\binom{\ell}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=i}^{+\infty}\binom{\ell}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \qquad \textit{(d'après la question \textbf{3.c)})}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\binom{\ell}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\binom{\ell}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4}\binom{i}{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\left(\binom{\ell}{i+1}+\binom{\ell}{i}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{i} \qquad \textit{(en regroupant les sommes)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\binom{\ell+1}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{i} \qquad \textit{(par la formule du triangle de Pascal)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\ell=i}^{+\infty}\binom{\ell+1}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell} \qquad \textit{(en remarquant } \tbinom{\ell+1}{i+1}=1 \textit{ lorsque } \ell=i\textit{)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\binom{\ell}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell-1} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}$$

$$= \sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\binom{\ell}{i+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$

$$= \mathbb{P}(\{Z=i+1\}) \qquad \textit{(d'après la question \textbf{3.c)})}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z=i+1\}) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i+1\}) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i\}).}$$

Commentaire

Dans la démonstration, on commence par $\frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i+1\})+\frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i\})$ pour former finalement $\mathbb{P}(\{Z=i+1\})$. Il y a deux raisons à cela :

× de manière générale, on part du plus compliqué pour aller vers le plus simple.

× on manipule, dans la démonstration, des sommes infinies. Ces sommes existent : on l'a démontré à l'aide de la formule des probabilités totales en question ***3.c)***. On peut alors regrouper ces sommes en une somme qui existe elle aussi (c'est la propriété de linéarité des sommes infinies qui le stipule). En revanche, si on part de $\mathbb{P}(\{Z=i+1\})$, il va falloir découper en deux sommes. Pour ce faire, il faudra démontrer la convergence de ces deux sommes. Il conviendrait alors de travailler à l'aide de somme partielles (ce qui permet de s'assurer de la bonne existence de tous les objets) avant d'obtenir le résultat souhaité par passage à la limite.

□

f) En déduire la loi de Z.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

- En question ***3.d)***, on a démontré : $\mathbb{P}\big(\{Z=0\}\big) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}\big(\{Z=1\}\big) = \dfrac{4}{9}$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\{Z=i+1\}) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i+1\}) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i\})$$

  Ainsi, en réordonnant :

$$\frac{3}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i+1\}) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{Z=i\})$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z=i+1\}) = \frac{\cancel{4}}{3}\,\frac{1}{\cancel{4}}\,\mathbb{P}(\{Z=i\}) = \frac{1}{3}\,\mathbb{P}(\{Z=i\})}$$

- Par une récurrence immédiate, on a alors :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z=i+1\}) \ = \ \left(\frac{1}{3}\right)^i \mathbb{P}(\{Z=1\}) \ = \ \left(\frac{1}{3}\right)^i \frac{4}{9}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En résumé : } Z(\Omega)=\mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{Z=0\}\big)=\dfrac{1}{3},\ \mathbb{P}\big(\{Z=1\}\big)=\dfrac{4}{9} \text{ et enfin :}\\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z=i+1\}) \ = \ \left(\dfrac{1}{3}\right)^i \dfrac{4}{9}.\end{array}}$$

□

Partie II. Tirages sans remise

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers

4. Déterminer la loi de X_1.

Démonstration.
La v.a.r. X_1 compte le nombre de paires obtenues à l'issue d'1 tirage dans des urnes contenant seulement 1 boule. Lors de ce tirage, on obtient forcément le couple $(1,1)$ qui est une paire.
Ainsi, la v.a.r. X_1 est constante égale à 1.

$$\boxed{\text{On a notamment : } X_1(\Omega)=\{1\} \text{ et } \mathbb{P}\big(\{X_1=1\}\big)=1.}$$

□

5. On suppose dans cette question que $n=2$.
Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir. En déduire la loi de X_2.

Démonstration.
Chaque urne contient deux boules. Ainsi, un 2-tirage est entièrement déterminé par :

× la boule blanche obtenue lors du premier tirage : 2 possibilités.
× la boule noire obtenue lors du premier tirage : 2 possibilités.
× la boule blanche obtenue lors du deuxième tirage : 1 possibilité.
× le numéro de la deuxième boule noire obtenue : 1 possibilité.

$$\boxed{\text{Il y a donc } 2\times 2\times 1\times 1 = 4 \text{ résultats possibles.}}$$

- La v.a.r. X_2 compte le nombre de paires obtenues lors de ces deux tirages.
  Deux cas se présentent.

× Si on obtient une paire lors du premier tirage (par exemple $(1, 1)$), alors il reste deux boules (une dans chaque urne) numérotées par le même numéro (les deux boules numérotées 2).
Lors du deuxième tirage, on obtient donc forcément une paire.
Dans ce cas, X_2 prend la valeur 2.

$$\boxed{\text{Plus précisément, } X_2(\omega) = 2 \text{ si et seulement si } \omega = \big((1,1),(2,2)\big) \text{ ou } \omega = \big((2,2),(1,1)\big).}$$

× Si on n'obtient pas une paire lors du premier tirage, c'est qu'on a tiré une boule numérotée 1 et une boule numérotrée 2. À l'issue de ce tirage, il reste une boule dans chaque urne : l'une numérotée 1, l'autre numérotée 2.
Lors du deuxième tirage, on obtient donc forcément un couple qui n'est pas une paire.
Dans ce cas, X_2 prend la valeur 0.

$$\boxed{\text{Plus précisément, } X_2(\omega) = 0 \text{ si et seulement si } \omega = \big((1,2),(2,1)\big) \text{ ou } \omega = \big((2,1),(1,2)\big).}$$

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{0, 2\}}$$

Commentaire

- Il ne faut pas confondre les deux propriétés suivantes.
  - La v.a.r. X_2 prend la valeur 2 : cette propriété signifie qu'il existe (au moins) un 2-tirage $\omega \in \Omega$ tel que $X_2(\omega) = 2$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_2 \text{ prend la valeur } 2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = 2}$$

  - $X_2 = 2$: cette propriété signifie que X_2 est la v.a.r. constante égale à 2. Autrement dit, pour tout 2-tirage $\omega \in \Omega$ on a : $X_2(\omega) = 2$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_2 \text{ prend la valeur } 2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = 2}$$

  Certains énoncés (comme `ECRICOME 2017`) se permettent de confondre ces deux propriétés pour éviter l'introduction des tirages ω, objet considérés comme difficile à manipuler. On peut s'interroger sur l'intérêt d'une telle pratique consistant à confondre la quantification universelle ($\forall$) et la quantification existentielle ($\exists$).
- L'énoncé propose de préciser les événements élémentaires permettant d'obtenir chacune des valeurs de X_2. Rappelons qu'un événement élémentaire est un événement constitué d'un seul tirage ω. Il faut donc comprendre qu'on demande les tirages ω qui permettent à X_2 de prendre la valeur étudiée. Autrement dit, il est demandé d'exhiber, dans le premier cas, les tirages ω qui réalisent l'événement $\{X_2 = 2\}$ et, dans le deuxième cas, les tirages qui réalisent $\{X_2 = 0\}$.

- Chacun des 4 tirages possibles étant équiprobables, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\{X_2 = 2\}\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(\{X_2 = 0\}\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_2(\Omega) = \{0, 2\},\ \mathbb{P}\big(\{X_2 = 0\}\big) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\big(\{X_2 = 2\}\big).}$$

Commentaire

Le fait que X_2 ne prenne que deux valeurs ne signifie pas que X_2 suit une loi de Bernoulli.
L'ensemble image d'une v.a.r. X suivant une loi de Bernoulli est $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
Ainsi, X_2 ne suit pas une loi de Bernoulli.

□

B. Étude du cas général

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

6. a) Décrire l'univers Ω des événements observables.

Démonstration.

- Les deux urnes contiennent des boules dont le numéro est dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
- Chaque tirage résulte donc en un couple d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
  Autrement dit, le résultat d'un tirage est un élément de $[\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.
- Les tirages étant effectués sans remise, Ω est constitué des n-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\Omega \text{ est l'ensemble des } n\text{-arrangements de l'ensemble } [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!].}$$

□

b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.

Démonstration.
Un n-tirages de Ω est entièrement déterminé par :

× le couple obtenu lors du 1^{er} tirage : $n \times n$ possibilités.
(avant le 1^{er} tirage, chaque urne contient n boules)

× le couple obtenu lors du $2^{\text{ème}}$ tirage : $(n-1) \times (n-1)$ possibilités.
(avant le $2^{\text{ème}}$ tirage, chaque urne contient $n-1$ boules)

× ...

× le couple obtenu lors du $n^{\text{ème}}$ tirage : 1×1 possibilités.
(avant le $n^{\text{ème}}$ tirage, chaque urne contient 1 boule)

Il y a en tout :

$$(n \times n) \times \big((n-1) \times (n-1)\big) \times \ldots \times (1 \times 1) \ = \ \big(n \times (n-1) \times \ldots \times 1\big)^2 \ = \ \big(n!\big)^2$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Card}(\Omega) = \big(n!\big)^2.}$$

□

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Démonstration.

- Dans le cas $n = 1$, on a démontré $X_1(\Omega) = \{1\}$.
- Dans le cas $n = 2$, on a démontré $X_2(\Omega) = \{0, 2\}$.
- Étudions maintenant le cas $n \geqslant 3$.
  × si $\omega = \big((1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)\big)$, alors $X_n(\omega) = 0$.
  × soit $i \in [\![1, n-2]\!]$. Considérons le n-tirage :

$$\omega \ = \ \big((1, 1), \ldots, (i, i), (i+1, i+2), \ldots, (n-1, n), (n, i)\big)$$

  (i paires suivies de $n - i$ couples qui ne sont pas des paires)
  Alors $X_n(\omega) = i$.

- × si $\omega = \big((1,1),\dots,(n,n)\big)$, alors $X_n(\omega) = n$.
- × enfin, notons que X_n ne peut prendre la valeur $n-1$. En effet, si un n-tirage contient $n-1$ paires, les deux numéros non utilisés dans ces paires forment eux-mêmes une paire.
  Ainsi, un n-tirage contenant $n-1$ paires contient donc n paires.

$$\boxed{\text{Dans le cas } n \geqslant 3,\ X_n(\Omega) = [\![0, n-2]\!] \ \cup\ \{n\}.}$$

□

Pour tout entier naturel k, on note $a(n,k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$.
Par convention, $a(0,0) = 1$.

7. a) Préciser la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j)$.

Démonstration.

- Comme $X_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$, la famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  On en déduit :
  $$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) \ = \ 1$$
- Chacun des tirages étant équiprobables, on en déduit, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$:
  $$\mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) \ = \ \frac{\text{Card}\big(\{X_n = j\}\big)}{\text{Card}\,(\Omega)}$$
- On a donc : $\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{\text{Card}\big(\{X_n = j\}\big)}{\text{Card}\,(\Omega)} \ = \ 1$. Et ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{j=0}^{n} \text{Card}\big(\{X_n = j\}\big) & = & \text{Card}\,(\Omega) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j) & & (n!)^2 \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} a(n,j) = (n!)^2}$$

Commentaire

- Rappelons que si X est une v.a.r. **discrète**, la famille $\big(\{X = x\}\big)_{x\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X.
- On rappelle de plus que la famille obtenue en ajoutant l'événement impossible $\varnothing$ à un système complet d'événements est encore un système complet d'événements (les événements de cette famille sont encore 2 à 2 incompatibles et leur réunion forme Ω). Ce résultat est très pratique dans les cas où on n'a pas déterminé précisément l'ensemble $X(\Omega)$ d'une v.a.r. X **discrète**. Plus précisément :
  $$X(\Omega) \subset E \ \Rightarrow \ \big(\{X = x\}\big)_{x\in E} \text{ forme un système complet d'événements}$$
  Dans la question traitée : $X_n(\Omega) = [\![1,n]\!] \setminus \{n-1\}$.
  Ainsi, la famille $\big(\{X = j\}\big)_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{n-1\}}$ forme un système complet d'événements.
  La famille $\big(\{X = j\}\big)_{j\in[\![1,n]\!]}$ forme elle aussi un système complet d'événements.

□

b) Déterminer $a(n,n)$ et $a(n,n-1)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, rappelons : $a(n,n) = \text{Card}\left(\{X_n = n\}\right)$.
  Il s'agit donc de dénombrer les n-tirages réalisant $\{X_n = n\}$.
  Un n-tirage réalisant $\{X_n = n\}$ est un n-tirage constitué de n paires.
  Un tel n-tirage est entièrement déterminé par :
  - × la position de la paire $(1,1)$: n possibilités.
  - × la position de la paire $(2,2)$ parmi les $n-1$ positions restantes : $n-1$ possibilités.
  - × ...
  - × la position de la paire (n,n) parmi la seule position restante : 1 possibilité.

  Il y a donc $n!$ tels n-tirages.

$$\boxed{a(n,n) = \text{Card}\left(\{X_n = n\}\right) = n!}$$

- Rappelons maintenant : $a(n,n-1) = \text{Card}\left(\{X_n = n-1\}\right)$.
  On a démontré en question ***6.c)*** que X_n ne peut pas prendre la valeur $n-1$.
  Ainsi : $\{X_n = n-1\} = \varnothing$.

$$\boxed{a(n,n-1) = \text{Card}\left(\{X_n = n-1\}\right) = 0}$$

□

8. a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n,j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$$

En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = n!$$

Donner l'expression de $a(n,0)$ en fonction des nombres $\big(a(j,0)\big)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0,n]\!]$.

- Il s'agit de dénombrer l'ensemble $\{X_n = j\}$.
  Un n-tirage réalisant $\{X_n = j\}$ est un n-tirage constitué exactement de j paires.
  Un tel n-tirage est entièrement déterminé par :
  - × les j entiers de $[\![1,n]\!]$ apparaissant dans les paires : $\binom{n}{j}$ possibilités.
  - × les j positions du n-tirage qui contiennent des paires : $\binom{n}{j}$ possibilités.
  - × la manière dont les j paires sont placées dans les j positions choisies : $j!$ possibilités.
  - × le choix et la position des $n-j$ couples qui ne sont pas des paires dans les $n-j$ positions restantes : $a(n-j,0)$ possibilités. $(*)$

  Il y a donc $\binom{j}{n} \times \binom{j}{n} \times j! \times a(n-j,0)$ tels n-tirages. Ainsi :

$$a(n,j) \ = \ \binom{j}{n}\binom{j}{n} j!\, a(n-j,0) \ = \ \binom{j}{n} \frac{n!}{\cancel{j!}(n-j)!} \cancel{j!}\, a(n-j,0)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{a(n,j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j,0)}{(n-j)!}}$$

$(*)$ Détaillons ce point.
À ce stade, les j paires participant au n-tirage ont déjà été choisies. Les couples restants (ce ne sont pas des paires) sont donc construits à l'aide de $n-j$ entiers de $[\![1,n]\!]$.
Renumérotons ces entiers pour les appeler, du plus petit au plus grand : 1, 2, ..., $(n-j)$.
On peut de même renuméroter les $n-j$ positions restantes.

Il s'agit alors de former $n-j$ couples distincts d'éléments de $[\![1,n-j]\!]$ qui ne sont pas des paires. On forme ainsi un $(n-j)$-uplet d'éléments de $[\![1,n-j]\!] \times [\![1,n-j]\!]$ constitué d'éléments distincts et qui ne sont pas des paires. Autrement dit, on forme un $(n-j)$-tirage qui réalise l'événement $\{X_{n-j} = 0\}$.

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \frac{a(n-k,0)}{(n-k)!} && \textit{(en posant le changement de variable } k = n-j\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a(n-k,0)}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a(n,k)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} a(n,k) \\
&= \frac{1}{\cancel{n!}} (n!)^{\cancel{2}} = n! && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = n!.}$$

Commentaire

- Détaillons le changement de variable effectué dans cette question.
  Considérons une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} u_j &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\
&= u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1 + u_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}
\end{aligned}$$

  On appelle parfois ce procédé : sommation dans l'autre sens.

- Il faut faire attention aux indices de la somme de départ.
  Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} + \binom{n}{n} \frac{a(n,0)}{n!} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= n! && \textit{(d'après ce qui précède)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Comme } \binom{n}{n} = 1, \text{ on a : } a(n,0) = n! \left(n! - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} \right)}$$

□

b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.
Justifier l'égalité : $\binom{j}{i} \binom{k}{j} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i}$, puis montrer :

$$\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = 0$$

En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j}$$

Démonstration.
Rappelons que l'on choisit $k \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![0, k-1]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i} &= \frac{k!}{i!\,\cancel{(k-i)!}} \, \frac{\cancel{(k-i)!}}{(j-i)!\,\big((k-\cancel{i}) - (j-\cancel{i})\big)!} \\
&= \frac{1}{i!\,(j-i)!} \, \frac{k!}{(k-j)!} \\
&= \frac{j!}{i!\,(j-i)!} \, \frac{k!}{j!\,(k-j)!} && \textit{(en multipliant par } \tfrac{j!}{j!}\textit{)} \\
&= \binom{j}{i} \binom{k}{j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n]\!], \forall i \in [\![0, k-1]\!], \binom{j}{i} \binom{k}{j} = \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i}.}$$

Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à k éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient k individus)
On souhaite alors construire un couple (P, Q) de parties de E où P est une partie à j éléments de E et Q est une partie de P qui contient i éléments *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de j individus qui seront des représentants régionaux et, parmi ces individus, choisir i représentants nationaux).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières.

1) On choisit d'abord la partie P à j éléments de E : $\binom{k}{j}$ possibilités.
On choisit alors la partie Q à i de cette partie P : $\binom{j}{i}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants régionaux et on élit parmi eux i représentants nationaux)
Ainsi, il y a $\binom{j}{i}\binom{k}{j}$ manières de construire le couple (P, Q).

2) On choisit d'abord la partie Q à i éléments de E : $\binom{k}{i}$ possibilités.
On choisit ensuite $j - i$ éléments dans $E \setminus Q$ que l'on ajoute à Q pour former P : $\binom{k-i}{j-i}$ possibilités.
(on choisit d'abord les i représentants nationaux -qui seront aussi représentants régionaux- puis on ajoute les $j - i$ représentants régionaux manquants)
Ainsi, il y a $\binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}$ manières de construire le couple (P, Q).

On retrouve ainsi le résultat.

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} &= \sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i} && \textit{(d'après ce qui précède)} \\
&= \binom{k}{i} \sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{k-i}{j-i} && \textit{(car } \tbinom{k}{i} \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } j\textit{)} \\
&= \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^{j+i} \binom{k-i}{j} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j \binom{k-i}{j} && \textit{(car } (-1)^i \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } j\textit{)} \\
&= (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} 1^{(k-i)-j} \times (-1)^j && \textit{(en multipliant par } 1^{(k-i)-j} = 1\textit{)} \\
&= (-1)^i \binom{k}{i} \big((-1)+1\big)^{k-i} && \textit{(en reconnaissant la formule du binôme de Newton)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} = 0.}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} &= \sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} + (-1)^k \binom{k}{i} \binom{k}{k} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= 0 && \textit{(d'après ce qui précède)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i} \binom{k}{j} = -(-1)^k \binom{k}{i} = (-1)^{k+1} \binom{k}{i}.}$$

□

9. a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :

$$a(j, 0) = j! \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \, i!$$

Montrer l'égalité :

$$a(k, 0) = k! \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \, i!$$

(On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n, 0)$ trouvée dans la question ***8.a)***)

Démonstration.

- En question ***8.a)*** on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a(n, 0) = n! \left(n! - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{a(j, 0)}{j!} \right)$$

- On a alors :

$$
\begin{aligned}
a(k,0) &= k!\left(k! - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\frac{a(j,0)}{j!}\right) && \textit{(en appliquant la formule précédente à } n = k \in \mathbb{N}^*\textit{)}\\
&= k!\left(k! - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\frac{1}{\cancel{j!}}\left(\cancel{j!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\ (-1)^{j-i}\ i!\right)\right) && \textit{(par hypothèse de l'énoncé avec } j \in [\![0, k-1]\!]\textit{)}\\
&= k!\left(k! - \sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{k}{j}\binom{j}{i}\ (-1)^{j-i}\ i!\right)\right) && \textit{(car } \tbinom{k}{j} \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } i\textit{)}\\
&= k!\left(k! - \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k-1}\binom{k}{j}\binom{j}{i}\ (-1)^{j-i}\ i!\right) && \textit{(par définition des sommes doubles)}\\
&= k!\left(k! - \sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{j=i}^{k-1}\binom{k}{j}\binom{j}{i}\ (-1)^{j-i}\ i!\right)\right) && \textit{(par définition des sommes doubles)}\\
&= k!\left(k! - \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{i!}{(-1)^i}\sum_{j=i}^{k-1}\binom{k}{j}\binom{j}{i}\ (-1)^{j}\right)\right) && \textit{(car } (-1)^{-i}\, i! \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } j\textit{)}\\
&= k!\left(k! - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{i!}{(-1)^i}\ (-1)^{k+1}\binom{k}{i}\right) && \textit{(d'après la question précédente)}\\
&= k!\left(k! - (-1)\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\ (-1)^{k-i}\, i!\right) && \textit{(car } -1 \textit{ ne dépend pas de l'indice de sommation } i\textit{)}\\
&= k!\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\ (-1)^{k-i}\, i!\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{a(k,0) \ = \ k!\ \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\ (-1)^{k-i}\, i!\right).}$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k,0)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence **forte** : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : a(k,0) \ = \ k!\ \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\ (-1)^{k-i}\, i!\right)$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $a(0,0) = 1$ par convention.
  - D'autre part : $0!\ \left(\sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i}\ (-1)^{0-i}\, i!\right) = \binom{0}{0}\ (-1)^{0-0}\, 0! = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(*)$
  Supposons : $\forall j \in [\![0, k-1]\!], \mathcal{P}(j)$ *(ce qui signifie que la propriété est vraie jusqu'au rang $k-1$)* et démontrons $\mathcal{P}(k)$.
  C'est le cas d'après la question ***9.a)***.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ a(k,0) \ = \ k!\ \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\ (-1)^{k-i}\, i!\right).}$$

Commentaire

- Lorsque l'on procède par récurrence pour démontrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$, l'étape d'hérédité consiste à démontrer la propriété :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \big(\mathcal{P}(k) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(k+1)\big)$$
Cela permettre de comprendre le schéma de rédaction associé à cette étape.
On commence par introduire k : « Soit $k \in \mathbb{N}$ ».
Puis on démontre l'implication, ce qui se fait à l'aide du schéma de rédaction suivant : « Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ ».
- Lorsque l'on démontre : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$ par récurrence forte, l'étape d'hérédité est différente :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \Big(\big(\forall j \in [\![0,k]\!], \mathcal{P}(j)\big) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(k+1) \Big)$$
ce qui peut encore s'écrire :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \Big(\big(\forall j \in [\![0,k-1]\!], \mathcal{P}(j)\big) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(k) \Big)$$
C'est cette écriture qui explique la rédaction de la question $(*)$.
- L'énoncé demande de démontrer la propriété pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$. Évidemment, en la démontrant pour tout $k \in \mathbb{N}$ on répond convenablement à la question. □

c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Démonstration.

- On a déjà vu en question ***6.c)*** : $X_n(\Omega) = [\![0, n-2]\!] \cup \{n\}$.
- Soit $j \in [\![0, n-2]\!] \cup \{n\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) &= \frac{\mathrm{Card}\big(\{X_n = j\}\big)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \\
&= \frac{1}{(n!)^2}\ a(n,j) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{(n!)^{\cancel{2}}} \left(\cancel{n!} \binom{n}{j} \frac{a(n-j,0)}{(n-j)!} \right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n!\ \cancel{(n-j)!}} \binom{n}{j} \left(\cancel{(n-j)!} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^{n-j-i}\ i! \right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.b)}} \textit{ avec } k = n-j \in \mathbb{N}\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{j!\,(n-j)!} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(n-j)!}{\cancel{i!}\,(n-j-i)!} (-1)^{n-j-i}\ \cancel{i!} \right) \\
&= \frac{\cancel{(n-j)!}}{j!\ \cancel{(n-j)!}} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^{(n-j)-i}}{((n-j)-i)!} \right) \\
&= \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{k!} \right) && \textit{(avec le décalage d'indice } k = (n-j)-i\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![0, n-2]\!] \cup \{n\},\ \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) \ =\ \frac{1}{j!} \left(\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^k}{k!} \right)}$$

Commentaire

- On ne se sert jamais dans la démonstration du fait que j est différent de $n-1$. Ainsi, la formule démontrée est aussi vérifiée pour $j = n-1$.
On peut le vérifier par le calcul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-(n-1)} \frac{(-1)^k}{k!} &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \big(1 + (-1)\big) \ = \ 0 \end{aligned}$$

Cela correspond à ce que l'on doit trouver car : $\mathbb{P}\big(\{X_n = n-1\}\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

- On peut aussi, à l'aide de ce que l'on a démontré en question ***7.b)***, vérifier par le calcul que la formule démontrée dans cette question est bien vérifiée pour $j = n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-n} \frac{(-1)^k}{k!} &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^0}{0!} = \frac{1}{n!} \\ &= \frac{n!}{(n!)^2} = \frac{\mathrm{Card}\big(\{X_n = n\}\big)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) \end{aligned}$$

□

Exercice : (EDHEC 2007)

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir Pile et celle d'obtenir Face étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier Pile.
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \cdots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. Établir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$: $\frac{1}{k} \leqslant 1$. D'où :

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- On obtient :
  × $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$
  × La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ converge.}}$$

□

2. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

Démonstration.

- La première partie de l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{2}$ (correspondant à la probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. Z correspond au rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

- En particulier, la v.a.r. Z admet une espérance et une variance. De plus :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \frac{1}{\frac{1}{2}} \ = \ 2$$

$$\mathbb{V}(Z) \ = \ \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \ = \ \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}} \ = \ \frac{1}{\frac{1}{2}} \ = \ 2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = 2 \text{ et } \mathbb{V}(Z) = 2.}$$

□

3. ***a)*** Pour tout couple (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\})$.

Démonstration.
Soit $(i,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.

- Si $i > k$.
  L'événement $\{Z=k\} \cap \{X=i\}$ est réalisé si et seulement si :
  × lors de la première partie de l'expérience, on a obtenu le premier Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer,
  ET
  × lors de la seconde partie de l'expérience, on a tiré la boule numéro i parmi les boules numérotées de 1 à k.

  Ceci est impossible si $i > k$. On obtient donc :

  $$\{Z=k\} \cap \{X=i\} = \varnothing$$

  On en déduit :

  $$\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) \ = \ \frac{\mathbb{P}(\{Z=k\} \cap \{X=i\})}{\mathbb{P}(\{Z=k\})} \ = \ \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(\{Z=k\})} \ = \ 0$$

- Si $i \leqslant k$.
  Si l'événement $\{Z=k\}$ est réalisé, alors la seconde partie de l'expérience consiste en un tirage uniforme sur k boules numérotées de 1 à k. D'où :

  $$\mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) \ = \ \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } (i,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X=i\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ \frac{1}{k} & \text{si } i \leqslant k \end{cases}}$$

□

b) En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X = i\}) = \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
La famille $(\{Z = k\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X = i\}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z = k\} \cap \{X = i\}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z = k\})\, \mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X = i\}) && \textit{(car : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(\{Z = k\}) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(\{Z = k\})\, \mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X = i\}) + \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z = k\})\, \mathbb{P}_{\{Z=k\}}(\{X = i\}) \\
&= \cancel{\sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} \times 0} + \sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} && \textit{(d'après la question précédente et car } Z \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)\textit{)} \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{X = i\}) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

□

c) On admet dans cette question que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sum\limits_{i=1}^{k}$. Vérifier : $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\}) = 1$.
Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\}) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) && \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{i=1}^{k} 1 \right) && \textit{(car } \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \textit{ ne dépend pas de la variable } i\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \cancel{k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} && \textit{(car } \frac{1}{2} \in \,]-1, 1[\textit{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\}) \ = \ 1}$$

□

Commentaire

- Le théorème (hors programme) autorisant l'interversion de sommes, donnée par l'énoncé, est le **théorème de Fubini**. Il s'énonce comme suit.
  Soient $K \subset \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{N}$. Soit $(u_{k,i})_{(k,i)\in K\times I}$ une suite de réels.
  Sous « réserve de convergence absolue » :
$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I} u_{i,k}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K} u_{i,k}\right)$$
- Plus précisément, dans notre cas, on a : $K = \mathbb{N}^*$, $I = [\![1,k]\!]$ et $u_{i,k} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.
  On aurait donc effectué la démarche suivante :
  1) démontrer la convergence absolue de la série $\sum\limits_{i\in I} u_{i,,k}$
  L'ensemble I est fini, on travaille donc ici sur une somme finie (et non infinie) et il n'y a pas de convergence à démontrer,
  2) démontrer la convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\in K} S_k$, où $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} u_{i,k}$.
  3) conclure quant à l'intersersion les symboles $\sum$ à l'aide du théorème de Fubini.
- Notons enfin que c'est ce théorème qui est à l'origine du théorème de transfert pour les couples de v.a.r. discrètes. En effet, l'espérance de la v.a.r. $g(X,Y)$ est donnée par :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big) &= \sum_{i\in X(\Omega)}\left(\sum_{j\in Y(\Omega)} g(i,j)\,\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\right)\\ &= \sum_{j\in Y(\Omega)}\left(\sum_{i\in x(\Omega)} g(i,j)\,\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\right)\end{aligned}$$
  ce qui est autorisé sous réserve de convergence absolue.

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\,\mathbb{P}(\{X=i\}) \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$.

Démonstration.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in [\![i,+\infty[\![$.
  Comme $i \leqslant k$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$:
$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \geqslant \frac{1}{k}\\ \text{donc}\quad & \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ \text{d'où}\quad & \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$
- Soit $N \geqslant i$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de i à n, on obtient :
$$\sum_{k=i}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \sum_{k=i}^{N}\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = i\sum_{k=i}^{N}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- De plus, les séries $\sum\limits_{k\geqslant i} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\sum\limits_{k\geqslant i} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ convergent. En effet :

  × $\sum\limits_{k\geqslant i} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$. On a alors :

$$\sum_{k=i}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-i+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

  × d'après la question ***4.b)***, la série $\sum\limits_{k\geqslant i} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et :

$$\sum_{k=i}^{N} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \mathbb{P}(\{X=i\})$$

- En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \geqslant & i \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ \parallel & & \parallel \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} & & i\,\mathbb{P}(\{X=i\}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall i \in \mathbb{N}^*,\ i\,\mathbb{P}(\{X=i\}) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.}$$

Commentaire

On rappelle que la convergence des séries en présence est indispensable pour obtenir l'inégalité :

$$\sum_{k=i}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

à partir de l'inégalité :

$$\forall N \geqslant i, \quad \sum_{k=i}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant \sum_{k=i}^{N} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

□

b) En déduire que X possède une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} i\,\mathbb{P}(\{X=i\})$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer sa convergence car c'est une série à termes positifs.
- On sait :

  × d'après la question précédente :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant i\,\mathbb{P}(\{X=i\}) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

× la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ est une série convergente. En effet, soit $N \geqslant 1$:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \quad \textit{(par décalage d'undice)}$$

Or $\sum\limits_{i \geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$, donc elle est convergente.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i\, \mathbb{P}(\{X = i\})$ converge.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$$

Démonstration.
Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\, \mathbb{P}(\{X = i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.b)}}\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \right) && \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} i \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \frac{\cancel{k}(k+1)}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Or la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1}{2} \in \,]-1,1[$, donc elle est convergente. On obtient :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}} - 1\right) \;=\; \frac{1}{2}\,(4-1) \;=\; \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}}$$

□

5. a) Utiliser le résultat de la question ***5a)*** pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i^2\, \mathbb{P}(\{X = i\})$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer sa convergence car c'est une série à termes positifs.
- On sait :
  × d'après la question ***5.a)*** :
  $$0 \;\leqslant\; i\,\mathbb{P}(\{X = i\}) \;\leqslant\; \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$
  D'où :
  $$0 \;\leqslant\; i^2\,\mathbb{P}(\{X = i\}) \;\leqslant\; i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$
  × La série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
  Elle est donc convergente.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i^2\, \mathbb{P}(\{X = i\})$ est convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2.}}$$

□

b) Établir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question ***4c)*** :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Démonstration.

Par définition du moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2\, \mathbb{P}(\{X = i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) && \textit{(d'après \textbf{4.b)})} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i^2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) && \textit{(d'après l'énoncé)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{i=1}^{k} i^2 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\cancel{k}(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

□

c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = a\,k\,(k-1) + b\,k + c$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'une part :

$$(k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1$$

- D'autre part :

$$a\,k(k-1) + b\,k + c = a\,(k^2 - k) + b\,k + c = a\,k^2 + (b-a)\,k + c$$

- Par identification, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} a & & & = & 2 \\ -a & + & b & = & 3 \\ & & c & = & 1 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rccl} a & & = & 2 \\ & b & = & 5 \\ & c & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)(2k+1) = 2\,k(k-1) + 5\,k + 1.}$$

□

d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et vérifier : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{11}{12}$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)(2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \big(2\,k(k-1) + 5\,k + 1\big) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \ + \ \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \ + \ \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

- Or :
  × tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k && \textit{(car } 1 \times (1-1) \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0\textit{)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} && \textit{(car } \frac{1}{2} \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} \ = \ \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} \\
&= 4
\end{aligned}$$

  × De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} && \textit{(car } \frac{1}{2} \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\cancel{2}}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

  × Enfin :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 && \textit{(car } \frac{1}{2} \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= 2 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3} \times 4 + \frac{5}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} = \frac{8+10+1}{6} = \frac{19}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{19}{6}}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \;=\; \frac{19}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \;=\; \frac{19}{6} - \frac{9}{4} \;=\; \frac{38-27}{12} \;=\; \frac{11}{12}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{11}{12}}$$

□

6. On admet le résultat suivant, appelé *Inégalité de Bienaymé-Chebychev.*
Soit X une v.a.r. qui admet une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

En déduire : $\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) \leqslant \dfrac{11}{27}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. X admet une variance.
  On en déduit, d'après l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, soit $\varepsilon > 0$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}\right) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \mathbb{P}\left(\left\{\left|X - \dfrac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) & & \dfrac{\frac{11}{12}}{\varepsilon^2} & = & \dfrac{11}{12\,\varepsilon^2} \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.d)}}\textit{)} \end{array}$$

- De plus : $\left\{X - \dfrac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|X - \dfrac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\}$.
  En effet, soit $\omega \in \left\{X - \dfrac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right\}$, alors : $X(\omega) - \dfrac{3}{2} \geqslant \varepsilon$.
  Or $\varepsilon > 0$, donc, par croissance de $x \mapsto |x|$ sur $[0, +\infty[$:

$$\left|X(\omega) - \frac{3}{2}\right| \;\geqslant\; |\varepsilon| = \varepsilon$$

  c'est-à-dire : $\omega \in \left\{\left|X - \dfrac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\}$.

- On en déduit, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\left(\left\{X - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right\}\right) \;\leqslant\; \mathbb{P}\left(\left\{\left|X - \frac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right)$$

  Ainsi, par transitivité :

$$\mathbb{P}\left(\left\{X - \frac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right\}\right) \;\leqslant\; \mathbb{P}\left(\left\{\left|X - \frac{3}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) \;\leqslant\; \frac{11}{12\,\varepsilon^2}$$

- Or : $\left\{X - \dfrac{3}{2} \geqslant \varepsilon\right\} \;=\; \left\{X \geqslant \varepsilon + \dfrac{3}{2}\right\}$.
  Ainsi, en choisissant ε tel que $\varepsilon + \dfrac{3}{2} = 3$, on obtient :

$$\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) \;\leqslant\; \frac{11}{12\,\varepsilon^2}$$

De plus :

$$\varepsilon + \frac{3}{2} = 3 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

On en déduit : $\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) \leqslant \dfrac{11}{12\left(\frac{3}{2}\right)^2}$.

Enfin :

$$\frac{11}{12\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{11}{12 \times \frac{9}{4}} = \frac{11 \times 4}{12 \times 9} = \frac{11}{3 \times 9} = \frac{11}{27}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) \leqslant \frac{11}{27}.}$$

□

7. On se propose de calculer $\mathbb{P}(\{X = 1\})$, $\mathbb{P}(\{X = 2\})$ et $\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\})$.

a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Par décalage d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Comme $x \neq 1$, la somme des termes d'une suite géométrique de raison x vaut :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, pour tout $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

- De plus les fonctions $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{1-x}$ sont continues sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
- Ainsi :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) dx$$

Or :

× d'une part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\,dx\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \cancel{\frac{1}{k}\,0^k}\right)$$

× d'autre part, toujours par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right)\, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \\ &= \Big[-\ln\left(|1-x|\right) \Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \cancel{\ln(1-0)} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx\end{aligned}$$

Or :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\big(-\ln(2)\big) = \ln(2)$$

On en déduit :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right)\, dx = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx}$$

□

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} & \\ \text{donc} & 0 \geqslant -x \geqslant -\dfrac{1}{2} & \\ \text{d'où} & 1 \geqslant 1-x \geqslant \dfrac{1}{2} & \\ \text{ainsi} & 1 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant 2 & \textit{(par décroissance de } x \mapsto \dfrac{1}{x} \textit{ sur }]0,+\infty[) \\ \text{enfin} & x^n \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant 2\, x^n & \textit{(car } x^n \geqslant 0) \end{array}$$

  On en déduit : $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant 2\, x^n$.

- Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} 2\, x^n\, dx$$

- De plus :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2\,x^n \;dx \;=\; 2\;\left[\;\frac{x^{n+1}}{n+1}\;\right]_0^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \;=\; \frac{\cancel{2}}{n+1}\;\frac{1}{2^{n+\cancel{1}}} \;=\; \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Enfin, comme $0 \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$:

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n \;\leqslant\; \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\;dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

- On obtient alors :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, car $\dfrac{1}{2} \in\,]-1,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\;dx = 0.}$$

□

d) Établir alors : $\mathbb{P}(\{X=1\}) = \ln(2)$, puis donner la valeur de $\mathbb{P}(\{X=2\})$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.b)*** : $\mathbb{P}(\{X=1\}) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.
- De plus, d'après la question ***8.b)***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \ln(2) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\;dx$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\;dx = 0$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \ln(2) - 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(\{X=1\}) = \ln(2).}$$

- D'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}(\{X=1\}) \;=\; \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \;=\; \ln(2) - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X=2\}) = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

□

e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\})$, puis donner une valeur approchée de $\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\})$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question ?

Démonstration.

- Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$, la famille $(\{X = 1\}, \{X = 2\}, \{X \geqslant 3\})$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\}) + \mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) \ = \ 1$$
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) \ = \ 1 - \big(\mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\})\big) \ = \ 1 - \left(\ln(2) + \ln(2) - \frac{1}{2}\right) \ = \ \frac{3}{2} - 2\,\ln(2)$$
  $$\boxed{\mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) = \frac{3}{2} - 2\,\ln(2)}$$
  $$\boxed{\text{D'après l'énoncé, on obtient : } \mathbb{P}(\{X \geqslant 3\}) \ \simeq \ \frac{3}{2} - 2 \times 0,7 \ = \ 1,5 - 1,4 \ = \ 0,1.}$$
- La majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Chebychev est $\dfrac{11}{27} \simeq 0,4$.
  $$\boxed{\text{On en déduit que la majoration donnée par la question } \textbf{\textit{7.}} \text{ est très large.}}$$

Commentaire

Ce constat n'est pas étonnant : les inégalités de concentration sont toutes peu précises. □

Exercice : (HEC 2003)

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

Démonstration.
Tout d'abord :
$$\det(A) \ = \ \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) \ = \ a^2 - b^2$$
$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } \det(A) = a^2 - a^2 = 0 \text{ et ainsi } A \text{ est non inversible.}}$$
□

b) Calculer la matrice $A^2 - 2a\,A$.
En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  $$A^2 \ = \ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + ba \\ ba + ab & b^2 + a^2 \end{pmatrix}$$
- Ainsi :
  $$A^2 - 2a\,A \ = \ \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2\,ab \\ 2\,ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\,a^2 & 2\,ab \\ 2\,ab & 2\,a^2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & 0 \\ 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix} \ = \ (b^2 - a^2)\ I_2$$
  $$\boxed{A^2 - 2a\,A = (b^2 - a^2)\ I_2}$$

- Remarquons alors :

$$b^2 - a^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (b-a)\,(b+a) = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b \;\texttt{OU}\; a = -b$$

Or, comme $a > 0$ et $b > 0$, alors : $a \neq -b$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } b^2 - a^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b.}$$

- Supposons alors $a \neq b$. D'après le point précédent : $b^2 - a^2 \neq 0$.
D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{lrcll} & A^2 - 2a\,A & = & (b^2 - a^2)\; I_2 & \\ \text{donc} & A(A - 2a\,I_2) & = & (b^2 - a^2)\; I_2 & \\ \text{et} & A\left(\dfrac{1}{b^2 - a^2}\;(A - 2a\,I_2)\right) & = & I_2 & \qquad \textit{(car } b^2 - a^2 \neq 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible, d'inverse } \dfrac{1}{b^2 - a^2}\;(A - 2a\,I_2).}$$

□

c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme : $P(X) = X^2 - 2a\,X + (a^2 - b^2)$ est un polynôme annulateur de A. Or :

$$P(X) = X^2 - 2a\,X + (a-b)\,(a+b) = \big(X - (a-b)\big)\,\big(X - (a+b)\big)$$

Or : $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{\text{racines de } P\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{a - b, a + b\}}$$

- Vérifions que $a - b$ est valeur propre de A :

$$\det(A - (a-b)\,I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a - (a-b) & b \\ b & a - (a-b) \end{pmatrix}\right) \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}\right) \;=\; b^2 - b^2 \;=\; 0$$

Ainsi, $A - (a-b)\,I_2$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, } a - b \text{ est valeur propre de } A.}$$

- Vérifions que $a + b$ est valeur propre de A :

$$\det(A - (a+b)\,I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a - (a+b) & b \\ b & a - (a+b) \end{pmatrix}\right) \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\right) \;=\; (-b)^2 - b^2 \;=\; b^2 - b^2 \;=\; 0$$

Ainsi, $A - (a+b)\,I_2$ n'est pas inversible.

$$\boxed{\text{Ainsi, } a - b \text{ est valeur propre de } A.}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{a - b, a + b\}.}$$

Commentaire

- Étant en présence d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on privilégie ici l'utilisation du déterminant. Cependant, on peut aussi rédiger à l'aide d'un calcul de rang. Par exemple :

$$\text{rg}(A - (a+b)\, I_2) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\right) < 2 \quad \text{car } C_1 = -C_2$$

- Au vu de la première question, introduire un polynôme annulateur est un bon réflexe. Cependant, on peut faire une démonstration directe.
Détaillons-la. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \text{Sp}(A) & \Leftrightarrow & A - \lambda\, I \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda\, I_2) = 0 \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} \det(A - \lambda I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (a-\lambda)^2 - b^2 = \big((a-\lambda) - b\big)\, \big((a-\lambda) + b\big) \\ & = & \big(\lambda - (a-b)\big)\, \big(\lambda - (a+b)\big) \end{array}$$

On obtient bien : $\text{Sp}(A) = \{a-b, a+b\}$.

□

d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que $a-b$ et $a+b$ sont des valeurs distinctes :

$$a + b = a - b \;\Leftrightarrow\; 2b = 0 \;\Leftrightarrow\; b = 0$$

$$\boxed{\text{Comme } b > 0, \text{ on a bien : } a - b \neq a + b.}$$

- Remarquons alors :
  × $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a+b$.

    De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  × $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

    Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a-b$.

    De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$:

  × est libre car obtenue comme concaténation de deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (car $a-b \neq a+b$).

  × vérifie : $\text{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 2 = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ constituée de vecteurs propres de } A.}$$

$$\boxed{\text{En posant } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient : } A = Q\Delta Q^{-1}.}$$

□

Commentaire

- Les vecteurs propres utilisés dans cette question n'ont pas été déterminés au hasard mais obtenus par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$. Par exemple, pour $\lambda = a+b$, il s'agit de chercher les vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{a+b}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - (a+b)\, I_2)\; U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A - (a+b)\, I_2)\; U \;=\; \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; x \cdot C_1 + y \cdot C_2 \;=\; x \cdot \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'aide de cette combinaison linéaire, il faut choisir $x = y$. En prenant par exemple $x = y = 1$, on obtient : $E_{a+b}(A) \;=\; \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Dans la démonstration, on exhibe des vecteurs propres. On obtient ainsi les inclusions suivantes :

$$E_{a+b}(A) \supseteq \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_{a-b}(A) \supseteq \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

  Comme A est carrée d'ordre 2 et possède 2 valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable. On en déduit :

$$\dim\big(E_{a+b}(A)\big) + \dim\big(E_{a-b}(A)\big) = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big) = 2$$

  ce qui permet de conclure : $\dim\big(E_{a+b}(A)\big) = 1$ et $\dim\big(E_{a-b}(A)\big) = 1$ et ainsi de démontrer que les inclusions ci-dessus sont des égalités.

- On pouvait aussi déterminer les espaces propres $E_{a+b}(A)$ et $E_{a-b}(A)$ en procédant par résolution de systèmes linéaires.

e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$Q^{-1} \;=\; \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  avec $\det(Q) = (1 \times (-1)) - (1 \times 1) = -2$.

$$\boxed{Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} A^n & = & Q\Delta^n Q^{-1} & \textit{(par une récurrence immédiate)} \\ & = & \dfrac{1}{2}\, Q \begin{pmatrix} (a+b)^n & 0 \\ 0 & (a-b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \\ & = & \dfrac{1}{2}\, Q \begin{pmatrix} (a+b)^n & (a+b)^n \\ (a-b)^n & -(a-b)^n \end{pmatrix} & \\ & = & \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b)^n & (a+b)^n \\ (a-b)^n & -(a-b)^n \end{pmatrix} & \\ & = & \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a-b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a-b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}.}$$

□

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que la probabilité de l'événement $\{X = Y\}$ est donnée par : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) = \dfrac{p}{2-p}$.
En déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

Démonstration.

- Rappelons que comme $Y \sim \mathcal{G}(p)$:
  - ***(i)*** $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
  - ***(ii)*** $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\{Y = k\}\big) = p\,(1-p)^{k-1}$.
- La famille $\big(\{Y = k\}\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X=Y\}\big) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=k\}\cap\{X=Y\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=k\}\cap\{X=k\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big)\times\mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) && \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1}\times p\,(1-p)^{k-1} && \textit{(car } X\sim\mathcal{G}(p) \textit{ et } Y\sim\mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} p\,(1-p)^{k}\times p\,(1-p)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^k \\
&= p^2\,\frac{1}{1-(1-p)^2} && \textit{(avec } 1-p\neq 1 \textit{ puisque } p\neq 0\textit{)} \\
&= p^2\,\frac{1}{\cancel{1}-(\cancel{1}-2p+p^2)} = p^2\,\frac{1}{2p-p^2} = p^{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{p}\,(2-p)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\big(\{X=Y\}\big)=\frac{p}{2-p}.}$$

- Soit $\omega\in\Omega$.
  Dans la question ***1.***, on a considéré une matrice $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ avec $a>0$ et $b>0$.
  On a démontré (questions ***1.a)*** et ***1.b)***) :

  $$A \text{ inversible } \Leftrightarrow a\neq b$$

  Comme X et Y suivent une loi géométrique, elles sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
  Ainsi : $X(\omega)>0$ et $Y(\omega)>0$. On en déduit :

  $$M(\omega)=\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega)\\ Y(\omega) & X(\omega)\end{pmatrix} \text{ est inversible } \Leftrightarrow X(\omega)\neq Y(\omega)$$

  et ainsi :

  $$\{\,\omega\in\Omega \mid M(\omega) \text{ est inversible }\} = \{\,\omega\in\Omega\mid X(\omega)\neq Y(\omega)\,\} = \{X\neq Y\} = \overline{\{X=Y\}}$$

  Ainsi :

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}\big(\{\,\omega\in\Omega\mid M(\omega)\text{ est inversible }\}\big) &= \mathbb{P}\Big(\overline{\{X=Y\}}\Big) \\
  &= 1-\mathbb{P}\big(\{X=Y\}\big) \\
  &= 1-\frac{p}{2-p} \\
  &= \frac{(2-p)-p}{2-p} = \frac{2-2p}{2-p} = 2\,\frac{1-p}{2-p}
  \end{aligned}$$

  $$\boxed{\mathbb{P}\big(\{\,\omega\in\Omega\mid M(\omega)\text{ est inversible }\}\big)=2\,\frac{1-p}{2-p}}$$

  □

b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$.
  Dans la question ***1.***, on a vu que tout matrice A qui s'écrit sous la forme : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $b > 0$ admet deux valeurs propres distinctes $a - b$ et $a + b$.
  Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:
  $\times$ $X(\omega) > 0$ et $Y(\omega) > 0$.
  $\times$ $Y(\omega) > -Y(\omega)$ et donc : $X(\omega) + Y(\omega) > X(\omega) - Y(\omega)$.
  On déduit de la question ***1.*** que la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres distinctes : $X(\omega) - Y(\omega)$ et $X(\omega) + Y(\omega)$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \forall \omega \in \Omega,\ D(\omega) = X(\omega) - Y(\omega) \text{ et } S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).}$$

- Rappelons tout d'abord que les v.a.r. X et Y admettent une variance car elles suivent toutes les deux la loi $\mathcal{G}(p)$. Les v.a.r. $S = X + Y$ et $D = X - Y$ admettent chacune une variance comme somme et différence de v.a.r. discrètes qui admettent une variance.

  $$\boxed{\text{On en conclut que les v.a.r. } S \text{ et } D \text{ admettent une covariance.}}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Cov}(S, D) & = & \mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) & \textit{(par définition de } S \textit{ et } D\textit{)} \\
 & = & \mathrm{Cov}(X, X - Y) + \mathrm{Cov}(Y, X - Y) & \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur covariance)} \\
 & = & \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Cov}(Y, Y) & \textit{(par linéarité à gauche de l'opérateur covariance)} \\
 & = & \mathrm{Cov}(X, X) - \cancel{\mathrm{Cov}(X, Y)} + \cancel{\mathrm{Cov}(X, Y)} - \mathrm{Cov}(Y, Y) & \textit{(par symétrie de l'opérateur covariance)} \\
 & = & \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) \ = \ 0 & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ suivent la même loi)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(S, D) = 0}$$

Commentaire

Les noms des v.a.r. S et D ne sont pas choisis au hasard :
$\times$ la v.a.r. S est la somme : $S = X + Y$,
$\times$ la v.a.r. D est la différence : $D = X - Y$.
C'est une indication de l'énoncé qui permet de confirmer les formules trouvées pour S et D.

□

c) Calculer les probabilités $\mathbb{P}\big(\{S = 2\} \cap \{D = 0\}\big)$, $\mathbb{P}\big(\{S = 2\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{D = 0\}\big)$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\{S=2\} \cap \{D=0\} \ = \ \{X+Y=2\} \cap \{X-Y=0\} \ = \ \{X=1\} \cap \{Y=1\}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{S=2\} \cap \{D=0\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{X=1\} \cap \{Y=1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{Y=1\}\big) && \textit{(par indépendance des v.a.r. } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
&= p \times p \ = \ p^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{S=2\} \cap \{D=0\}\big) = p^2}$$

- Ensuite :

$$\{S=2\} \ = \ \{X+Y=2\} \ = \ \{X=1\} \cap \{Y=1\}$$

En effet, comme les v.a.r. X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors, pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $X(\omega) \geqslant 1$, $Y(\omega) \geqslant 1$. Ce qui permet de conclure :

$$X(\omega) + Y(\omega) = 2 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} X(\omega) = 1 \\ Y(\omega) = 1 \end{cases}$$

et démontre ainsi l'égalité d'événements précédente.

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{S=2\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{X=1\} \cap \{Y=1\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{S=2\} \cap \{D=0\}\big) \ = \ p^2}$$

- Enfin :

$$\{D=0\} \ = \ \{X-Y=0\} \ = \ \{X=Y\}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{D=0\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{X=Y\}\big) \ = \ \frac{p}{2-p}}$$

- Il reste alors à étudier si les v.a.r. S et D sont indépendantes. Or :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{S=2\} \cap \{D=0\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{S=2\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{D=0\}\big) \\
\Leftrightarrow \ & p^2 \ = \ p^2 \, \frac{p}{2-p} \\
\Leftrightarrow \ & 1 \ = \ \frac{p}{2-p} && \textit{(car } p \neq 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & 2-p \ = \ p \\
\Leftrightarrow \ & 2 \ = \ 2p \\
\Leftrightarrow \ & 1 \ = \ p
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $p \neq 1$.
On en déduit : $\mathbb{P}\big(\{S=2\} \cap \{D=0\}\big) \ \neq \ \mathbb{P}\big(\{S=2\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{D=0\}\big)$.

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } S \text{ et } D \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- Profitons de cette question pour rappeller que deux v.a.r. **discrètes** U et V sont indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\boxed{\forall u \in U(\Omega), \forall v \in V(\Omega),\ \mathbb{P}(\{U = u\} \cap \{V = v\}) \ = \ \mathbb{P}(\{U = u\}) \times \mathbb{P}(\{V = v\})}$$

Ainsi, U et V ne sont pas indépendantes si :

$$\boxed{\exists u \in U(\Omega), \exists v \in V(\Omega),\ \mathbb{P}(\{U = u\} \cap \{V = v\}) \ \neq \ \mathbb{P}(\{U = u\}) \times \mathbb{P}(\{V = v\})}$$

C'est donc la définition qui nous permet de conclure que S et D ne sont pas indépendantes.

- Profitons-en aussi pour rappeler le lien entre covariance et indépendance :

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Cov}(U, V) = 0}$$

Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée.
Elle permet de démontrer que deux v.a.r. U et V ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\operatorname{Cov}(U, V) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence.
Les v.a.r. S et D illustrent ce point puisque ces v.a.r. :

× ne sont pas indépendantes,
× vérifient $\operatorname{Cov}(S, D) = 0$. □

d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbb{P}(\{S = n\}) = (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$\{S = n\} \ = \ \{X + Y = n\}$$

- La famille $\big(\{Y = k\}\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X+Y=n\}\big) \ &= \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \cap \{X+Y=n\}\big) \\
&= \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \cap \{X+{\color{red}k}=n\}\big) \\
&= \ \sum_{\substack{k=1 \\ n-k \in X(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \cap \{X=n-k\}\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{k=1 \\ n-k \notin X(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \cap \{X=n-k\}\big)} \qquad \textit{(car } \{X = n-k\} = \varnothing \textit{ si } n-k \notin X(\Omega)\textit{)} \\
&= \ \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \cap \{X=n-k\}\big)
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n-k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ k \in [\![1,+\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n-k \\ 1 \leqslant k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{X+Y=n\}) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \cap \{X=n-k\}\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X=n-k\}\big) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p\,(1-p)^{k-1} \times p\,(1-p)^{n-k-1} & \textit{(car } X \sim \mathcal{G}(p) \textit{ et } Y \sim \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p^2\,(1-p)^{n-2} \ = \ (n-1)\ p^2\,(1-p)^{n-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\big(\{X+Y=n\}\big) = (n-1)\ p^2\,(1-p)^{n-2}.}$$

Commentaire

- Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ ET } \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ ET } \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

- On peut illustrer ce propos par une présentation légèrement différente de la question précédente :

$$\left\{\begin{array}{l} n-k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ k \in [\![1,+\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n-k < +\infty \\ 1 \leqslant k < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-n \leqslant -k < +\infty \\ 1 \leqslant k < +\infty \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\infty < k \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant k < +\infty \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant k \leqslant n-1\right.$$

$\square$

e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Démonstration.

- Il s'agit de trouver l'entier $N \geqslant 2$ qui maximise $\mathbb{P}\big(\{S=N\}\big) = (N-1)\,p^2\,(1-p)^{N-2}$.
  On réalise alors l'étude la fonction f suivante afin de déterminer si elle admet un maximum :

$$f : x \mapsto (x-1)\,p^2\,(1-p)^{x-2} \ = \ (x-1)\,p^2\ \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big)$$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ commme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= p^2 \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2 \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) \\ &= \big(p^2 + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2\big)\ \exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) \end{aligned}$$

Comme $\exp\big((x-2)\ \ln(1-p)\big) > 0$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $p^2 + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad p^2 + (x-1)\ \ln(1-p)\, p^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p^2\big(1 + (x-1)\ \ln(1-p)\big) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + (x-1)\ \ln(1-p) > 0 && \textit{(car } p^2 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)\ \ln(1-p) > -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 < -\frac{1}{\ln(1-p)} && \textit{(car, comme } 1-p<1 \textit{ alors } \ln(1-p)<0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad x < 1 - \frac{1}{\ln(1-p)} \end{aligned}$$

En notant $x_0 = 1 - \dfrac{1}{\ln(1-p)}$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		10	x_0	12		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$		0		$-$	
Variations de f	↗		$f(10)$ ↗	$f(x_0)$	↘ $f(12)$	↘	

- Il reste alors à estimer la valeur de x_0. Pour ce faire, on utilise l'inégalité :

$$\forall x > 0,\ \frac{x-1}{x} \ \leqslant\ \ln(x) \ \leqslant\ x - 1$$

  - L'inégalité de droite est une inégalité de convexité : la fonction ln étant concave, sa courbe représentative est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.
  - L'inégalité de gauche se réécrit : $\forall x > 0,\ x - 1 \leqslant x\ \ln(x)$.
    Il s'agit là encore d'une inégalité de convexité : la fonction $x \mapsto x\ \ln(x)$ étant convexe, sa courbe représentative est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

  En prenant cette double inégalité en $x = 1 - p > 0$, on obtient :

$$-\frac{p}{1-p} \quad \leqslant \quad \ln(1-p) \quad \leqslant \quad -p$$

$$\text{donc} \quad -\frac{1-p}{p} \quad \geqslant \quad \frac{1}{\ln(1-p)} \quad \geqslant \quad -\frac{1}{p} \qquad \textit{(car la fonction inverse est croissante sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

$$\text{et} \quad \frac{1-p}{p} \quad \leqslant \quad -\frac{1}{\ln(1-p)} \quad \leqslant \quad \frac{1}{p}$$

$$\boxed{1 + \frac{1-p}{p} \ \leqslant\ 1 - \frac{1}{\ln(1-p)} \ \leqslant\ 1 + \frac{1}{p}}$$

- Pour $p = \dfrac{2}{21}$, on a :

$$1 + \frac{1-p}{p} = \cancel{1} + \frac{1}{p} - \cancel{1} = \frac{1}{\frac{2}{21}} = \frac{21}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{21}} = \frac{23}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 10 < \frac{21}{2} \leqslant x_0 \leqslant \frac{23}{2} < 12.}$$

La fonction f est :

× strictement croissante sur $[0, 10]$. Ainsi : $\forall x \in [0, 10]$, $f(x) \leqslant f(10)$.

× strictement décroissante sur $[12, +\infty[$. Ainsi : $\forall x \in [12, +\infty[$, $f(x) \leqslant f(12)$.

$$\boxed{\text{L'entier } N \geqslant 2 \text{ qui maximise la valeur de } f(N) \text{ est donc 10, 11 ou 12.}}$$

- Remarquons enfin :

$$\begin{aligned} f(10) < f(11) \quad &\Leftrightarrow \quad 9\,p^2\,(1-p)^8 < 10\,p^2\,(1-p)^9 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 < 10\,(1-p) \qquad \textit{(car } p^2 > 0 \textit{ et } (1-p)^8 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{9}{10} < \frac{19}{21} \\ &\Leftrightarrow \quad 9 \times 21 < 10 \times 19 \\ &\Leftrightarrow \quad 189 < 190 \end{aligned}$$

Et, de même :

$$\begin{aligned} f(12) < f(11) \quad &\Leftrightarrow \quad 11\,p^2\,(1-p)^{10} < 10\,p^2\,(1-p)^9 \\ &\Leftrightarrow \quad 11\,(1-p) < 10 \qquad \textit{(car } p^2 > 0 \textit{ et } (1-p)^9 > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{19}{21} < \frac{10}{11} \\ &\Leftrightarrow \quad 19 \times 11 < 21 \times 10 \\ &\Leftrightarrow \quad 209 < 210 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc : } f(10) < f(11) \text{ et } f(11) > f(12).}$$

$$\boxed{\text{Lorsque } p = \frac{2}{21}, \text{ la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices } M(\omega) \text{ possibles est 11.}}$$ □

Exercice : (ESSEC I 2013)

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;

- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :

$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$

et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée**.
- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathbb{P}(\{N = j\})$, $q_j = \mathbb{P}(\{U_1 = j\})$ et $r_j = \mathbb{P}(\{X = j\})$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La v.a.r. X_n est une somme de n v.a.r. **indépendantes** de loi $\mathcal{B}(p)$, c'est-à-dire de loi $\mathcal{B}(1, p)$.

$$\boxed{\text{Par stabilité de la loi binomiale : } X_n \sim \mathcal{B}(n, p).}$$

Commentaire

On rappelle la propriété de stabilité de la loi binomiale :
Soit X_1, ..., X_k des v.a.r. **indépendantes** telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$, ..., $X_k \sim \mathcal{B}(n_k, p)$.
Alors :

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$$

□

2. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\, p_n$.

Démonstration.
La famille $(\{N = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
r_j = \mathbb{P}(\{X = j\}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = n\} \cap \{X = j\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{N = n\} \cap \left\{\sum_{k=1}^{N} U_k = j\right\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{N = n\} \cap \left\{\sum_{k=1}^{n} U_k = j\right\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = n\} \cap \{X_n = j\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = n\}) \times \mathbb{P}(\{X_n = j\}) \qquad \textit{(car les v.a.r. } N \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \times \mathbb{P}(\{X_n = j\})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N},\ r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\, p_n}$$

Commentaire

- Détaillons l'utilisation du lemme des coalitions.
  - × D'après l'énoncé, toutes les v.a.r. de la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de N.
    En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les v.a.r. $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes de N.
  - × Donc, par le lemme des coalitions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ est indépendante de N.
- D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).
- On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $(\{N = k\})_{k\in\mathbb{N}}$. On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

□

3. Dans cette question ***3.***, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \sim \mathcal{B}(p)$. Donc $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
- De plus, $N \sim \mathcal{B}(m, \pi)$. Donc $N(\Omega) = [\![0, m]\!]$.
- Or : $X = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k$.
  On en déduit :
  - × au minimum, la v.a.r. X prend la valeur 0,
  - × au maximum, la v.a.r. X prend la valeur $m \times 1 = m$.

  Ainsi : $X(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$.
- Donc, si $j > m$, alors : $\{X = j\} = \varnothing$. D'où :

$$r_j \ = \ \mathbb{P}(\{X = j\}) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j > m : r_j = 0.}$$

□

b) Établir que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \dbinom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \dbinom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, m]\!]$.
La famille $(\{N = n\})_{n\in[\![0,m]\!]}$ forme un système complet d'événements.

En procédant de la même manière qu'en question *2.*, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} r_j & = & \sum\limits_{n=0}^{m} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N=n\}) & \\ & = & \sum\limits_{\substack{n=0 \\ j\in X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N=n\}) & \\ & & + \cancel{\sum\limits_{\substack{n=0 \\ j\notin X_n(\Omega)}}^{m} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N=n\})} & \textit{(car si } j\notin X_n(\Omega) \textit{ alors } \{X_n=j\}=\varnothing) \\ & = & \sum\limits_{n=j}^{m} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N=n\}) & \end{array}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n\in[\![0,m]\!] \\ j\in X_n(\Omega)=[\![0,n]\!] \\ j\in[\![0,m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0\leqslant n\leqslant m \\ 0\leqslant j\leqslant n \\ j\in[\![0,m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0\leqslant n\leqslant m \\ j\leqslant n \\ j\in[\![0,m]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j\leqslant n\leqslant m \\ \\ j\in[\![0,m]\!] \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} r_j & = & \sum\limits_{n=j}^{m} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N=n\}) & \\ & = & \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} & \textit{(car } X_n\sim\mathcal{B}(n,p) \textit{ et } N\sim\mathcal{B}(m,\pi)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall j\in[\![0,m]\!],\ r_j = \sum_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}}$$

Commentaire

- En question *2.*, on savait seulement : $N(\Omega)\subset\mathbb{N}$. Le meilleur système complet d'événements que nous pouvions considérer était donc $(\{N=n\})_{n\in\mathbb{N}}$ (contenant potentiellement plusieurs fois l'ensemble vide).
- Ici, d'après la question précédente, nous pouvons considérer le système complet d'événements plus précis $(\{N=n\})_{n\in[\![0,m]\!]}$.

□

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0\leqslant j\leqslant n\leqslant m$: $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

Démonstration.
Soit $(j,n,m)\in\mathbb{N}^3$ tel que $0\leqslant j\leqslant n\leqslant m$.

- D'une part :

$$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \frac{\cancel{n}!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{m!}{\cancel{n}!\,(m-n)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

- D'autre part :

$$\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j} = \frac{m!}{j!\,\cancel{(m-j)!}}\ \frac{\cancel{(m-j)!}}{(n-j)!\,\left((m-\cancel{j})-(n-\cancel{j})\right)!} = \frac{m!}{j!\,(n-j)!\,(m-n)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (j,n,m)\in\mathbb{N}^3 \text{ tel que } 0\leqslant j\leqslant n\leqslant m : \binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à m éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient m individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant j éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figurent j représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{m}{n}$ possibilités.
On distingue ensuite j éléments de cet ensemble P : $\binom{n}{j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite j représentants de ces individus)
Ainsi, il y a $\binom{n}{j}\binom{m}{n}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les j éléments à distinguer : $\binom{m}{j}$ possibilités.
On choisit ensuite $n-j$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les j éléments précédents : $\binom{m-j}{n-j}$ possibilités.
(on choisit d'abord les j représentants puis on leur adjoint un groupe de $n-j$ individus)
Ainsi, il y a $\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

□

d) En déduire, pour tout $j\in[\![0,m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j}\binom{m-j}{\ell}\left((1-p)\pi\right)^{\ell}(1-\pi)^{m-j-\ell}$.

Démonstration.
Soit $j\in[\![0,m]\!]$.

$$\begin{aligned}
r_j &= \sum_{n=j}^{m}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n} && \textit{(d'après 3.b))}\\
&= \sum_{n=j}^{m}\binom{n}{j}\binom{m}{n}p^j(1-p)^{n-j}\,\pi^n(1-\pi)^{m-n}\\
&= \sum_{n=j}^{m}\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}p^j(1-p)^{n-j}\,\pi^n(1-\pi)^{m-n} && \textit{(d'après 3.c))}\\
&= \binom{m}{j}p^j\sum_{n=j}^{m}\binom{m-j}{n-j}(1-p)^{n-j}\,\pi^n(1-\pi)^{m-n}\\
&= \binom{m}{j}p^j\sum_{\ell=0}^{m-j}\binom{m-j}{\ell}(1-p)^{\ell}\,\pi^{\ell+j}\,(1-\pi)^{m-(\ell+j)} && \textit{(avec le décalage d'indice } \ell=n-j)\\
&= \binom{m}{j}p^j\,\pi^j\sum_{\ell=0}^{m-j}\binom{m-j}{\ell}(1-p)^{\ell}\,\pi^{\ell}\,(1-\pi)^{m-j-\ell}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, pour tout } j \in [\![0,m]\!] : \\ r_j = \dbinom{m}{j}\,(p\,\pi)^j \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-j} \dbinom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^{\ell}\,(1-\pi)^{m-j-\ell}.\end{array}}$$

□

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)*** : $X(\Omega) \subset [\![0,m]\!]$.
- Soit $j \in [\![0,m]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
r_j &= \binom{m}{j}\,(p\,\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\,\pi\big)^{\ell}\,(1-\pi)^{m-j-\ell} \\
&= \binom{m}{j}\,(p\,\pi)^j \big((1-p)\,\pi + (1-\pi)\big)^{m-j} && \textit{(par la formule du binôme de Newton)} \\
&= \binom{m}{j}\,(p\,\pi)^j \big(\cancel{\pi} - p\,\pi + 1 - \cancel{\pi}\big)^{m-j} \\
&= \binom{m}{j}\,(p\,\pi)^j\ (1-p\,\pi)^{m-j}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \sim \mathcal{B}\,(m, p\,\pi).}$$

□

4. On suppose dans cette question ***4.*** que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j}\,\frac{(\lambda\,p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question ***2.*** :

$$\begin{aligned}
r_j &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,p_n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N = n\}) \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N = n\}) + \cancel{\sum_{\substack{n=0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N = n\})} && \textit{(car si } j \notin X_n(\Omega) \textit{ alors } \{X_n = j\} = \varnothing \\
&= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N = n\})
\end{aligned}$$

Comme $X \sim \mathcal{B}\,(n,p)$ d'après la question ***1.***, alors $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Donc la dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n \in [\![0,+\infty[\![\\ j \in X_n(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \\ j \leqslant n \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n \\ \\ j \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X_n = j\})\,\mathbb{P}(\{N = n\}) \\ &= \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}\, \frac{\lambda^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} && \textit{(car } X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \textit{ et } N \sim \mathcal{P}(\lambda)\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n!} (1-p)^{n-j} \lambda^n \end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\binom{n}{j}\,\frac{1}{n!} = \frac{\cancel{n!}}{j!\,(n-j)!}\,\frac{1}{\cancel{n!}} = \frac{1}{j!\,(n-j)!}$.

On obtient :

$$\begin{aligned} r_j &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{j!\,(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^n \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{p^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{(n-j)+j} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{n-j} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } j \in \mathbb{N} : r_j = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j}.}$$

□

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \sim \mathcal{B}(p)$. Donc : $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
  De plus, comme $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $N(\Omega) = \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ s'écrit comme une somme de v.a.r. à valeurs entières. On en déduit : } X(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} r_j &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{n-j} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \big(\lambda\,(1-p)\big)^{\ell} && \textit{(avec le décalage d'indice } \ell = n-j\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, p)^j}{j!}\, \mathrm{e}^{\lambda\,(1-p)} && \textit{(car on reconnaît la série exponentielle de paramètre } \lambda\,(1-p)\textit{)} \\ &= \frac{(\lambda\, p)^j}{j!}\, \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda\, p)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda\, p} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } X(\Omega) \sim \mathcal{P}(\lambda\, p)}$$

□

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\displaystyle\binom{y}{0} = 1$.

5. *La formule du binôme négatif.*

Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0, 1[$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \, dt$.

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

Démonstration.

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x - t \leqslant x(1-t) \qquad \textit{(car, comme } t \leqslant x < 1\textit{, alors : } 1-t>0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x - t \leqslant x - xt \\ & \Leftrightarrow \quad -x \leqslant -t \leqslant -x\,t \\ & \Leftrightarrow \quad x \geqslant t \geqslant x\,t \end{aligned}$$

Or on sait déjà : $t \leqslant x$.
De plus, comme $x \in [0, 1[$, on a : $x\,t \leqslant t$.
Le dernier encadrement est donc vérifié.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad & \Leftrightarrow \quad 0^n \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n \qquad \textit{(car la fonction } t \mapsto t^n \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \leqslant x^n \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} \qquad \textit{(car } \frac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or : $t \leqslant x$. Donc : $1 - t \geqslant 1 - x$.
Par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{c+1}$ sur $[0, +\infty[$: $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \, dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \, dt$$

Donc :

$$0 \;\leqslant\; I_n \;\leqslant\; \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \left[\, t \,\right]_0^x \quad = \quad \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.}$$

- Si $n = 0$. On a déjà montré : $(1-t)^{c+1} \geqslant (1-x)^{c+1}$. Donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{(1-t)^{c+1}} \;\leqslant\; \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Comme $t < 1$, on a :

$$0 \;\leqslant\; \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \;\leqslant\; \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \;\leqslant\; \int_0^x \frac{1}{(1-t)^{c+1}}\, dt \;\leqslant\; \int_0^x \frac{1}{(1-x)^{c+1}}\, dt$$

Donc :

$$0 \;\leqslant\; I_0 \;\leqslant\; \frac{1}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{(1-x)^{c+1}} \left[\, t \,\right]_0^x \quad = \quad \frac{1}{(1-x)^{c+1}}\, x$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 0 \leqslant I_0 \leqslant \frac{x}{(1-x)^{c+1}}.}$$

Commentaire

On isole ici le cas $n = 0$, car l'argument « la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ » est faux si $n = 0$. On traite donc ce cas à part. □

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\dbinom{c+n}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition du coefficient binomial :

$$\begin{aligned}\binom{c+n}{n} &= \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}\big((c+n)-i\big) \\ &= \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(c+k) && \textit{(avec le changement d'indice } k=n-i\textit{)} \\ &= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(c+k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{c+k}{k} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{c}{k}+1\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)}$$

□

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

Démonstration.
La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0, droite d'équation :

$$y \ = \ f(0) + f'(0)\,(x-0) = x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in\ ]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t.}$$

Commentaire

L'énoncé demande seulement de montrer que cette inégalité est vraie pour tout $t \in [0,+\infty[$. Bien évidemment, celle-ci étant vraie sur $]-1,+\infty[$, elle l'est en particulier sur $[0,+\infty[$.

□

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

Démonstration.

- Soit $k \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1) \ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{k} \leqslant -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &\Leftrightarrow\ -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Or, comme $k \geqslant 2$: $-\dfrac{1}{k} \in\ ]-1,+\infty[$.
On peut donc appliquer la question précédente et ainsi la dernière inégalité est vraie.

$$\boxed{\text{Par équivalence : } \forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1).}$$

Commentaire

- La démonstration présentée nécessite d'avoir démontré l'inégalité de la question précédente pour tout $t \in]-1, +\infty[$.
- On pouvait également utiliser l'inégalité des accroissements finis.
  On note $g : t \mapsto \ln(t)$. On sait :
  × g est dérivable sur $[k-1, k]$,
  × $\forall t \in [k-1, k], \ \dfrac{1}{k} \leqslant g'(t)$.

  On en déduit, par inégalité des accroissements finis :
  $$\forall (x, y) \in [k-1, k]^2, \ \frac{1}{k}(y-x) \leqslant g(y) - g(x)$$
  En appliquant cette inégalité à $y = k$ et $x = k-1$, on obtient :
  $$\frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$
- On pouvait également procéder par intégration.
  Tout d'abord : $\forall t \in [k-1, k], \ \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}$.
  Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant $(k-1 \leqslant k)$:
  $$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt = [\ \ln(t)\ ]_{k-1}^{k} = \ln(k) - \ln(k-1)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On somme l'inégalité précédente pour k variant de 2 à n. On obtient :
  $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k) - \ln(k-1) \big) = \ln(n) - \cancel{\ln(1)}$$
  On ajoute 1 de chaque côté de l'inégalité :
  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)}$$
  □

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\dbinom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1 + \ln(n))$.

En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{c}{k}\right)\right) & \textit{(d'après \textbf{6.b)(i)})} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{c}{k}\right) & \\
& \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{c}{k} & \textit{(d'après \textbf{6.b)(ii)})} \\
& \leqslant & c \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} & \\
& \leqslant & c\big(1+\ln(n)\big) & \textit{(d'après \textbf{6.b)(iii)})}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\big(1+\ln(n)\big)}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1+\ln(n))\big)$$

$$\boxed{\text{De plus } x^{n+1} \geqslant 0, \text{ donc : } 0 \ \leqslant\ \binom{c+n}{n} x^{n+1} \ \leqslant\ \exp(c + c\ \ln(n))\, x^{n+1}.}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl}
\exp(c + c\ \ln(n))\, x^{n+1} & = & \exp(c + c\ \ln(n))\ \exp((n+1)\ln(x)) \\
& = & \exp\big(c + c\ \ln(n) + (n+1)\ln(x)\big) \\
& = & \exp\big(c + \ln(x) + c\ \ln(n) + n\ \ln(x)\big) \\
& = & \exp\left(n\ \ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\ \ln(x)} + \dfrac{c\ \ln(n)}{n\ \ln(x)} + 1\right)\right)
\end{array}$$

  De plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c+\ln(x)}{n\ \ln(x)} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c}{\ln(x)}\ \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.
  Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c+\ln(x)}{n\ \ln(x)} + \dfrac{c\ \ln(n)}{n\ \ln(x)} + 1 = 1$.
  Comme $x \in [0,1[$, alors $\ln(x) < 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ \ln(x) = -\infty$.
  On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ \ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\ \ln(x)} + \dfrac{c\ \ln(n)}{n\ \ln(x)} + 1\right) = -\infty$.
  Par composition par la fonction exp, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ \ln(x)\left(\frac{c+\ln(x)}{n\ \ln(x)} + \frac{c\ \ln(n)}{n\ \ln(x)} + 1\right)\right) \ = \ 0$$

- Finalement :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(c + c\ \ln(n))\, x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0.}$$

$\square$

c) En conclure que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k \ = \ \frac{1}{(1-x)^c} - c \binom{c+n}{n} I_n$$

Pour démontrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dbinom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^c}$, on va donc démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***6.a)*** :

$$0 \ \leqslant \ I_n \ \leqslant \ \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

On en déduit :

$$0 \ \leqslant \ c \binom{c+n}{n} I_n \ \leqslant \ \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$$

Or, d'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

Ainsi :

$\times$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$

$\times$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \dbinom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k \text{ converge et : } \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k \ = \ \frac{1}{(1-x)^c}.}$$

$\square$

6. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k \, p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

Démonstration.

- Comme $p \in \,]0,1[$, alors :

$$p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r \ \geqslant \ 0$$

- Montrons que la série $\sum_{k\geqslant 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r \;=\; p^r \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k$$

  On applique la question précédente à $c = r$ et $x = 1-p$ (on a bien $c > 0$ et $x \in [0,1[$. On obtient que la série $\sum_{k\geqslant 0} \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k \;=\; \frac{1}{(\cancel{1}-(\cancel{1}-p))^r} \;=\; \frac{1}{p^r}$$

  On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} p_k$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \;=\; \cancel{p^r}\, \frac{1}{\cancel{p^r}} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite } (p_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

7. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

Démonstration.
On note $V = Y+1$.

- Tout d'abord, comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\{V = k\} \;=\; \{Y+1 = k\} \;=\; \{Y = k-1\}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{V=k\}) \;&=\; \mathbb{P}(\{Y=k-1\}) \;=\; p_{k-1} \\
&=\; \binom{1+(k-1)-1}{k-1} (1-p)^{k-1}\, p^1 \qquad \textit{(car } Y \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } 1 \textit{ et } p\textit{)} \\
&=\; (1-p)^{k-1}\, p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît la loi géométrique de paramètre } p : V \sim \mathcal{G}(p).}$$

□

8. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'une part :

$$k\binom{r+k-1}{k} \;=\; k\,\frac{(r+k-1)!}{k!\,(r+k-1-k)!} \;=\; \cancel{k}\,\frac{(r+k-1)!}{\cancel{k}\,(k-1)!\,(r-1)!} \;=\; \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

- D'autre part :

$$r\binom{r+k-1}{k-1} = r\,\frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r+k-1-(k-1))!} = \cancel{r}\,\frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,\cancel{r}\,(r-1)!} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)!\,(r-1)!}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \geqslant 1,\ k\binom{r+k-1}{k} = r\binom{r+k-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à $r+k-1$ éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient $r+k-1$ individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{r+k-1}{k}$ possibilités.
On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite 1 représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $k\binom{r+k-1}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, une partie à $(k-1)$ éléments : $\binom{r+k-1}{k-1}$ possibilités.
On forme alors P en ajoutant à ces $k-1$ éléments, l'élément à distinguer. Cet élément est choisi parmi les $r+k-1-(k-1) = r$ éléments restants dans E : $\binom{r}{1} = r$ possibilités.
(on choisit d'abord $k-1$ individus puis on leur adjoint 1 individu parmi les r restants dans E)
Ainsi, il y a $\binom{r+k-1}{k-1}\, r$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat. □

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}(\{Z=n\})$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rll} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(\{Z=k\}) & \\ = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r & \\ = & p^r \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k & \\ = & p^r \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r \binom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k & \textit{(d'après la question précédente)} \\ = & r\,p^r \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & r\,\dfrac{1-p}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} & \\ = & r\,\dfrac{1-p}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\{W=k\}) & \textit{(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)} \end{array}$$

Or la famille $(\{W=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\{W=n\})$ converge et sa somme vaut 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(Z) \;=\; r\,\frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{W=k\}) \;=\; r\,\frac{1-p}{p}\,1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) \;=\; r\,\frac{1-p}{p}}$$

□

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n-1)\,\mathbb{P}(\{Z=n\})$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rll}
& \sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}(\{Z=k\}) & \\
= & \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}(\{Z=k\}) & \\
= & \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)k \dbinom{r+k-1}{k} (1-p)^k\, p^r & \\
= & p^r \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)\, r \dbinom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\
= & r\, p^r \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} & \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} & \\
= & r\, \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}(\{W=k\}) & \textit{(où } W \textit{ suit la loi binomiale négative de paramètres } r+1 \textit{ et } p\textit{)}
\end{array}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r. W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1)\, \dfrac{1-p}{p}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Z(Z-1) \text{ admet une espérance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \;=\; r\, \frac{1-p}{p}\, \mathbb{E}(W) \;=\; r\, \frac{1-p}{p}\, (r+1)\, \frac{1-p}{p}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \;=\; (r+1)r\, \left(\frac{1-p}{p}\right)^2}$$

- D'autre part :

$$Z^2 \;=\; Z(Z-1) + Z$$

Ainsi, Z^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } Z \text{ admet une variance.}}$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z^2) \;=\; \mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) + \mathbb{E}(Z) \;=\; (r+1)r\, \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\, \frac{1-p}{p}$$

Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z) &= \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 \\ &= (r+1)r\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\,\frac{1-p}{p} - r^2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\ &= r\left(\frac{1-p}{p}\right)^2(\cancel{r}+1-\cancel{r}) + r\,\frac{1-p}{p} \\ &= r\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{1-p}{p}+1\right) = r\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{1-\cancel{p}+\cancel{p}}{p}\right) \\ &= r\,\frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z) = r\,\frac{1-p}{p^2}}$$ □

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}(\{N=k\})$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a+b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a,b)$.

10. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right)$.

Démonstration. Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right)$.

- **Initialisation** :

$$p_0 \prod_{i=1}^{1}\left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0\left(a+\frac{b}{1}\right) = \left(a+\frac{b}{1}\right)p_{1-1} = p_1$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $p_{k+1} = p_0 \prod_{i=1}^{k+1}\left(a+\frac{b}{i}\right)$).

$$\begin{aligned}p_{k+1} &= \left(a+\frac{b}{k+1}\right)p_k && \textit{(d'après l'énoncé)} \\ &= \left(a+\frac{b}{k}\right) \times p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= p_0 \prod_{i=1}^{k+1}\left(a+\frac{b}{i}\right)\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right).}$$

□

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

Démonstration.

- On a déjà : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Si $a = 0$, alors, d'après la question précédente :

$$p_k \ = \ p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{b}{i} \ = \ p_0 \ \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} b}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \ = \ p_0 \ \frac{b^k}{k!}$$

- On sait de plus que la famille $(\{N = k\})_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc :

$$1 \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = k\}) \ = \ \mathbb{P}(\{N = 0\}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = k\}) \ = \ p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$$

  Or, en reconnaissant une série exponentielle de paramètre b :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ &= \ \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \frac{b^k}{k!} \ = \ p_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \\ &= \ p_0 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} - 1 \right) \ = \ p_0 \left(\mathrm{e}^b - 1 \right) \end{aligned}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} & 1 = p_0 + p_0(\mathrm{e}^b - 1) \\ \text{donc} \quad & 1 = \mathrm{e}^b \, p_0 \\ \text{d'où} \quad & \mathrm{e}^{-b} = p_0 \end{aligned}$$

  Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{N = k\}) = \mathrm{e}^{-b} \ \frac{b^k}{k!}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît une loi de Poisson de paramètre } b : N \sim \mathcal{P}(b).}$$

Commentaire

D'après l'énoncé, la variable aléatoire N est « à valeurs dans $\mathbb{N}$ ». Cela signifie exactement : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (et non $N(\Omega) = \mathbb{N}$).

□

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde. Supposons : $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k > 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait :
$$p_{k+1} \;=\; \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k$$
On va donc chercher à démontrer qu'il existe un entier k_0 tel que :
$$a + \frac{b}{k_0+1} < 0$$
En effet, si c'est le cas, on aura :
  × d'une part $p_{k_0+1} > 0$ par hypothèse,
  × d'autre part, comme $p_{k_0} > 0$ et $a + \dfrac{b}{k_0+1} < 0$: $p_{k_0+1} = \left(a + \dfrac{b}{k_0+1}\right) p_{k_0} < 0$.

  Ce qui est absurde.
- On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} a + \frac{b}{k+1} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{b}{k+1} < -a \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{k+1} < -\frac{a}{b} \\ &\Leftrightarrow \quad k+1 > -\frac{b}{a} \qquad \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{, avec } -\frac{b}{a} > 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad k > -\frac{b}{a} - 1 \end{aligned}$$
On choisit alors : $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ pour obtenir la contradiction voulue.

  $\boxed{\text{On en déduit qu'il existe } i_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } p_{i_0} = 0.}$
- On note alors : $s = \min(i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0)$.
L'entier s existe car l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide (l'entier k_0 appartient à cet ensemble).
Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.
  × si $k < s$ (*i.e.* $k \leqslant s-1$), alors, par définition de s : $p_k > 0$.
  × si $k \geqslant s$, alors : $p_k = 0$.
  En effet, on sait, par définition de s : $p_s = 0$.
  De plus, d'après la question ***10.a)*** :
$$p_k \;=\; p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a + \frac{b}{i}\right) \;=\; p_0 \prod_{i=1}^{s}\left(a + \frac{b}{i}\right) \prod_{i=s+1}^{k}\left(a + \frac{b}{i}\right) \;=\; p_s \prod_{i=s+1}^{k}\left(a + \frac{b}{i}\right) \;=\; 0$$

  $\boxed{\text{En choisissant } r = s-1, \text{ on a bien : } \forall k \leqslant r,\ p_k > 0 \text{ et } \forall k > r,\ p_k = 0.}$ □

(ii) Montrer : $b = -a(r+1)$.

Démonstration.
Par définition de r :

× $p_r > 0$,

× $p_{r+1} = 0$.

Or : $p_{r+1} \;=\; \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r$. On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & a + \dfrac{b}{r+1} = 0 \\ \text{donc} & \dfrac{b}{r+1} = -a \\ \text{d'où} & b = -a(r+1) \end{array}$$

$$\boxed{b = -a(r+1)}$$

$\square$

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \dbinom{r}{k} p_0$.

En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1-a)^r}$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![1, r]\!]$. D'après les questions ***10.a)*** et ***10.c)(ii)*** :

$$\begin{aligned} p_k &= p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a - \frac{a(r+1)}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(-a\left(-1 + \frac{r+1}{i}\right)\right) \\ &= p_0\ (-a)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{r+1-i}{i} = p_0\ (-a)^k \frac{\prod\limits_{i=1}^{k} (r+1-i)}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} \\ &= p_0\ (-a)^k\ \frac{r\ (r-1) \cdots (r+1-k)}{k!} \\ &= p_0\ (-a)^k\ \frac{\frac{r!}{(r-k)!}}{k!} = p_0\ (-a)^k\ \frac{r!}{k!\,(r-k)!} \\ &= p_0\ (-a)^k \binom{r}{k} \end{aligned}$$

- De plus : $(-a)^0 \dbinom{r}{0} p_0 = p_0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, r]\!],\ p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0.}$$

- La famille $(\{N = k\})_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) = \mathbb{P}(\{N=0\}) + \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(\{N=k\}) + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{r} (-a)^k \binom{r}{k} p_0 + 0 \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} (-a)^k\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}(-a)^k &= \binom{r}{0}(-a)^0+\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}(-a)^k\\ &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-a)^k = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-a)^k 1^{r-k}\\ &= (-a+1)^r\end{aligned}$$

(d'après la formule du binôme de Newton)

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0=\dfrac{1}{(1-a)^r}.}$$

Commentaire

- Dans cette partie, on a seulement l'inclusion : $N(\Omega)\subset\mathbb{N}$. On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille $(\{N=k\})_{k\in\mathbb{N}}$.
- On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N(\Omega)\subset\mathbb{N}$.
- Soit $k\in\mathbb{N}$. Deux cas se présentent :
  - × si $k\in[\![0,r]\!]$, alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{N=k\}) &= p_k = (-a)^k\binom{r}{k}\frac{1}{(1-a)^r}\\ &= \binom{r}{k}(-a)^k\left(\frac{1}{1-a}\right)^r\\ &= \binom{r}{k}\left(-\frac{a}{1-a}\right)^k\left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k}\end{aligned}$$

  De plus, on a bien : $1-\dfrac{1}{1-a} = \dfrac{1-a-1}{1-a} = -\dfrac{a}{1-a}$.

  - × si $k\geqslant r+1$, alors, par définition de r :

$$\mathbb{P}(\{N=k\}) = p_k = 0$$

  On reconnaît alors la loi binomiale de paramètres r et $-\dfrac{a}{1-a}$.

- On cherche enfin à exprimer r en fonction de a et b.
  D'après la question ***10.c)(ii)*** :

$$b=-a(r+1) \;\Leftrightarrow\; -\frac{b}{a}=r+1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{b}{a}-1=r$$

$$\boxed{\text{Finalement : } N\sim\mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a}-1,-\dfrac{a}{1-a}\right).}$$

Commentaire

Cette question amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$) et l'ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle (dans le cas où X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$).
- Ainsi, s'il est fréquent de considérer qu'une v.a.r. X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si :
  × $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

  on trouvera aussi :
  × $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
  × $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  × $\forall k \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\mathbb{P}(\{X = k\}) = 0$.

  La première définition est axée sur l'ensemble image et la seconde sur le support de X.

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k\, p_0$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Par définition des coefficients binomiaux donnée en partie II :

$$\begin{aligned} \binom{\frac{b}{a}+k}{k} &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{b}{a} + k - i\right) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{b}{a} + j\right) && \textit{(avec le changement d'indice } j = k-i\textit{)} \\ &= \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{b}{a} + j\right) \\ &= \prod_{j=1}^{k} \frac{\frac{b}{a}+j}{j} = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{b}{a\,j} + 1\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k = \left(\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{b}{a\,j}+1\right)\right)\left(\prod_{j=1}^{k} a\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{b}{a\,j}+1\right)a\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{b}{j}+a\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k}\left(a+\frac{b}{i}\right) = p_0\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k.}$$

□

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

Démonstration.

- Commençons par déterminer p_0.
  La famille $(\{N=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) = \mathbb{P}(\{N=0\}) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_0\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k = p_0\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k\right) \end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned} 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k &= \binom{\frac{b}{a}+0}{0}a^0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k \\ &= \frac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}} \qquad \textit{d'après } \textbf{\textit{6.c)}} \textit{ appliquée à } c=\frac{b}{a}+1 \textit{ et } x=a) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}.}$$

- Ensuite : $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k}a^k(1-a)^{\frac{b}{a}+1} = \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k}a^k(1-a)^{\frac{b}{a}+1}$$

$$\boxed{\text{On obtient que } N \text{ suit la loi binomiale négative de paramètres } \frac{b}{a}+1 \text{ et } 1-a.}$$

□

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

Démonstration.
Trois cas se présentent.

- si $a=0$: $N \sim \mathcal{P}(b)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance et :}\\ \mathbb{E}(N) = b = \dfrac{0+b}{1-0} \text{ et } \mathbb{V}(N) = b = \dfrac{0+b}{(1-0)^2}.\end{array}}$$

- si $a < 0$: $N \sim \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \left(-\frac{b}{a} - 1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \left(-\frac{b}{a} - 1\right)\left(-\frac{a}{1-a}\right)\left(1 + \frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{1-a}\,\frac{1}{1-a} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

- si $a > 0$: N suit une loi binomiale négative de paramètres $\dfrac{b}{a} + 1$ et $1 - a$.

$$\boxed{\text{D'après les questions } \textbf{\textit{9.b)}} \text{ et } \textbf{\textit{9.c)}}\text{, la v.a.r. } N \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{(1-a)^2} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

□

Exercice : (HEC 2002)

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ D(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathbb{P}(\{T \leqslant t\}) = \mathbb{P}(\{T > t\})$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.

1. **Coefficient d'avarie.**

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle coefficient d'avarie à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}(\{T = n\})$$

a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la probabilité $\mathbb{P}([T = n])$ à l'aide de la fonction D. En déduire l'égalité :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord que, comme T est à valeurs entières :

$$\{T > n-1\} = \{T = n\} \cup \{T > n\}$$

Les événements $\{T = n\}$ et $\{T > n\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{T > n-1\}) = \mathbb{P}(\{T = n\}) + \mathbb{P}(\{T > n\})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{T = n\}) = \mathbb{P}(\{T > n-1\}) - \mathbb{P}(\{T > n\}) = D(n-1) - D(n).}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T = n\}\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(\{T > n-1\} \cap \{T = n\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{T > n-1\}\big)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big(\{T = n\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{T > n-1\}\big)} && \textit{(car } \{T = n\} \subset \{T > n-1\}\textit{)} \\ &= \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}}$$

□

b) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.

(i) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Comme } T \text{ sui la loi géométrique } \mathcal{G}(p) \text{, la v.a.r. } T \text{ admet une espérance.} \\ \text{De plus : } \mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{p}. \end{array}}$$

□

(ii) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}(\{T > n\}) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{\{T > n\}}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\{T \leqslant n\})$$

- Par ailleurs, comme $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$:

$$\{T \leqslant n\} \; = \; \bigcup_{i=1}^{n} \{T = i\}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T \leqslant n\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{T = i\}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{T = i\}) && \textit{(car $(\{T = i\})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} p\,(1-p)^{i-1} && \textit{(car $T \sim \mathcal{G}(p)$)} \\
&= p \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p\,\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} && \textit{(en reconnaissant une somme géométrique de raison $1-p \neq 1$)} \\
&= \cancel{p}\,\frac{1-(1-p)^n}{\cancel{p}} \\
&= 1-(1-p)^n
\end{aligned}$$

Enfin : $\mathbb{P}(\{T > n\}) \; = \; 1 - \mathbb{P}(\{T \leqslant n\}) \; = \; \cancel{1} - (\cancel{1} - (1-p)^n) \; = \; (1-p)^n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ D(n) = \mathbb{P}(\{T > n\}) \; = \; (1-p)^n.}$$

□

Commentaire

- Cette démonstration est un très grand classique des concours.
  Il est primordial de connaître et de savoir démontrer ce résultat :

$$\boxed{T \sim \mathcal{G}(p) \;\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) = (1-p)^n}$$

- On peut rédiger légèrement différemment. On commence par écrire, comme T est à valeurs entières :

$$\{T > n\} \;=\; \bigcup_{i=n+1}^{+\infty} \{T = i\}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T > n\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} \{T = i\}\right) \\
&= \sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{T = i\}) && \textit{(car } (\{T=i\})_{i\in[\![1,n]\!]} \textit{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{i=n+1}^{+\infty} p\,(1-p)^{i-1} && \textit{(car } T \sim \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= p \sum_{i=n}^{+\infty} (1-p)^i && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i - \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i\right) \\
&= p \left(\frac{1}{1-(1-p)} - \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\right) && \textit{(en reconnaissant des sommes géométriques de raison } 1-p \neq 1\textit{)} \\
&= p\,\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
&= \cancel{p}\,\frac{(1-p)^n}{\cancel{p}} \;=\; (1-p)^n
\end{aligned}$$

- Il existe une démonstration encore plus simple. Pour ce faire, on considère une expérience aléatoire consistant à effectuer des lancers successifs d'une pièce donnant Pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$.
  On considère T la v.a.r. qui donne le rang d'apparition du premier Pile. Alors $T \sim \mathcal{G}(p)$.
  Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i : « obtenir Pile au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
  On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\{T > n\} \;=\; \overline{P_1} \,\cap\, \dots \,\cap\, \overline{P_n}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) &= \mathbb{P}\big(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_n}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\overline{P_1}\big) \times \dots \times \mathbb{P}\big(\overline{P_n}\big) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= (1-p) \times \dots \times (1-p) = (1-p)^n
\end{aligned}$$

(iii) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\pi_n &= \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)(ii)}}\textit{)} \\
&= \cancel{(1-p)^{n-1}} \frac{1-(1-p)}{\cancel{(1-p)^{n-1}}} \\
&= p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = p.}$$

□

Commentaire

Dans cet exercice, on considère T une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- Dans la question ***1.***, on a démontré :

$$\boxed{T \sim \mathcal{G}(p) \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T = n\}\big) = p}$$

On aurait pu établir de la même façon :

$$\boxed{T \sim \mathcal{G}(p) \ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T > m+n\}\big) = p^m = \mathbb{P}\big(\{T > m\}\big)}$$

Cette propriété signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de sa durée de vie écoulée jusqu'alors (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. On dit alors que la loi géométrique est **sans mémoire**. Cette propriété est adaptée à la simulation de phénomène sans vieillissement. Cette hypothèse peut paraître surprenante. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.

- Finalement, on a démontré en ***1.b)*** que la loi géométrique est sans mémoire. Le but de la question ***1.c)*** est de démontrer que la seule loi discrète sans mémoire est la loi géométrique. Autrement dit, d'établir la réciproque de la question précédente :

$$\boxed{T \sim \mathcal{G}(p) \ \Leftarrow\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T > n\}\big) = p}$$

c) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \pi_n = \alpha$.

(i) Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $D(n) = (1-\alpha)\ D(n-1)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)*** :

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

Comme $\pi_n = \alpha$, on en déduit : $\alpha D(n-1) = D(n-1) - D(n)$.

Et en réordonnant, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1-\alpha)\ D(n-1) = D(n)$.

Commentaire

On peut aussi démontrer cette égalité sans avoir le résultat de la question ***1.a)***.
On propose ci-dessous la démonstration qui peut être utile si l'exercice est présenté dans un ordre différent.

$$\begin{array}{rcll}
1-\alpha & = & 1-\pi_n & \textit{(d'après l'hypothèse de l'énoncé)} \\
& = & 1 - \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T=n\}\big) & \\
& = & \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\Big(\overline{\{T=n\}}\Big) & \\
& = & \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T<n\}\cup\{T>n\}\big) & \textit{(car } T \textit{ est à valeurs entières)} \\
& = & \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T<n\}\big) + \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T>n\}\big) & \textit{(car } \{T<n\} \textit{ et } \{T>n\} \textit{ sont incompatibles)} \\
& = & \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T>n\}\big) & \textit{(car si } \{T>n-1\} \textit{ est réalisé, alors } \{T<n\} \textit{ ne l'est pas)} \\
& = & \dfrac{\mathbb{P}\big(\{T>n-1\}\cap\{T>n\}\big)}{\mathbb{P}(\{T>n-1\})} & \textit{(avec } \mathbb{P}(\{T>n-1\}) \neq 0 \textit{ d'après l'énoncé)} \\
& = & \dfrac{\mathbb{P}\big(\{T>n\}\big)}{\mathbb{P}(\{T>n-1\})} & \textit{(car } \{T>n\} \subset \{T>n-1\}\textit{)} \\
& = & \dfrac{D(n)}{D(n-1)} &
\end{array}$$

□

(ii) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

Démonstration.
Démontrons tout d'abord par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : D(n) = (1-\alpha)^n$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $D(0) = \mathbb{P}(\{T>0\}) = 1$ car T est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
  - D'autre part : $(1-\alpha)^0 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $D(n+1) = (1-\alpha)^{n+1}$).

$$\begin{array}{rcll}
D(n+1) & = & (1-\alpha)\ D(n) & \textit{(d'après la question précédente avec } n+1 \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\
& = & (1-\alpha)\ (1-\alpha)^n & \\
& = & (1-\alpha)^{n+1} &
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ D(n) = (1-\alpha)^n.}$$

Démontrons maintenant que T suit une loi géométrique.

- Par hypothèse, T est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a démontré en question ***1.a)*** :

$$\mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T=n\}\big) = \frac{\mathbb{P}\big(\{T=n\}\big)}{\mathbb{P}\big(\{T>n-1\}\big)}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{T=n\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{T>n-1\}\big)\ \mathbb{P}_{\{T>n-1\}}\big(\{T=n\}\big) \\ & = & D(n-1) \times \alpha \\ & = & (1-\alpha)^{n-1}\ \alpha \end{array}$$

(d'après le résultat précédent avec $n-1 \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{\text{On en déduit : } T \sim \mathcal{G}(\alpha).}$$

□

2. **Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique.**

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de même loi que T.

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k non nul, on pose : $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} T_i$.

(S_k désigne donc l'instant où se produit la $k^{\text{ème}}$ panne et le $k^{\text{ème}}$ remplacement)

a) Soit m un entier naturel.
Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité :

$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant m,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{j=m}^{m} \binom{j}{m} = \binom{m}{m} = 1$.

- D'autre part : $\binom{m+1}{m+1} = 1$.

D'où $\mathcal{P}(m)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \geqslant m$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\sum\limits_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} = \binom{n+2}{m+1}$).

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} &= \left(\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} \right) + \binom{n+1}{m} \\
&= \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \binom{n+2}{m+1} && \textit{(d'après la formule du triangle de Pascal)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \geqslant m,\ \mathcal{P}(n).}$$

□

b) (i) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $T_1(\Omega) = T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } (T_1 + T_2)(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![.}$$

- La famille $\big(\{T_1 = j\}\big)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{T_1 + T_2 = n\}\big) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_1 = j\} \ \cap \ \{T_1 + T_2 = n\}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_1 = j\} \ \cap \ \{j + T_2 = n\}\big) \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ n-j \in T_2(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_1 = j\} \cap \{T_2 = n-j\}\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ n-j \notin T_2(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_1 = j\} \cap \{T_2 = n-j\}\big)} && \textit{(car } \{T_2 = n-j\} = \varnothing \textit{ si } n-j \notin T_2(\Omega)\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{T_1 = j\} \cap \{T_2 = n-j\}\big)
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{ \begin{array}{l} n-j \in T_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![1, +\infty[\![\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqslant n-j \\ 1 \leqslant j \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \ 1 \leqslant j \leqslant n-1 \right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T_1 + T_2 = n\}) &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{T_1 = j\} \cap \{T_2 = n-j\}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{T_1 = j\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{T_2 = n-j\}\big) && \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} p\,(1-p)^{j-1} \times p\,(1-p)^{n-j-1} && \textit{(car } T_1 \sim \mathcal{G}(p) \textit{ et } T_2 \sim \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} p^2\,(1-p)^{n-2} \;=\; (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}\big(\{T_1 + T_2 = n\}\big) = (n-1)\,p^2\,(1-p)^{n-2}.}$$

Commentaire

- Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \big(\overline{\mathbb{R}}\big)^4$$

où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \texttt{ET} \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

- On peut illustrer ce propos par une présentation légèrement différente de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} n - j \in T_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ j \in [\![1, +\infty[\![\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant n - j < +\infty \\ 1 \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - n \leqslant -j < +\infty \\ 1 \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\infty < j \leqslant n-1 \\ 1 \leqslant j < +\infty \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant j \leqslant n-1\right.
\end{aligned}$$

$\square$

(ii) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k,\ \mathbb{P}(\{S_k = n\}) = \binom{n-1}{k-1}\ p^k(1-p)^{n-k}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: $\forall n \geqslant k,\ \mathbb{P}(\{S_k = n\}) = \dbinom{n-1}{k-1}\ p^k(1-p)^{n-k}$.

▶ **Initialisation** :

Soit $n \geqslant 1$.

- D'une part : $\mathbb{P}(\{S_1 = n\}) = \mathbb{P}(\{T_1 = n\}) = (1-p)^{n-1}\, p$.
- D'autre part : $\dbinom{n-1}{1-1}\, p^1\, (1-p)^{n-1} = \dbinom{n-1}{0}\, p\, (1-p)^{n-1} = p\, (1-p)^{n-1}$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

Commentaire

- Dans la propriété $\mathcal{P}(k)$, la variable n apparaît sous la portée d'un quantificateur universel (symbole $\forall$). Ainsi, la variable n est une variable **muette** (on parle aussi de variable **liée**) dans cette propriété. Cela signifie qu'on peut renommer la variable n sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :
$$\forall n \geqslant k,\ \mathbb{P}(\{S_k = n\}) \ = \ \binom{n-1}{k-1}\, p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\text{et} \qquad \forall m \geqslant k,\ \mathbb{P}(\{S_k = m\}) \ = \ \binom{m-1}{k-1}\, p^k (1-p)^{m-k}$$
ont même sens et désignent toutes deux $\mathcal{P}(k)$ (qui ne dépend que de la variable k).
- Vérifier si la propriété est vérifiée au rang 1 c'est vérifier :
$$\mathcal{P}(1) :\ \forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\{S_1 = n\}) \ = \ \binom{n-1}{0}\, p\, (1-p)^{n-1}$$
Cette propriété est quantifiée universellement.
Cela explique que la démonstration de l'hérédité commence par « Soit $n \geqslant 1$ ».
- Il est important de bien comprendre les différences entre ces deux niveaux de variables. La structure de démonstration de la récurrence doit aider à ne pas mélanger les variables liées (muettes) et libres.

▶ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$

$\left(i.e.\ \forall n \geqslant k+1,\ \mathbb{P}(\{S_{k+1} = n\}) \ = \ \dbinom{n-1}{k}\, p^{k+1}\, (1-p)^{n-(k+1)}\right)$.

Soit $n \geqslant k+1$.
La famille $\big(\{T_{k+1} = j\}\big)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{S_{k+1}=n\}\big) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\} \cap \{S_{k+1}=n\}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\} \cap \{S_k+T_{k+1}=n\}\big) && \textit{(}S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} T_i = S_k+T_{k+} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\} \cap \{S_k+{\color{red}j}=n\}\big) \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ n-j\in S_k(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\} \cap \{S_k=n-j\}\big) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ n-j\notin S_k(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\} \cap \{S_k=n-j\}\big)} && \textit{(car } \{S_k=n-j\}=\varnothing \textit{ si } n-j\notin S_k(\Omega)\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\} \cap \{S_k=n-j\}\big)
\end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} n-j \in S_k(\Omega) = [\![k,+\infty[\![\\ j\in [\![1,+\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k \leqslant n-j \\ 1\leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j \leqslant n-k \\ 1\leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1\leqslant j \leqslant n-k\right.$$

Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{S_{k+1}=n\}) &= \sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\} \cap \{S_k=n-j\}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}\big(\{T_{k+1}=j\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{S_k=n-j\}\big) && \textit{(car les v.a.r. } T_{k+1} \textit{ et } S_k \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-k} p\,(1-p)^{j-1} \times \binom{n-j-1}{k-1} p^k\,(1-p)^{n-j-k} && \textit{(car } T_{k+1}\sim\mathcal{G}(p) \textit{ et par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-k} p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \times \binom{n-j-1}{k-1} \\
&= p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-j-1}{k-1} \\
&= p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \sum_{\ell=k-1}^{n-2} \binom{\ell}{k-1} && \textit{(avec le décalage d'indice } \ell=n-j-1\textit{)} \\
&= p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \binom{(n-2)+1}{(k-1)+1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}} \textit{ avec } j\leftarrow \ell,\ m\leftarrow k-1 \textit{ et } n\leftarrow n-2\textit{)} \\
&= p^{k+1}\,(1-p)^{n-k-1} \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

Il est à noter que le résultat de la question ***2.a)*** peut être utilisé car : $n-2 \geqslant k-1$, inégalité elle même vérifiée car $n-k \geqslant 1$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

Commentaire

Détaillons ici l'utilisation de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(k)$. Rappelons :

$$\mathcal{P}(k) : \forall m \geqslant k,\ \mathbb{P}(\{S_k = m\}) = \binom{m-1}{k-1}\, p^k (1-p)^{m-k}$$

(on a renommé ici m la variable muette n)
On cherche dans la démonstration la valeur de $\mathbb{P}\big(\{S_k = n-j\}\big)$.
Pour ce faire, il faut appliquer la propriété précédente pour $m = n-j$.
Afin d'être dans le cadre d'application de cette propriété, il faut alors vérifier :

$$n - j \geqslant k$$

ce qui est bien le cas (*cf* discussion menant à la restriction des indices de la somme). $\square$