Couples de v.a. discrètes (DS de l'année 2019-2020)

I. Exercices généraux

Exercice : EDHEC 2019 voie S

Partie 1 : fonction génératrice d'une v.a.r. discrète finie

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\})\, t^k$$

1. Calculer $G(1)$.

Démonstration.
Par définition de G, on a :

$$\begin{aligned} G(1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\})\, 1^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) \ = \ 1 \end{aligned}$$

(car la famille $\big(\{X = k\}\big)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements)

$$\boxed{G(1) = 1}$$

□

2. Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

Démonstration.

- La v.a.r. X est une v.a.r. finie (car $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$). Elle admet donc une espérance.
- La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale (de degré n).
  Soit $t \in \mathbb{R}$.
  $$G'(t) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\ k\, t^{k-1}$$
  En particulier, pour $t = 1$, on a :
  $$G'(1) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)\ k\, 1^{k-1} \ = \ \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \ = \ \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance. De plus : } \mathbb{E}(X) = G'(1).}$$

□

3. Établir la relation : $\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est finie (car $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$). Elle admet donc une variance.

- La fonction G est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale (de degré n).
  Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ k\, t^{k-1} \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ k\, t^{k-1}\right) + \mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) \times 1\, t^{1-1} \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ k\, t^{k-1}\right) + \mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) \end{aligned}$$

  Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)\ k\,(k-1)\ t^{k-2}$$ *(en dérivant terme à terme et comme la dérivée du terme constant est nulle)*

  En particulier, pour $t=1$, on a :

$$G''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)$$ *(en remarquant que le premier terme de cette somme est nul)*

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) - \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big)$$ *(par linéarité de la sommation)*

$$= \mathbb{E}\big(X^2\big) - \mathbb{E}(X)$$ *(à l'aide du théorème de transfert)*

- Finalement :

$$G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2 = \Big(\mathbb{E}\big(X^2\big) - \cancel{\mathbb{E}(X)}\Big) + \cancel{\mathbb{E}(X)} - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$ *(d'après ce qui précède)*

$$= \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \mathbb{V}(X)$$ *(d'après la formule de Kœnig-Huygens)*

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2.}$$

Commentaire

Il convient ici de partir de l'expression la plus compliquée, à savoir :

$$G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$$

afin d'obtenir la plus simple : $\mathbb{V}(X)$. C'est une stratégie qui peut être appliquée à d'autres situations : il est généralement plus aisé de reconstituer une expression que de la décomposer. □

Partie 2 : un résultat d'analyse

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

4. a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{lcccccl} & k & \leqslant & x & \leqslant & k+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{x} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{k} & & [\ \ln(x)\ ]_k^{k+1} & & \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

b) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \geqslant 2$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à $n-1$ ($n-1 \geqslant 1$).

$$\begin{array}{lccccccl} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} & \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \ln(n) - \cancel{\ln(1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} & \textit{(par sommation télescopique)} \\ \text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & \ln(n) & \leqslant & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \dfrac{1}{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & u_n - 1 & \leqslant & \ln(n) & \leqslant & u_n - \dfrac{1}{n} & \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{En réorganisant, on obtient bien : } \forall n \geqslant 2,\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1.}$$

- Il reste à démontrer l'inégalité en $n = 1$. Or :

$$\ln(1) + \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad \ln(1) + 1 = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln(n) + 1.}$$

Commentaire

- Les questions ***4.a)*** et ***4.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite (u_n) (on peut alors choisir n dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

□

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :
$$1 + \frac{1}{n\,\ln(n)} \;\leqslant\; \frac{u_n}{\ln(n)} \;\leqslant\; 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
- Or :
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n\,\ln(n)} = 1.$
  × $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1.$

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\dfrac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :
$$u_n \;=\; \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$
où γ ($\simeq 0,577$), appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(u_n - \ln(n)\big)$.
La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes et est donc tout à fait adaptée au programme ECE.
- Généralement, la suite des sommes partielles associée à la série harmonique est notée (h_n). Le choix de l'énoncé de noter :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
est donc un peu surprenant.

□

5. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Démonstration.
La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (h_n)\text{, suite des sommes partielles associée à cette série est donc convergente.}}$$ □

Partie 3 : étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

- On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$).
  L'expérience aléatoire consiste à prélèver tous ces jetons un par un, au hasard, et sans remise.
  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i la v.a.r. égale au numéro du jeton obtenu lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
- Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a **record** à l'instant i si le $i^{\text{ème}}$ jeton tiré a un numéro plus grand que tous les numéros précédemment tirés.
  D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.
- Enfin, on note X_n la v.a.r. égale au nombre de records obtenus lorsque l'on procède à cette expérience dans une urne contenant n jetons.
  On note alors G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

6. Donner la loi de X_1.

Démonstration.
Par définition, la v.a.r. X_1 prend la valeur du nombre de records lorsque l'on procède à l'expérience dans une urne contenant un unique jeton.
Dans ce cas, on procède à un unique tirage.
Or, par convention, le résultat du premier tirage est toujours considéré comme un record.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X_1 \text{ est la v.a.r. constante égale à 1.}}$$

Commentaire

- Il est recommandé de traiter les questions en début de chaque partie. Elles consistent souvent à se familiariser avec les nouvelles notations et présentent les cas les plus simples à traiter.
- Il est aussi recommandé de prendre le temps de bien lire l'énoncé. Pour donner la loi de la v.a.r. X_1, encore faut-il savoir ce qu'est cette v.a.r. X_1. De manière générale, il faut bien comprendre que l'indice i ($\in \mathbb{N}^*$) de la v.a.r. X_i situe le contexte de l'expérience puisque la v.a.r. X_i mesure le nombre de records lorsque l'expérience est effectuée dans une urne contenant i jetons.

□

7. a) Montrer : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

- **Initialisation** :
  On l'a vu dans la question précédente : $X_1(\Omega) = \{1\}$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$).
  La v.a.r. X_{n+1} corespond au nombre de records lorsque l'on procède à l'expérience dans une urne qui contient $(n+1)$ jetons. Remarquons tout d'abord :

× qu'il y a au moins 1 record puisque le premier jeton tiré constitue un record par convention.

× qu'il y a au plus $(n+1)$ records puisqu'au mieux chaque jeton constitue un record.

$$\boxed{X_{n+1}(\Omega) \ \subset \ [\![1, n+1]\!]}$$

Il reste à démontrer l'inclusion réciproque.
Pour ce faire, étudions deux cas :

× si le premier jeton tiré est numéroté $(n+1)$ alors il constitue le seul record. En effet, les autres jetons seront tous numérotées avec un nombre plus petit.

$$\boxed{\{1\} \ \subset \ X_{n+1}(\Omega)}$$

× si le premier jeton est numéroté 1, il constitue un record et le reste du tirage s'effectue dans une urne qui contient les jetons numérotés 2 à $(n+1)$, numéros tous plus grands que 1.
Le nombre de records dans ce cas est :

- le nombre de records obtenus dans une urne qui contient n jetons (ce sont ceux numérotés dans l'ensemble $[\![2, n+1]\!]$). D'après l'hypothèse de récurrence, ce nombre de records est un entier de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
(pour s'en convaincre, on peut renuméroter $0, 1, \ldots, n$ *les jetons* $1, 2, \ldots, n+1$ *initialement contenus dans l'urne ; on aura ainsi à considérer le nombre de records obtenus dans une urne qui contient n jetons numérotés de* 1 *à* n *une fois le premier jeton* 0 *tiré)*

- incrémenté de 1 (le premier tirage constitue un record).

$$\boxed{\text{On en déduit : } [\![2, n+1]\!] \ \subset \ X_{n+1}(\Omega).}$$

Finalement : $[\![1, n+1]\!] \ \subset \ X_{n+1}(\Omega)$ et, l'inclusion réciproque étant elle aussi vérifiée :

$$X_{n+1}(\Omega) \ = \ [\![1, n+1]\!]$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

- La terminologie de l'énoncé « Montrer » et non pas « Justifier » semble appeler à une démonstration formelle. Le résultat étant donné, on ne peut se contenter d'un argument du type : « La v.a.r. X_n prend au pire la valeur 1, au mieux la valeur n et peut prendre toutes les valeurs intermédiaires » ne suffira pas à glaner les points (on paraphrase ici le résultat donné par l'énoncé).
- Il était quand même possible de procéder sans passer par une récurrence, en explicitant des tirages permettant d'obtenir les valeurs annoncées. Plus précisément :
  × si $\omega = (n, n-1, n-2, \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = 1$.
  × si $\omega = (n-1, n, n-2, \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = 2$.
  × si $\omega = (n-2, n-1, n, n-3, \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = 3$.
  × ...
  × si $\omega = (n-k, n-(k-1), \dots, n, n-(k+1), \dots, 1)$ alors $X_n(\omega) = k$.
  (on tire les jetons $n-k$ à n dans l'ordre croissant puis $n-(k+1)$ à 1 dans l'ordre décroissant)
  × ...
  × si $\omega = (1, 2, 3, \dots, n-1, n)$ alors $X_n(\omega) = n$.

  On démontre ainsi : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \omega \in \Omega$, $X_n(\omega) = k$. Autrement dit :

$$[\![1, n]\!] \ \subset \ X_n(\Omega)$$

□

b) Déterminer $\mathbb{P}(\{X_n = 1\})$ et $\mathbb{P}(\{X_n = n\})$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

Démonstration.

- L'événement $\{X_n = 1\}$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un unique record lors de l'expérience. Ceci n'est vrai que si le premier tirage est le jeton numéroté n (si ce n'est pas le cas, en plus du record initial il y aura un autre record lorsque n sera pioché). Ainsi :

$$\{X_n = 1\} = \{A_1 = n\}$$

Enfin :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{A_1 = n\}\big) \ = \ \frac{1}{n} \qquad \textit{(car lors du 1}^{\textit{er}}\textit{ tirage, chaque jeton est obtenu de manière équiprobable)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) \ = \ \frac{1}{n}}$$

- L'événement $\{X_n = n\}$ est réalisé si et seulement si on a obtenu n records lors de l'expérience. C'est le cas uniquement si chaque tirage amène un record (chaque numéro est plus grand que tous les numéros précédemment tirés). Ainsi, $\{X_n = n\}$ est réalisé si et seulement si les jetons ont été tirés dans l'ordre croissant.
  Le seul n-tirage qui réalise $\{X_n = n\}$ est donc $\omega = (1, 2, \dots, n-1, n)$. Finalement, comme chaque n-tirage de l'expérience a la même probabilité d'apparaître, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) \ = \ \frac{\mathrm{Card}\big(\{X_n = n\}\big)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \ = \ \frac{1}{n!}$$

(Ω est l'ensemble des n-arrangements, c'est-à-dire des n-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, qui ne sont autre que les permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$)

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) \;=\; \frac{1}{n!}}$$

Commentaire

Il est aussi possible de présenter cette démonstration à l'aide de la méthodologie classique consistant à procéder initialement à une décomposition d'événements. Plus précisément :

$$\{X_n = n\} \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} \{A_i = i\} \;=\; \{A_1 = 1\} \cap \ldots \cap \{A_n = n\}$$

Ainsi, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) \\
= \; & \mathbb{P}\big(\{A_1 = 1\} \cap \ldots \cap \{A_n = n\}\big) \\
= \; & \mathbb{P}\big(\{A_1 = 1\}\big) \times \mathbb{P}_{\{A_1=1\}}\big(\{A_2 = 2\}\big) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\{A_1=1\}\cap\ldots\cap\{A_{n-1}=n-1\}}\big(\{A_n = n\}\big) \\
= \; & \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \ldots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

On s'est servi de la propriété : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}_{\{A_1=1\}\cap\ldots\cap\{A_{i-1}=i-1\}}\big(\{A_i = i\}\big) = \dfrac{1}{n-i+1}$.
Détaillons ce point.
Si l'événement $\{A_1 = 1\} \cap \ldots \cap \{A_{i-1} = i-1\}$ est réalisé c'est que l'on a obtenu les $i-1$ premiers jetons (dans l'ordre croissant) lors des $i-1$ premiers tirages. Dans ce cas, $\{A_i = i\}$ est réalisé si et seulement si l'on pioche, lors du $i^{\text{ème}}$ tirage, le jeton numéro i dans une urne qui contient alors $n-i+1$ jetons.
On obtient alors le résultat souhaité car chaque jeton a la même probabilité d'apparaître.

- D'après la question ***7.a)***, $X_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$.

  D'après ce qui précède : $\mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\}\big) = \dfrac{1}{2}$.

  Et comme la famille $\big(\{X_2 = 1\}, \{X_2 = 2\}\big)$ forme un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}\big(\{X_2 = 2\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\}\big) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  (on peut aussi utiliser : $\mathbb{P}\big(\{X_2 = 2\}\big) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$)

$$\boxed{\text{On en déduit : } X_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 2]\!]).}$$

- D'après la question ***7.a)***, $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

  D'après ce qui précède : $\mathbb{P}\big(\{X_3 = 1\}\big) = \dfrac{1}{3}$.

  D'après ce qui précède : $\mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$.

  Et comme la famille $\big(\{X_3 = 1\}, \{X_3 = 2\}, \{X_3 = 3\}\big)$ forme un système complet d'événements :

$$\mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) = 1 - \big(\mathbb{P}\big(\{X_3 = 1\} + \mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big)\big) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

En résumé, la loi de X_3 est définie par :

× $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$,

× $\mathbb{P}(\{X_3 = 1\}) = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(\{X_3 = 2\}) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{X_3 = 3\}) = \dfrac{1}{6}$.

□

c) En considérant le système complet d'événements $(\{A_n = n\}, \{A_n < n\})$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2,n]\!],\quad \mathbb{P}(\{X_n = j\}) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(\{X_{n-1} = j-1\}) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}(\{X_{n-1} = j\})$$

Démonstration.
Soit $n > 2$ et soit $j \in [\![2,n]\!]$.

- La famille $(\{A_n = n\}, \{A_n < n\})$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{X_n = j\}) \ = \ \mathbb{P}(\{A_n = n\} \cap \{X_n = j\}) + \mathbb{P}(\{A_n < n\} \cap \{X_n = j\})$$

- L'événement $\{A_n = n\} \cap \{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré est numéroté n,
  × et si on a obtenu j records lors des n premiers tirages.
  Or, le jeton n constitue forcément un record.
  On en déduit que l'événement $\{A_n = n\} \cap \{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré est numéroté n,
  × et si on a obtenu $j-1$ records lors des $n-1$ premiers tirages.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \{A_n = n\} \cap \{X_n = j\} \ = \ \{A_n = n\} \cap \{X_{n-1} = j-1\}.}$$

- L'événement $\{A_n < n\} \cap \{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tirée n'est pas numéroté n,
  × et si on a obtenu j records lors des n premiers tirages.
  Or, si le jeton n n'a pas été tiré lors du $n^{\text{ème}}$ tirage, c'est qu'il a été tiré avant. Ainsi, le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré ne constitue pas un record puisqu'il porte un numéro strictement plus petit que n.
  On en déduit que l'événement $\{A_n < n\} \cap \{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement :
  × le $n^{\text{ème}}$ jeton tiré n'est pas numéroté n,
  × et si on a obtenu j records lors des $n-1$ premiers tirages.

$$\boxed{\text{Finalement : } \{A_n < n\} \cap \{X_n = j\} \ = \ \{A_n < n\} \cap \{X_{n-1} = j\}}$$

- On peut alors reprendre le calcul initial :

$$\begin{array}{cl}
& \mathbb{P}(\{X_n = j\}) \\
= & \mathbb{P}(\{A_n = n\} \cap \{X_n = j\}) + \mathbb{P}(\{A_n < n\} \cap \{X_n = j\}) \\
= & \mathbb{P}(\{A_n = n\} \cap \{X_{n-1} = j-1\}) + \mathbb{P}(\{A_n < n\} \cap \{X_{n-1} = j\}) \\
= & \mathbb{P}(\{A_n = n\})\ \mathbb{P}_{\{A_n = n\}}(\{X_{n-1} = j-1\}) + \mathbb{P}(\{A_n < n\})\ \mathbb{P}_{\{A_n < n\}}(\{X_{n-1} = j\}) \qquad (*) \\
= & \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}_{\{A_n = n\}}(\{X_{n-1} = j-1\}) + \dfrac{n-1}{n}\ \mathbb{P}_{\{A_n < n\}}(\{X_{n-1} = j\}) \\
= & \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}(\{X_{n-1} = j-1\}) + \dfrac{n-1}{n}\ \mathbb{P}(\{X_{n-1} = j\})
\end{array}$$

La dernière égalité provient du fait que le nombre de records obtenus lors des $n-1$ premiers tirages ne dépend pas du résultat du $n^{\text{ème}}$ tirage.
Les v.a.r. X_{n-1} et A_n sont donc indépendantes.

- Détaillons le calcul de $\mathbb{P}\big(\{A_n = n\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{A_n < n\}\big)$.
  Cela démontrera au passage que ces deux probabilités sont non nulles ce qui est essentiel pour le calcul précédent (point $(*)$).

  Tout d'abord, remarquons que chaque n-tirage est obtenu de manière équiprobable (il y a autant de chance de vider l'urne d'une manière que d'une autre).

  - Un n-tirage réalisant l'événement $\{A_n = n\}$ est un n-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ contenant le numéro n en $n^{\text{ème}}$ position. Un tel n-uplet est entièrement déterminé par :

    × le placement des jetons numérotés de 1 à $n-1$ dans les $n-1$ premières positions : $(n-1)!$ choix possibles.

    Il y a en tout : $(n-1)!$ tels n-tirages.

    On en déduit : $\mathbb{P}\big(\{A_n = n\}\big) = \dfrac{\text{Card}\big(\{A_n = n\}\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

    $$\boxed{\mathbb{P}\big(\{A_n = n\}\big) = \frac{1}{n}}$$

  - La famille $\big(\{A_n = n\}, \{A_n < n\}\big)$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

    $$\mathbb{P}\big(\{A_n < n\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{A_n = n\}\big) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

    $$\boxed{\mathbb{P}\big(\{A_n < n\}\big) = \frac{n-1}{n}}$$

Finalement, on a bien :
$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\quad \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big).}$$
$\square$

Commentaire

- Il était aussi possible (mais plus long) de procéder par dénombrement pour déterminer $\mathbb{P}(\{A_n < n\})$. Détaillons ci-dessous la rédaction.
Un n-tirage réalisant l'événement $\{A_n < n\}$ est un n-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ contenant un numéro différent de n en $n^{\text{ème}}$ position.
Un tel n-uplet est entièrement déterminé par :
  × le numéro du jeton (différente de n) en $n^{\text{ème}}$ position : $n-1$ choix possibles.
  × le placement des $n-1$ autres jetons dans les $n-1$ premières positions : $(n-1)!$ choix possibles.

  Il y a en tout : $(n-1) \times (n-1)!$ tels n-tirages.
On en déduit :
$$\mathbb{P}(\{A_n < n\}) = \frac{\text{Card}(\{A_n < n\})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(n-1) \times (n-1)!}{n!} = \frac{n-1}{n}$$
- Le concepteur n'attendait certainement pas ici une démonstration aussi détaillée du calcul de $\mathbb{P}(\{A_n = n\})$. Une justification du type « au $n^{\text{ème}}$ tirage, chaque jeton a la même probabilité d'apparaître donc $\mathbb{P}(\{A_n = n\}) = \frac{1}{n}$ » serait certainement acceptée.
- La formule donnée dans l'énoncé peut permettre de nous guider. On peut remarquer que :
  × le résultat du calcul de $\mathbb{P}(\{X_n = j\})$ se présente sous forme d'une somme. On peut donc penser que l'on va être amené à écrire l'événement $\{X_n = j\}$ sous forme d'une réunion d'événements deux à deux incompatibles.
  × les deux termes qui composent cette somme se présentent eux sous forme de produit. On peut donc penser que ces produits sont le résultat de la probabilité d'une intersection d'évenements (indépendants ou non).

  Finalement, le résultat permet de comprendre que l'on écrit $\{X_n = j\}$ comme réunion de deux événements qui s'écrivent eux-mêmes comme intersection d'événements. Il n'y a pas à douter : c'est la formule des probabilités totales qu'il faut utiliser.

d) Donner la loi de X_4.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***7.a)*** : $X_4(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.
- D'après la question ***7.b)*** :
$$\mathbb{P}(\{X_4 = 1\}) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\{X_4 = 4\}) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$
- En appliquant le résultat de la question précédente pour $n = 4$ ($\geqslant 2$) et $j = 2$ ($\in [\![2, 4]\!]$) on obtient :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_4 = 2\}) &= \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(\{X_3 = 1\}) + \frac{4-1}{4}\,\mathbb{P}(\{X_3 = 2\}) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \qquad \textit{(d'après la question 7.b))} \\ &= \frac{2}{24} + \frac{9}{24} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$
- Comme la famille $(\{X_4 = 1\}, \{X_4 = 2\}, \{X_4 = 3\}, \{X_4 = 4\})$ forme un système complet

d'événements, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X_4 = 3\}\big) & = & 1 - \big(\mathbb{P}\big(\{X_4 = 1\} + \mathbb{P}\big(\{X_4 = 2\} + \mathbb{P}\big(\{X_4 = 4\}\big)\big) \\ & = & 1 - \left(\dfrac{6}{24} + \dfrac{11}{24} + \dfrac{1}{24}\right) = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4} \end{array}$$

> En résumé, la loi de X_4 est définie par :
> - × $X_4(\Omega) = [\![1, 4]\!]$,
> - × $\mathbb{P}\big(\{X_4 = 1\}\big) = \dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}\big(\{X_4 = 2\}\big) = \dfrac{11}{24}$, $\mathbb{P}\big(\{X_4 = 3\}\big) = \dfrac{1}{4}$, $\mathbb{P}\big(\{X_4 = 4\}\big) = \dfrac{1}{24}$.

Commentaire

- Le calcul de $\mathbb{P}\big(\{X_4 = 2\}\big)$ peut aussi être obtenu en appliquant le résultat de la question précédente pour $n = 4$ ($\geqslant 2$) et $j = 3$ ($\in [\![2, 4]\!]$). On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\{X_4 = 3\}\big) & = & \dfrac{1}{4}\, \mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) + \dfrac{4-1}{4}\, \mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) \\ & = & \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{6} \; = \; \dfrac{3}{24} + \dfrac{3}{24} \; = \; \dfrac{6}{24} \; = \; \dfrac{1}{4} \end{array}$$

- La résolution de cette question s'appuie sur le résultat de la question précédente qui est fourni par l'énoncé, ainsi que sur le résultat de la ***7.b)***. Cette question est une simple application numérique et peut être traitée même si la question précédente ne l'est pas. Il est d'ailleurs vivement conseillé de le faire. De manière générale, il faut s'habituer à repérer ces questions qui fournissent facilement des points.

□

8. a) Vérifier que la formule obtenue à la question ***7.c)*** reste valable pour $j = 1$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'une part, d'après la question ***7.b)*** :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) = \frac{1}{n}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{cll} & \dfrac{1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = 0\}\big) + \dfrac{n-1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = 1\}\big) & \\ = & \dfrac{1}{n} \times 0 + \dfrac{n-1}{n}\, \dfrac{1}{n-1} & \textit{(car } 0 \notin X_{n-1}(\Omega) \textit{ et d'après la question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ = & \dfrac{1}{n} & \end{array}$$

On a bien :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) \; = \; \frac{1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = 0\}\big) + \frac{n-1}{n}\, \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = 1\}\big)$$

> La formule obtenue en ***7.c)*** reste valable pour $j = 1$.

Commentaire

Ce type de questions amène fréquemment à des erreurs de logique. Lorsque l'on demande de **démontrer** qu'une égalité est vérifiée à un certain rang, on détaille le membre de gauche, on détaille le membre de droit, et on conclut que les deux sont égaux. Par contre, il sera faux d'écrire :

$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = 0\}\big) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = 1\}\big) \;=\; \dots \;=\; \frac{1}{n}$$

car on ne peut **supposer** la première égalité. Il s'agit précisément de la démontrer ! □

b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \;=\; \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& G_n(t) \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\, t^k && \textit{(par définition)} \\
= \;& \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k-1\}\big) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\right) t^k && \textit{(d'après la } \textbf{7.c)} \textit{ et la } \textbf{8.a)}\textit{)} \\
= \;& \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k-1\}\big)\, t^k + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\, t^k && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \;& \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\, t^{k+1} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\, t^k && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \;& \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\, t^{k+1} + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\, t^k && \begin{array}{l}\textit{(car } \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = 0\}\big) = 0 \\ \textit{et } \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = n\}\big) = 0\textit{)}\end{array} \\
= \;& \frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\, t^k + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = k\}\big)\, t^k \\
= \;& \frac{t}{n}\, G_{n-1}(t) + \frac{n-1}{n}\, G_{n-1}(t) \\
= \;& \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \;=\; \frac{t+n-1}{n}\, G_{n-1}(t).}$$ □

c) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) \;=\; \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$.

- **Initialisation** :
  Soit $t \in \mathbb{R}$.
  - D'une part :
  $$G_1(t) = \sum_{k=1}^{1} \mathbb{P}\big(\{X_1 = k\}\big)\, t^k = \mathbb{P}\big(\{X_1 = 1\}\big)\, t = \frac{1}{1}\, t = t$$
  - D'autre part :
  $$\frac{1}{1!} \prod_{j=0}^{1-1} (t+j) = \prod_{j=0}^{0} (t+j) = t + 0 = t$$

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Suppposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\ \textit{i.e.} : \forall t \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(t) = \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (t+j)\ \right)$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{array}{rcll} G_{n+1}(t) & = & \dfrac{t+n}{n+1}\, G_n(t) & \textit{(en appliquant le résultat \textbf{8.c)}} \\ & & & \textit{en } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } t \in \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \dfrac{t+n}{n+1}\, \dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (t+j) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{1}{n+1}\, \dfrac{1}{n!} \left(\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (t+j) \right) \times (t+n) & \\ & = & \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (t+j) & \end{array}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

- En question ***8.b)***, on a démontré :
  $$\forall m \geqslant 2, \forall t \in \mathbb{R},\ G_m(t) = \frac{t+m-1}{m}\, G_{m-1}(t)$$
  (la variable n est sous la portée d'un quantificateur et peut donc être renommée sans que cela ne change le sens de la propriété)
  Dans la récurrence ci-dessus, on utilise ce résultat pour $m = n+1 \geqslant 2$ (car $n \in \mathbb{N}^*$).
- La propriété $\mathcal{P}(n)$ est quantifiée universellement sur la variable t. Pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$, on doit donc commencer par introduire la variable t (« Soit $t \in \mathbb{R}$ »). Cela ne doit pas poser de problème particulier : on ne fait qu'appliquer ici les mécanismes de rédaction habituels.
- Cette question, une nouvelle fois, peut-être traitée même sans avoir traité les précédentes. En effet, la résolution repose essentiellement sur le résultat de la question ***8.c)*** qui est donné dans l'énoncé. □

9. En dérivant la relation ($\star$), trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Rappelons que les fonctions G_n et G_{n-1} sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car polynomiales.
  En dérivant formellement de part et d'autre de l'égalité $(\star)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_n'(t) \ = \ \left(\frac{1}{n}\ G_{n-1}(t)\right) + \left(\frac{t+n-1}{n}\ G_{n-1}'(t)\right)$$

- En particulier, pour $t = 1$:

$$\underbrace{G_n'(1)}_{E_n} \ = \ \left(\frac{1}{n}\ G_{n-1}(1)\right) + \left(\frac{1+n-1}{n}\ G_{n-1}'(t)\right) \ = \ \frac{1}{n}\ \underbrace{G_{n-1}(1)}_{1} \ + \ \underbrace{G_{n-1}'(1)}_{E_{n-1}}$$

(d'après la question ***1.*** *et* ***2.****)*

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \ E_n = \frac{1}{n} + E_{n-1}}$$

- D'après ce qui précède, pour tout $k \geqslant 2$:

$$E_k - E_{k-1} \ = \ \frac{1}{k}$$

  Par sommation terme à terme de ces égalités, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} (E_k - E_{k-1}) \ = \ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$E_n - E_1 \qquad\qquad u_n - 1$$

(par télescopage)

  Il suffit alors de remarquer : $E_1 = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(1) = 1$ pour conclure.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ E_n = u_n \quad \text{et} \quad E_1 = 1 = u_1}$$

□

10. Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer :

$$\forall n \geqslant 2,\ \ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Rappelons que les fonctions G_n et G_{n-1} sont dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ car polynomiales.
  En dérivant formellement de part et d'autre de l'égalité $(\star\star)$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_n''(t) \ = \ \left(\frac{1}{n}\ G_{n-1}'(t)\right) + \left(\frac{1}{n}\ G_{n-1}'(t)\right) + \left(\frac{t+n-1}{n}\ G_{n-1}''(t)\right)$$

- En particulier, pour $t = 1$:

$$G_n''(1) \ = \ \frac{2}{n}\ G_{n-1}'(1) + G_{n-1}''(1)$$

  D'après la question ***3.*** : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n''(1) = V_n - E_n + \big(E_n\big)^2$. On en déduit :

$$V_n - E_n + \big(E_n\big)^2 \ = \ \frac{2}{n}\ E_n + \big(V_{n-1} - E_{n-1} + \big(E_{n-1}\big)^2\big)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= E_n + \frac{2}{n}\,E_{n-1} - \left(E_n\right)^2 - E_{n-1} + \left(E_{n-1}\right)^2 \\ &= \cancel{E_n} + \frac{2}{n}\left(E_n - \frac{1}{n}\right) - \left(E_n\right)^2 - \left(\cancel{E_n} - \frac{1}{n}\right) + \left(E_n - \frac{1}{n}\right)^2 \qquad \textit{(car } E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n}\textit{)} \\ &= \xcancel{\frac{2}{n}E_n} - \frac{2}{n^2} + \cancel{(E_n)^2} + \frac{1}{n} + \left(\cancel{(E_n)^2} - \xcancel{\frac{2}{n}E_n} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

Démonstration.

- Dans la question précédente, on a démontré, pour tout $k \geqslant 2$:

$$V_k - V_{k-1} \ = \ \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

- Par sommation terme à terme de ces égalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=2}^{n} (V_k - V_{k-1}) & = & \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ V_n - V_1 & & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \end{array} \qquad \textit{(par télescopage)}$$

- Or :

$$V_1 = \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = u_n - \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = h_n - \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ V_n = u_n - h_n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}.}$$

- Enfin, remarquons :

$$u_1 - h_1 + \frac{1}{1^2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} - \frac{1}{1} = 0$$

On en déduit que la relation précédente est aussi vérifiée en $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = u_n - h_n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

□

c) Montrer : $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente :

$$\frac{V_n}{\ln(n)} = \frac{u_n - h_n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} - \frac{h_n}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2\,\ln(n)} - \frac{1}{n\,\ln(n)}$$

- Or :

× $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ d'après la question ***4.c)***.

× $\dfrac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car (h_n) admet une limite finie (question ***5***) et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

× $\dfrac{1}{n^2\ \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $n^2\ \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

× $\dfrac{1}{n\ \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $n\ \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- Finalement :
$$\frac{V_n}{\ln(n)} \;=\; \frac{u_n}{\ln(n)} - \frac{h_n}{\ln(n)} + \frac{1}{n^2\ \ln(n)} - \frac{1}{n\ \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

Exercice : `ECRICOME 2018 - voie S`

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}(\{N=0\}) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{N=k\}) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(\{N=k-1\})$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{N=k\}) = \frac{b^k}{k!}\ \mathbb{P}(\{N=0\})$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\mathbb{P}(\{N=k\}) = \dfrac{b^k}{k!}\ \mathbb{P}(\{N=0\})$.

▸ **Initialisation** :
$$\frac{b^0}{0!}\ \mathbb{P}(\{N=0\}) \;=\; \frac{1}{1}\ \mathbb{P}(\{N=0\}) \;=\; \mathbb{P}(\{N=0\})$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(\{N=k+1\}) = \dfrac{b^{k+1}}{(k+1)!}\ \mathbb{P}(\{N=0\})$).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{N=k+1\}) &= \left(0 + \frac{b}{k+1}\right)\ \mathbb{P}(\{N=k\}) && \textit{(car N vérifie une relation de Panjer avec $a=0$)}\\
&= \frac{b}{k+1} \times \frac{b^k}{k!}\ \mathbb{P}(\{N=0\}) && \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= \frac{b^{k+1}}{(k+1)!}\ \mathbb{P}(\{N=0\})
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{N = k\}) = \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}(\{N = 0\}).}$$

□

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = k\})$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{N = k\}) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!}\, \mathbb{P}(\{N = 0\}) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \mathbb{P}(\{N = 0\}) \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} \end{aligned}$$

  Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{b^n}{n!}$ est la série exponentielle de paramètre b. Elle est donc convergente. De plus :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = \mathrm{e}^b$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = k\}) \ = \ \mathbb{P}(\{N = 0\})\ \mathrm{e}^b.}$$

- D'après l'énoncé, la v.a.r. N est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On en déduit que la famille $\big(\{N = k\}\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = k\}) = 1 \\ \text{donc} \quad & \mathbb{P}(\{N = 0\})\, \mathrm{e}^b = 1 \\ \text{d'où} \quad & \mathbb{P}(\{N = 0\}) = \mathrm{e}^{-b} \end{aligned}$$

- Ainsi :
  × $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (d'après l'énoncé),
  × $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{N = k\}) = \frac{b^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-b}$ (d'après la question précédente).

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \sim \mathcal{P}(b).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(N) = b \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = b.}$$

□

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(\{N = k\}) = 0$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \geqslant 2,\ \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : \mathbb{P}(\{N = k\}) = 0$.

▸ **Initialisation**

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}(\{N=2\}) & = & \left(a+\dfrac{-\cancel{2}\,a}{\cancel{2}}\right)\mathbb{P}(\{N=1\}) & \textit{(car } N \textit{ vérifie une relation de Panjer de paramètres } a \textit{ et } b=-2a\textit{)}\\ & = & 0\times\mathbb{P}(\{N=1\}) & \\ & = & 0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(\{N=k+1\})=0$).

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}(\{N=k+1\}) & = & \left(a+\dfrac{-2a}{k+1}\right)\mathbb{P}(\{N=k\}) & \\ & = & \left(a-\dfrac{2a}{k+1}\right)\times 0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)}\\ & = & 0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall k\geqslant 2,\ \mathbb{P}(\{N=k\})=0.}$$

□

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

Démonstration.

- On sait déjà :
  × $N(\Omega)\subset\mathbb{N}$,
  × $\forall k\geqslant 2$, $\mathbb{P}(\{N=k\})=0$.

  On en déduit : $N\sim\mathcal{B}(p)$, où : $p=\mathbb{P}(\{N=1\})$.

Commentaire

- Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi de Bernoulli (de paramètre p) admet pour ensemble image $\{0,1\}$. Ici, N a pour ensemble image $N(\Omega)\subset\mathbb{N}$ mais prend les valeurs $k\in[\![2,+\infty[\![$ avec probabilité nulle. On a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(\{X=x\})=\mathbb{P}(\{N=x\})$$

(et ces probabilités sont nulles si $x\in\mathbb{N}^*$)

  On considère alors que les v.a.r. discrètes X et N sont toutes deux de même loi $\mathcal{B}(p)$.

- Cette propriété se généralise comme suit.
  Soient X et Y deux v.a.r. **discrètes**. Alors :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \ \Leftrightarrow\ \forall x\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(\{X=x\})=\mathbb{P}(\{Y=x\})$$

- On insiste sur le fait que la propriété précédente n'est vérifiée que pour les v.a.r. discrètes. Rappelons que si X est une v.a.r. à densité alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\mathbb{P}\big(\{X=x\}\big)=0$.

- Il reste à déterminer $\mathbb{P}(\{N=1\})$. Or :
  × d'une part : $\mathbb{P}(\{N=1\}) \ = \ \left(a-\dfrac{2a}{1}\right)\mathbb{P}(\{N=0\}) \ = \ -a\mathbb{P}(\{N=0\})$,

× d'autre part : $\mathbb{P}(\{N=1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{N=0\})$.

Or :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{P}(\{N=0\}) & + & \mathbb{P}(\{N=1\}) & = & 1 \\ a\,\mathbb{P}(\{N=0\}) & + & \mathbb{P}(\{N=1\}) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - a\,L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{P}(\{N=0\}) & + & \mathbb{P}(\{N=1\}) & = & 1 \\ & & (1-a)\,\mathbb{P}(\{N=1\}) & = & -a \end{array}\right.$$

Ainsi, comme $a \neq 1$: $\mathbb{P}(\{N=1\}) = -\dfrac{a}{1-a}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \sim \mathcal{B}\left(-\dfrac{a}{1-a}\right).}$$

□

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(\{Z=k\}) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(\{Z=k-1\})$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{array}{cll} & \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(\{Z=k-1\}) & \\ = & \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \dbinom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)} & \textit{(car } Z \sim \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \\ = & \dfrac{n-k+1}{k} \times \dfrac{n!}{(n-(k-1))!\,(k-1)!}\ p^k \dfrac{(1-p)^{n-k+\cancel{1}}}{\cancel{1-p}} & \\ = & \dfrac{n-k+1}{(n-k+1)!} \times \dfrac{n!}{k \times (k-1)!}\ p^k\,(1-p)^{n-k} & \\ = & \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!}\ p^k\,(1-p)^{n-k} & \\ = & \dbinom{n}{k}\ p^k\,(1-p)^{n-k} & \\ = & \mathbb{P}(\{Z=k\}) & \textit{(car } Z \sim \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\{Z=k\}) = \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(\{Z=k-1\}).}$$

□

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a bien : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- Ensuite : $\mathbb{P}(\{Z=0\}) \ = \ \dbinom{n}{0} p^0(1-p)^{n-0} \ = \ (1-p)^n$.
  Or, d'après l'énoncé, $p > 0$, donc : $\mathbb{P}(\{Z=0\}) \neq 1$.

- Déterminons $a < 1$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{Z = k\}) = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) \mathbb{P}(\{Z = k-1\})$.

  Trois cas se présentent :

  × si $k \in [\![1, n]\!]$, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{Z = k\}) &= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(\{Z = k-1\}) \\ &= \frac{p}{1-p} \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \mathbb{P}(\{Z = k-1\}) \\ &= \left(-\frac{p}{1-p} + \frac{\frac{(n+1)p}{1-p}}{k}\right) \mathbb{P}(\{Z = k-1\})\end{aligned}$$

  On pose alors :

$$a = -\frac{p}{1-p} \quad \text{et} \quad b = \frac{(n+1)p}{1-p} = -(n+1)a$$

  Ainsi :

  - comme $p \in \,]0, 1[$: $a < 0$. D'où : $a < 1$.
  - on a évidemment : $b \in \mathbb{R}$.
  - d'après le calcul précédent :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\{Z = k\}) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(\{Z = k-1\})$$

  × si $k = n + 1$.

  - D'une part : $\mathbb{P}(\{Z = n+1\}) = 0$.
  - D'autre part :

$$\left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(\{Z = n\}) = \left(a - \frac{\cancel{(n+1)}\, a}{\cancel{n+1}}\right) \mathbb{P}(\{Z = n\}) = 0$$

  Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{Z = n+1\}) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(\{Z = n\})$$

  × si $k \in [\![n+2, +\infty[\![$.

  - D'une part : $\mathbb{P}(\{Z = k\}) = 0$.
  - D'autre part :

$$\left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(\{Z = k-1\}) = \left(a - \frac{b}{k}\right) \times 0 = 0$$

  Finalement, on a bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{Z = k\}) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(\{Z = k-1\})$$

La v.a.r. Z vérifie donc bien une relation de Panjer de paramètres $a = -\dfrac{p}{1-p}$ et $b = \dfrac{p}{1-p}\ (n+1)$.

□

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}(\{N = 1\})$. En déduire : $a + b \geqslant 0$.

Démonstration.

- Comme la v.a.r. N vérifie la relation de Panjer de paramètres a et b :

$$\mathbb{P}(\{N = 1\}) \; = \; \left(a + \frac{b}{1}\right) \mathbb{P}(\{N = 0\})$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{N = 1\}) \; = \; (a + b)\, \mathbb{P}(\{N = 0\})}$$

- Comme $\mathbb{P}$ est une probabilité :

$$\mathbb{P}(\{N = 1\}) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{N = 0\}) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } a + b \geqslant 0.}$$

□

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k\}) \; = \; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\, \mathbb{P}(\{N = k\}) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N = k\})$$

Démonstration.
Soit $m \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k\}) \; &= \; \sum_{k=1}^{m} k \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(\{N = k-1\}) && \textit{(car N vérifie une relation de Panjer)} \\
&= \; a \sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k-1\}) + b \sum_{k=1}^{m} \cancel{k}\, \frac{1}{\cancel{k}}\, \mathbb{P}(\{N = k-1\}) \\
&= \; a \sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k-1\}) + b \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(\{N = k-1\}) \\
&= \; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\, \mathbb{P}(\{N = k\}) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N = k\}) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k\}) \; = \; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\, \mathbb{P}(\{N = k\}) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N = k\})}$$

□

c) En déduire que $\left((1-a) \sum\limits_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k\})\right)_{m \geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

Démonstration.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k\}) \; &= \; a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}(\{N = k\}) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N = k\}) \\
&= \; a \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}(\{N = k\}) + a \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N = k\}) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N = k\})
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{m} k\, \mathbb{P}(\{N = k\}) - a \sum_{k=0}^{m-1} k\, \mathbb{P}(\{N = k\}) \; = \; (a + b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N = k\})$$

Or :

× d'une part : $\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) = \sum\limits_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + m\,\mathbb{P}(\{N=m\})$.

× d'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) = \sum\limits_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\})$.

D'où :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + m\,\mathbb{P}(\{N=m\}) - a \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;=\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\})$$

Finalement :

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;=\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) - m\,\mathbb{P}(\{N=m\}) \qquad (\star)$$

- Comme $m\,\mathbb{P}(\{N=m\}) \geqslant 0$, on obtient :

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\})$$

De plus, comme $\big(\{N=k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) = 1$.

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\})}_{=\,1}$$

Comme $a+b \geqslant 0$, on en déduit :

$$(a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; a+b$$

D'où :

$$(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; a+b$$

$$\boxed{\text{La suite } \left((1-a) \sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(\{N=k\})\right)_{m\geqslant 1} \text{ est donc majorée par } a+b.}$$

Commentaire

On a démontré :

$$\forall m \geqslant 1,\ (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; a+b$$

Dans cette propriété, la variable m est muette (car portée par le quantificateur $\forall$). En posant $r = m-1$, on obtient donc :

$$\forall r \geqslant 0,\ (a+b) \sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; a+b$$

Ceci permet bien de conclure que la suite $\left((1-a) \sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(\{N=k\})\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée par $a+b$.

- La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(\{N=k\})\right)_{m\geqslant 1}$ est donc :

× croissante, car c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs,

× majorée par $\dfrac{a+b}{1-a}$, car $1-a>0$.

On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(\{N=k\})\right)_{m\geqslant 1}$ converge, c'est-à-dire la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(\{N=n\})$ est convergente. Cette série est donc absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } N \text{ admet une espérance.}}$$

- En reprenant $(\star)$, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;=\; \frac{a+b}{1-a}\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(\{N=k\}) - \frac{1}{1-a}\,m\,\mathbb{P}(\{N=m\})$$

Or :

× on a déjà montré : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\{N=k\})=1$,

× comme la série $\sum\limits_{m\geqslant 1} m\,\mathbb{P}(\{N=m\})$ est convergente, son terme général tend vers 0, *i.e.* : $\lim\limits_{m\to+\infty} m\,\mathbb{P}(\{N=m\})=0$.

Ainsi, en passant à la limite quand m tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;=\; \frac{a+b}{1-a}\times 1 - \frac{1}{1-a}\times 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(N)=\frac{a+b}{1-a}.}$$

□

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

Démonstration.

- La v.a.r. N admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\,\mathbb{P}(\{N=n\})$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) &= \sum_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k^2 \left(a+\frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(\{N=k-1\}) \\
&= a \sum_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k-1\}) + b \sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(\{N=k-1\}) \\
&= a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + b \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \\
&= a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + 2a \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + a \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \\
&\quad + b \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \\
&= a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\} \\
&\quad + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\})
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) - a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) = (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\})$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{m} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) - a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \\
=\ & \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + m^2\,\mathbb{P}(\{N=m\}) - a \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \\
=\ & (1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + m^2\,\mathbb{P}(\{N=m\})
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}
(1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) &= (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \\
&\quad - m^2\,\mathbb{P}(\{N=m\})
\end{aligned} \qquad (\star\star)}$$

- Or $m^2\,\mathbb{P}(\{N=m\}) \geqslant 0$, donc :

$$(1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \leqslant (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\})$$

D'où, comme $1-a>0$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \leqslant \frac{2a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) + \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\})$$

De plus :

× comme N admet une espérance, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}(\{N=n\})$ est convergente. Elle est de plus à termes positifs. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;=\; \mathbb{E}(N)$$

× on a déjà vu :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) \;=\; 1$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;\leqslant\; \frac{2a+b}{1-a}\,\mathbb{E}(N)+\frac{a+b}{1-a}$$

La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m-1} k^2\mathbb{P}(\{N=k\})\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est donc :

× croissante, car c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs,

× majorée par $\dfrac{2a+b}{1-a}\,\mathbb{E}(N)+\dfrac{a+b}{1-a}$.

Elle est donc convergente. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\mathbb{P}(\{N=n\})$ est convergente.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } N \text{ admet donc un moment d'ordre 2.}}$$

- Soit $m\in\mathbb{N}^*$. En reprenant $(\star\star)$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;=\; \frac{2a+b}{1-a}\sum_{k=0}^{m-1} k\,\mathbb{P}(\{N=k\})+\frac{a+b}{1-a}\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(\{N=k\})-\frac{1}{1-a}\,m^2\,\mathbb{P}(\{N=m\})$$

Or, comme $\sum\limits_{m\geqslant 0} m^2\mathbb{P}(\{N=m\})$ est une série convergente, son terme général tend vers 0, *i.e.* : $\lim\limits_{m\to+\infty} m^2\,\mathbb{P}(\{N=m\})=0$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \;&=\; \frac{2a+b}{1-a}\,\mathbb{E}(N)+\frac{a+b}{1-a}-\cancel{\frac{1}{1-a}\times 0}\\ &=\; \frac{2a+b}{1-a}\times\frac{a+b}{1-a}+\frac{a+b}{1-a}\\ &=\; \frac{a+b}{1-a}\times\left(\frac{2a+b}{1-a}+1\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(N^2) \;=\; \frac{a+b}{1-a}\times\frac{2a+b+(1-a)}{1-a} \;=\; \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.}$$

□

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. N admet un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que } N \text{ admet une variance.}}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(N) &= \mathbb{E}(N^2) - \big(\mathbb{E}(N)\big)^2 \\
&= \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2 \\
&= \frac{a+b}{(1-a)^2}\big((\cancel{a}+\cancel{b}+1) - (\cancel{a}+\cancel{b})\big) \\
&= \frac{a+b}{(1-a)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}}$$

□

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons que N suit une loi de Poisson.
Alors, par propriété de la loi de Poisson : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.

($\Rightarrow$) Supposons : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.
On aimerait montrer : $a = 0$ et $b > 0$, pour pouvoir appliquer le résultat de la question ***1.***.

- Tout d'abord, d'après les questions ***4.c)*** et ***4.e)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) &\Leftrightarrow \frac{a+b}{1-a} = \frac{a+b}{(1-a)^2} \\
&\Leftrightarrow (a+b)(1-a) = a+b \qquad \textit{(car : } 1-a \neq 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow (a+b)(1-a) - (a+b) = 0 \\
&\Leftrightarrow (a+b)(\cancel{1} - a - \cancel{1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow a(a+b) = 0 \\
&\Leftrightarrow a = 0 \ \texttt{OU} \ a+b = 0
\end{aligned}$$

- Raisonnons par l'aburde pour montrer : $a = 0$.
  Supposons : $a + b = 0$. Alors, d'après ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}(\{N=1\}) \ = \ (a+b)\,\mathbb{P}(\{N=0\}) \ = \ 0$$

  Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{N=k\}) = 0$.

  On en déduit :
  × d'une part : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) = 1$ (car la famille $\big(\{N=k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements)
  × d'autre part : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\}) = \mathbb{P}(\{N=0\})$ (car : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{N=k\}) = 0$).

  Ainsi : $\mathbb{P}(\{N=0\}) = 1$. Absurde ! (d'après l'énoncé)
  On en déduit : $a = 0$.

- Montrons alors : $b > 0$.

× D'après ce qui précède : $a = 0$.

× D'après la question ***4.a)*** : $a + b \geqslant 0$.
De plus, d'après le raisonnement par l'absurde précédent : $a + b \neq 0$. Ainsi : $a + b > 0$.

On en déduit : $b > 0$.

- On sait alors : $a = 0$ et $b > 0$.
On en déduit, d'après la question ***1.***, que N suit une loi de Poisson (de paramètre b).

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \text{ si et seulement si la v.a.r. } N \text{ suit une loi de Poisson.}}$$

□

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}(\{N = k\})$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente.

Démonstration.
Soit $x \in [0, 1]$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 1$, alors on étudie la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$.
La famille $\big(\{N = k\}\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\{N = n\})$ converge et : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = k\}) = 1$.
Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$ converge.

- Si $x \in [0, 1[$.
Par propriété de $\mathbb{P}$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_k \leqslant 1$.
On obtient :
× $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_k\, x^k \leqslant x^k$ (car : $x^k \geqslant 0$),
× la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ est la série géométrique de raison $x \in\,]-1, 1[$. Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in [0,1], \text{ la série } \sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\, x^n \text{ est convergente.}}$$

□

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G(x) \; = \; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, x^k \; = \; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = k\})\, x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a + b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = p_0\, (1 - a\, x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\,(1-a\,x)^{\alpha-k}$$

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto (1-a\,x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, car elle est la composée $g = h_2 \circ h_1$ de :
  × $h_1 : x \mapsto 1 - a\,x$ qui :
  - est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$,
  - vérifie : $h_1([0,1]) \ \subset\ ]0,+\infty[$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$:
  $$1 - a\,x > 0 \ \Leftrightarrow\ 1 > a\,x \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{a} > x \quad (car\ a > 0)$$
  Or, comme $a < 1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$: $\dfrac{1}{a} > 1$.
  Ainsi : $0 \leqslant x \leqslant 1 < \dfrac{1}{a}$. D'où : $1 - a\,x > 0$.

  × $h_2 : x \mapsto x^\alpha$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction puissance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f_0 \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } [0,1].}$$

Commentaire

On peut aussi écrire f_0 sous la forme :
$$f_0 : x \mapsto p_0\ \frac{1}{(1-a\,x)^{-\alpha}}$$

- Comme $\alpha = -\dfrac{a+b}{a} < 0$, cette écriture a l'avantage de présenter f_0 comme l'inverse d'une puissance positive.
- Pour démontrer que la fonction f_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on aurait alors insisté sur le fait qu'elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1-a\,x)^{-\alpha}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et qui ne s'annule pas sur cette intervalle.
  Cependant, il aurait bien fallu démontrer que la fonction $x \mapsto (1-a\,x)^{-\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ par composition.

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : \forall x \in [0,1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k\,(1-a\,x)^{\alpha-k}$.
  ▸ **Initialisation**
  Soit $x \in [0,1]$.
  × D'une part : $f^{(0)}(x) \ = \ f(x) \ = \ p_0\,(1-a\,x)^\alpha$.
  × D'autre part : $0! \times p_0\,(1-a\,x)^{\alpha-0} \ = \ p_0 \times (1-a\,x)^\alpha$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
  ▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$
  (*i.e.* $\forall x \in [0,1],\ f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \times p_{k+1}\,(1-a\,x)^{\alpha-(k+1)}$).
  Soit $x \in [0,1]$. Par hypothèse de récurrence :
  $$f^{(k)}(x) \ = \ k! \times p_k\ (1-a\,x)^{\alpha-k}$$
  Comme f_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, la fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur $[0,1]$, et :
  $$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= k! \times p_k \times (-a)\,(\alpha - k)\ (1-a\,x)^{\alpha-k-1} \\ &= k!\,(-a)\left(-\frac{a+b}{a} - k\right)\mathbb{P}(\{N=k\})\ (1-a\,x)^{\alpha-(k+1)} \\ &= k!\,(a+b+a\,k)\,\mathbb{P}(\{N=k\}) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{array}{rcl}
(k+1)! \times p_{k+1} & = & (k+1)! \times \mathbb{P}(\{N = k+1\}) \\
& = & (k+1)! \left(a + \dfrac{b}{k+1}\right) \mathbb{P}(\{N = k\}) \\
& = & (k+1) \times k! \left(a + \dfrac{b}{k+1}\right) \mathbb{P}(\{N = k\}) \\
& = & k! \big(a(k+1) + b\big)\ \mathbb{P}(\{N = k\}) \\
& = & k!\, (a + b + a\,k)\, \mathbb{P}(\{N = k\})
\end{array}$$

On en déduit :

$$f^{(k+1)}(x) \ = \ (k+1)! \times p_{k+1}\, (1 - a\,x)^{\alpha-(k+1)}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall x \in [0,1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k\ (1 - a\,x)^{\alpha-k}.}$$

$\square$

7. Soit $x \in [0,1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\,t)^{\alpha-n-1}\, (x-t)^n \ dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. En particulier, elle est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$.
Ainsi, par formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on obtient :

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Or, d'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) \ = \ k!\ p_k\ (1 - a\,x)^{\alpha-k}$$

On en déduit :

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{k!}\ p_k\ 1^{\alpha-k}}{\cancel{k!}}\ x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ (n+1)!\ p_{n+1}\ (1 - a\,t)^{\alpha-(n+1)}\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt.}$$

Commentaire

- Dans ce sujet tiré de la voie S, on attendait dans cette question l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral. Ce résultat est bien au programme d'ECS, mais pas dans celui d'ECE. Pour l'adapter à la voie E, il aurait donc fallu admettre le résultat de cette question.
- La formule de Taylor avec reste intégral peut s'énoncer comme suit.
  Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\forall x \in I, \quad f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,dt$$
- Ce résultat peut se démontrer par récurrence en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$:
  $$\forall x \in I, \quad f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,dt$$
  Pour démontrer l'hérédité, on procède par intégration par parties (IPP) :
  $$\left|\begin{array}{lclclcl} u(t) & = & f^{(n+1)}(t) & & u'(t) & = & f^{(n+2)}(t) \\[2mm] v'(t) & = & (x-t)^n & & v(t) & = & -\dfrac{1}{n+1}\,(x-t)^{n+1} \end{array}\right.$$
  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

$\square$

b) Vérifier, pour tout $t \in [0, x]$: $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$0 \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}\,(x-t)^n\,dt \ \leqslant \ \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\,dt$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $t \in [0, x]$.
  $$\begin{array}{rcll} \dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1 & \Leftrightarrow & x-t \leqslant 1-a\,t & \textit{(car, comme } t \in [0,x] \subset [0,1] \textit{ :} \\ & & & 1-a\,t > 0, \textit{ d'après } \boldsymbol{6.}) \\[2mm] & \Leftrightarrow & x-1 \leqslant (1-a)\,t & \\[2mm] & \Leftrightarrow & \dfrac{x-1}{1-a} \leqslant t & \textit{(car } 1-a > 0) \end{array}$$
  La dernière inégalité est vérifiée car, comme $x \in [0,1]$: $\dfrac{x-1}{1-a} \leqslant 0 \leqslant t$.
  Ainsi, par équivalence, la première aussi.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in [0,x],\ \dfrac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1.}$$

- Soit $t \in [0, x]$.

$$\begin{aligned}(1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n &= (1-a\,t)^{\alpha-1}\ (1-a\,t)^{-n}\ (x-t)^n \\ &= (1-a\,t)^{\alpha-1}\ \frac{(x-t)^n}{(1-a\,t)^n} \\ &= (1-a\,t)^{\alpha-1} \left(\frac{x-t}{1-a\,t}\right)^n\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-a\,t} \leqslant 1$$

donc $\quad 0^n \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \leqslant 1^n \quad$ *(par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$)*

d'où $\quad 0 \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1} \left(\dfrac{x-t}{1-a\,t}\right)^n \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1} \quad$ *(car : $(1-a\,t)^{\alpha-1} > 0$)*

ainsi $\quad 0 \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n \leqslant (1-a\,t)^{\alpha-1}$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$0 \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt}$$

□

c) En déduire :

$$G(x) \ = \ p_0\,(1-ax)^\alpha$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$0 \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

Ainsi, comme $(n+1)\,p_{n+1} \geqslant 0$:

$$0 \ \leqslant\ (n+1)\,p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ \leqslant\ (n+1)\,p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt$$

De plus :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)p_{n+1} = 0$, car $(n+1)p_{n+1}$ est terme général de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,p_n$ qui est convergente (car N admet une espérance d'après ***4.c)***).
D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\,p_{n+1} \displaystyle\int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-1}\ dt = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} (n+1)\,p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\ (x-t)^n\ dt \ = \ 0.}$$

- De plus, d'après la question ***7.a)*** :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1-a\,t)^{\alpha-n-1}\,(x-t)^n\; dt \qquad (*)$$

Or, d'après la question ***5.***, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{n} p_n\, x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, x^k \;=\; G(x)$$

Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient :

$$f(x) \;=\; G(x) + 0$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } G(x) = f(x) = p_0\,(1-a\,x)^{\alpha}.}$$

- Par définition de G :

$$G(1) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\; 1^k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=k\})$$

Or, la famille $\big(\{N=k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

$$\boxed{\text{On en déduit : } G(1) = 1.}$$

- De plus : $G(1) = p_0\,(1-a\times 1)^{\alpha}$. Ainsi :

$$p_0\,(1-a)^{\alpha} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } p_0 = \frac{1}{(1-a)^{\alpha}}.}$$

- Soit $x \in [0,1]$.

$$G'(x) \;=\; p_0\,(-a)\,\alpha\,(1-a\,x)^{\alpha-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} G'(1) \;&=\; -a\,\alpha\,p_0\,(1-a)^{\alpha-1} \\ &=\; -\cancel{\alpha}\,\left(-\frac{a+b}{\cancel{\alpha}}\right)\frac{1}{(1-a)^{\alpha}}\;(1-a)^{\alpha-1} \\ &=\; (a+b)\;(1-a)^{\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}} \\ &=\; \frac{a+b}{1-a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après } \textit{4.c)} : G'(1) \;=\; \frac{a+b}{1-a} \;=\; \mathbb{E}(N).}$$

□

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question ***4.*** de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \;=\; \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } N=0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N\geqslant 1 \end{array}\right.$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \ \text{ si } \ N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \ \text{ sinon}$$

Commentaire

On rappelle qu'une v.a.r. est un application. Pour cette raison, une définition plus rigoureuse de la v.a.r. S serait :

$$S : \omega \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \end{cases}$$

8. Calculer $\mathbb{P}(\{S = 0\})$ lorsque $a \in \,]0, 1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

Démonstration.

- La famille $\big(\{N = i\}\big)_{i \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S = 0\}) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \{N = i\}) \\ &= \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \{N = 0\}) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \{N = i\}) \end{aligned}$$

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. S : $\{N = 0\} \subset \{S = 0\}$. D'où :

$$\{S = 0\} \cap \{N = 0\} \ = \ \{N = 0\}$$

  On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \{N = 0\}) \ = \ \mathbb{P}(\{N = 0\}) \ = \ p_0 \ = \ \frac{1}{(1-a)^\alpha} \qquad \textit{d'après } \textbf{\textit{7.c)}}, \textit{ car } a \in \,]0, 1[$$

- De plus, soit $i \in \mathbb{N}^*$, toujours par définition de S :

$$\{S = 0\} \cap \{N = i\} \ = \ \left\{ \sum_{k=1}^{N} X_k = 0 \right\} \cap \{N = i\} \ = \ \left\{ \sum_{k=1}^{i} X_k = 0 \right\} \cap \{N = i\}$$

  Les v.a.r. X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc : $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{i} X_k = 0 \right\} = \bigcap\limits_{k=1}^{i} \{X_k = 0\}$.
  Ainsi :

$$\{S = 0\} \cap \{N = i\} \ = \ \left(\bigcap_{k=1}^{i} \{X_k = 0\} \right) \cap \{N = i\}$$

  On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \{N = i\}) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i} \{X_k = 0\} \right) \cap \{N = i\} \right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i} \{X_k = 0\} \right) \right) \times \mathbb{P}(\{N = i\}) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_i \textit{ sont indépendantes de } N\textit{)} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{i} \mathbb{P}(\{X_k = 0\}) \right) \times \mathbb{P}(\{N = i\}) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_i \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ &= \big(\mathbb{P}(\{X_1 = 0\})\big)^i \, \mathbb{P}(\{N = i\}) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_i \textit{ ont même loi)} \end{aligned}$$

  On note alors $x_0 = \mathbb{P}(\{X_1 = 0\})$. On obtient :

$$\mathbb{P}(\{S = 0\} \cap \{N = i\}) \ = \ x_0^i \, \mathbb{P}(\{N = i\}) \ = \ p_i \, x_0^i$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{S=0\}) &= p_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\ &= p_0\ x_0^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_i\ x_0^i \\ &= G(x_0)\end{aligned}$$

Or, comme $a \in\ ]0,1[$, d'après la question ***7.c)*** :

$$G(x_0) \ = \ p_0\ (1 - a\,x_0)^\alpha \ = \ \frac{1}{(1-a)^\alpha}\ (1-a\,x_0)^\alpha$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{S=0\}) = \left(\frac{1-a\,x_0}{1-a}\right)^\alpha \text{, où } x_0 = \mathbb{P}(\{X_1=0\}).}$$

□

9. Calculer $\mathbb{P}(\{S=0\})$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration.
On peut ré-itérer le raisonnement de la question précédente.

- La famille $\big(\{N=i\}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{S=0\}) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S=0\}\cap\{N=i\}) \\ &= \mathbb{P}(\{S=0\}\cap\{N=0\}) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{S=0\}\cap\{N=i\})\end{aligned}$$

- Tout d'abord :

$$\mathbb{P}(\{S=0\}\cap\{N=0\}) \ = \ \mathbb{P}(\{N=0\}) \ = \ \frac{\lambda^0}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda} \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

- De plus :

$$\{S=0\}\cap\{N=i\} \ = \ \left(\bigcap_{k=1}^{i}\ \{X_k=0\}\right)\cap\{N=i\}$$

  On en déduit, avec les mêmes arguments qu'en question précédente :

$$\mathbb{P}(\{S=0\}\cap\{N=i\}) \ = \ \big(\mathbb{P}(\{X_1=0\})\big)^i\ \mathbb{P}(\{N=i\}) \ = \ \big(\mathbb{P}(\{X_1=0\})\big)^i\ \frac{\lambda^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

  On note toujours $x_0 = \mathbb{P}(\{X_1=0\})$. On obtient :

$$\mathbb{P}(\{S=0\}\cap\{N=i\}) \ = \ x_0^i\ \frac{\lambda^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda} \ = \ \frac{(\lambda\,x_0)^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{S=0\}) &= \mathrm{e}^{-\lambda} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\, x_0)^i}{i!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\ \mathrm{e}^{\lambda\, x_0} && \textit{(car } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda\, x_0)^n}{n!} \textit{ est une série exponentielle de paramètre } \lambda\, x_0\textit{)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda\, x_0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{S=0\}) = \mathrm{e}^{-(1-x_0)\,\lambda}, \text{ où } x_0 = \mathbb{P}(\{X_1=0\}).}$$

□

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}(\{N=k\})$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}(\{X_1=k\})$$

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\, j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(\{S_n = k-j\}) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\})$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \mathbb{P}(\{S=k-j\}) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}(\{S_n = k-j\})$$

Démonstration.
Soit $j \in [\![0,k]\!]$.

- La famille $\big(\{N=n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{S=k-j\}) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N=n\} \cap \{S=k-j\})$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminons $[N=n] \cap \{S=k-j\}$. Deux cas se présentent :
  × si $n=0$, alors :

$$\begin{aligned}
\{N=0\} \cap \{S=k-j\} &= \{N=0\} \cap \{0=k-j\} && \textit{(par définition de } S\textit{)} \\
&= \{N=0\} \cap \{S_0=k-j\} && \textit{(par définition de } S_0\textit{)}
\end{aligned}$$

× si $n \geqslant 1$, alors :

$$\begin{array}{rcll} \{N = n\} \cap \{S = k - j\} & = & \{N = n\} \cap \left\{ \sum\limits_{i=1}^{N} X_i = k - j \right\} & \textit{(par définition de } S\textit{)} \\ & = & \{N = n\} \cap \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = k - j \right\} & \\ & = & \{N = n\} \cap \{S_n = k - j\} & \textit{(par définition de } S_n\textit{)} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{S = k - j\}) & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = n\} \cap \{S_n = k - j\}) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = n\})\ \mathbb{P}(\{S_n = k - j\}) & \textit{(car, par lemme des coalitions, les v.a.r. } S_n \textit{ et } N \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall j \in [\![0, k]\!],\ \mathbb{P}(\{S = k - j\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}(\{S_n = k - j\}).}$$

□

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(\{S = k - j\}) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\})$$

Démonstration.

- Soit $j \in [\![0, k]\!]$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}(\{S = k - j\}) & = & \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \mathbb{P}(\{S_n = k - j\}) \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n\ \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}(\{S_n = k - j\}) \end{array}$$

- Pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\ \left(a + \dfrac{b\,j}{k}\right) q_j\ \mathbb{P}(\{S_n = k - j\})$ sont convergentes. Ainsi leur somme **finie** (pour j variant de 0 à k) l'est aussi. On obtient de plus :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}(\{S = k-j\}) \\
= \ & \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \ \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}(\{S_n = k-j\})\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(p_n \ \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}(\{S_n = k-j\})\right) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} p_n \ \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}(\{S_n = k-j\})\right) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \ \mathbb{P}(\{S_n = k-j\})\right) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) && \textit{(d'après le résultat admis par l'énoncé)} \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \ \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) && \textit{(car N vérifie une relation de Panjer de paramètres a et b)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j \, \mathbb{P}(\{S = k-j\}) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \, \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\})}$$

□

c) Justifier :

$$\mathbb{P}(\{S = k\}) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \, \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\})$$

Démonstration.

- La famille $\big(\{N = n\}\big)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{S = k\}) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{N = n\} \cap \{S = k\})$$

  Avec le même raisonnement qu'en question ***10.a)***, on obtient :

$$\mathbb{P}(\{S = k\}) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \ \mathbb{P}(\{S_n = k\})$$

- Or :

$$\{S_0 = k\} \ = \ \{0 = k\} \ = \ \varnothing \quad \textit{(car $k \in \mathbb{N}^*$)}$$

  Donc : $\mathbb{P}(\{S_0 = k\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{S = k\}) \ &= \ \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \ \mathbb{P}(\{S_n = k\}) \\
&= \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \ \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\}) \quad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{S = k\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \ \mathbb{P}(\{S_{n+1} = k\})}$$

□

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}(\{S=k\}) \;=\; \frac{1}{1-a\,q_0}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{b\,j}{k}\right)q_j\,\mathbb{P}(\{S=k-j\})$$

Démonstration.
D'après la question ***10.b)*** :

$$\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{b\,j}{k}\right)q_j\,\mathbb{P}(\{S=k-j\}) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\,\mathbb{P}(\{S_{n+1}=k\})$$

D'après la question ***10.c)*** :

$$\mathbb{P}(\{S=k\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\;\mathbb{P}(\{S_{n+1}=k\})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{S=k\}) \;&=\; \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{b\,j}{k}\right)q_j\,\mathbb{P}(\{S=k-j\})\\ &=\; \left(a+\frac{b\times 0}{k}\right)q_0\;\mathbb{P}(\{S=k-0\})+\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{b\,j}{k}\right)q_j\,\mathbb{P}(\{S=k-j\})\\ &=\; a\,q_0\;\mathbb{P}(\{S=k\})+\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{b\,j}{k}\right)q_j\,\mathbb{P}(\{S=k-j\})\end{aligned}$$

D'où :

$$(1-a\,q_0)\;\mathbb{P}(\{S=k\}) \;=\; \sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{b\,j}{k}\right)q_j\,\mathbb{P}(\{S=k-j\})$$

Or, comme $q_0\in[0,1]$: $1-a\,q_0>0$ (démontré en question ***6.***).

$$\boxed{\text{On obtient : }\mathbb{P}(\{S=k\}) \;=\; \frac{1}{1-a\,q_0}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{b\,j}{k}\right)q_j\,\mathbb{P}(\{S=k-j\}).}$$

□

Exercice : HEC 2000

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Commentaire

Rigoureusement, il aurait été préférable d'écrire « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit h_n par $h_n = \ldots$ ». Tel qu'écrit ici, il semble que h_n ne soit défini que pour la valeur entière $n \in \mathbb{N}^*$ fixée initialement dans l'énoncé. Il aurait sûrement été préférable d'introduire le contexte aléatoire (description de l'expérience et des v.a.r.) seulement après la **Partie I**.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$k \leqslant x \leqslant k+1$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k+1} \qquad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{k} & & [\ \ln(x)\ ]_k^{k+1} & & \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.}$$

□

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

Commentaire

La remarque précédente s'applique ici. On comprend à la lecture du terme « les inégalités » qu'il y a ici une quantification cachée. Il aurait été préférable d'écrire « Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$ ». S'il est étonnant de laisser une telle ambiguïté dans un énoncé de concours, il n'y a d'autre choix que d'en faire son parti et de se résigner à accepter cette présentation. C'est pourquoi on ne fera plus la remarque dans les questions suivantes même si on s'efforcera de faire apparaître les quantifications en conclusion de chaque question.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les encadrements précédents pour k variant de 1 à n ($n \geqslant 1$).

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \textit{(par sommation télescopique)}$$

d'où
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}$$

enfin
$$h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n \qquad \textit{(par définition de } h_n\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On a donc démontré : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n.}$$

En particulier, l'inégalité de gauche de l'énoncé est démontrée.
Il reste à déterminer l'inégalité de droite.

- D'après ce qui précède : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $h_{m+1} \leqslant 1 + \ln(m+1)$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, en considérant ces inégalités en $m = n - 1 \geqslant 1$, on obtient :

$$h_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ h_n \leqslant 1 + \ln(n)}$$

- Remarquons enfin :
  × $h_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$,
  × $1 + \ln(1) = 1$.

  On a donc bien : $h_1 \leqslant 1 + \ln(1)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n).}$$

□

Commentaire

- Les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** sont une illustration d'une méthodologie classique connue sous le nom de comparaison série-intégrale.
- L'énoncé demande de démontrer l'inégalité à partir du rang 1, ce qui n'est pas très commode (le cas $n = 1$ doit être traité à part). Ce cas n'est pas d'un grand intérêt pour la suite de l'énoncé et notamment pour la question suivante qui vise à établir un équivalent de la suite (h_n) (on peut alors choisir n dans n'importe quel voisinage de $+\infty$).

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- En multipliant membre à membre par $\frac{1}{\ln(n)} > 0$ l'inégalité obtenue en question précédente, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

- Or :

× $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

× $\dfrac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1.$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- On prend garde de choisir initialement un entier $n \geqslant 2$ afin que la quantité $\dfrac{1}{\ln(n)}$ soit bien définie (c'est-à-dire tel que $\ln(n) \neq 0$).
- La propriété : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est classique. Ce premier résultat est parfois complété par une étude permettant d'obtenir le début du développement asymptotique de la série harmonique. Plus précisément, on obtient :
$$h_n \ = \ \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$
où γ ($\simeq 0,577$), appelée constante d'Euler est la limite de la suite $\big(h_n - \ln(n)\big)$.
La démonstration la plus usuelle fait intervenir des suites adjacentes et est donc tout à fait adaptée au programme ECE.

□

2. On pose : $k_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \ \leqslant \ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$.

- Tout d'abord :
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \ = \ \frac{k-(k-1)}{k\,(k-1)} \ = \ \frac{1}{k\,(k-1)}$$
- D'autre part, comme : $k \geqslant (k-1)$, alors : $k^2 \geqslant k\,(k-1)$.
Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$, on obtient :
$$\frac{1}{k^2} \ \leqslant \ \frac{1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \ \frac{1}{k^2} \ \leqslant \ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

□

b) En déduire la majoration : $k_n \leqslant 2$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
$$\forall k \geqslant 2, \ \frac{1}{k^2} \ \leqslant \ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

donc $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{1} - \frac{1}{n}$$ *(par sommation télescopique)*

puis $$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$ *(en ajoutant 1 de part et d'autre)*

enfin $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ k_n \leqslant 2.}$$

□

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-2 \leqslant -k_n \leqslant 0$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n - 2 \leqslant h_n - k_n \leqslant h_n$$

On obtient alors, pour tout $n \geqslant 2$, par multiplication par $\dfrac{1}{\ln(n)} > 0$:

$$\frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{2}{\ln(n)} \leqslant \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{h_n}{\ln(n)}$$

- Or :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1$ car $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} - \dfrac{2}{\ln(n)} = 1 - 0 = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n - k_n}{\ln(n)} = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } h_n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

- En question *2.*, on démontre que la suite (k_n) est négligeable devant (h_n). En effet :
$$\frac{k_n}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k_n}{\ln(n)} = \frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0$$
- Pour aboutir à ce résultat, la question *2.* passe par trois étapes. Ce résultat peut se démontrer de manière plus directe. Notons tout d'abord que la suite (k_n) est la suite des sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. Cette série est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $2 > 1$. On en déduit que la suite (k_n) est convergent. Ainsi :
$$\frac{k_n}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
en tant que quotient du terme général d'une suite de limite finie par celui d'une suite de limite infinie.

□

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

3. ***a)*** Quelle est la loi de I_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues (en l'occurrence les boules de l'urne) numérotées de 1 à n.
- La v.a.r. I_n prend la valeur du numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_n \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).}$$

□

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $\{I_n = 1\}$?

Démonstration.
Si $\{I_n = 1\}$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu la boule numérotée 1 lors du premier tirage (ce qui met fin à l'expérience). La v.a.r. X_n prend alors la valeur 1. On a ainsi :
$$\mathbb{P}_{\{I_n=1\}}\big(\{X_n = 1\}\big) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X_n \text{ sachant } \{I_n = 1\} \text{ est la loi certaine égale à 1.}}$$

□

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :
$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{2, \dots, n\}\,,\ \mathbb{P}_{\{I_n=k\}}(\{X_n = j\}) = \mathbb{P}(\{X_{k-1} = j - 1\})$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$, soit $j \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Si $\{I_n = k\}$ est réalisé, c'est que le premier tirage a fourni la boule numéroté k. On retire alors de l'urne les boules numérotées de k à n.
L'urne contient alors seulement les boules portant les numéros 1 à k.
Dans ce cas, l'événement $\{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est obtenue lors du $(j-1)^{\text{ème}}$ tirage suivant. L'urne contenant les boules numérotées de 1 à $k-1$, on en déduit que l'événement $\{X_n = j\}$ est réalisé si et seulement si $\{X_{k-1} = j - 1\}$ l'est.

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}_{\{I_n=k\}}(\{X_n = j\}) = \mathbb{P}(\{X_{k-1} = j - 1\}).}$$

□

4. a) Quelle est la loi de X_1 ?

Démonstration.

- La v.a.r. X_1 prend la valeur du nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numérotée 1 dans une urne qui contient une seule boule (numérotée 1).
- Ainsi, X_1 est la v.a.r. certaine égale à 1.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1.}}$$

Commentaire

- Il est vivement conseillé de lire très précisément l'énoncé et de bien comprendre les relations de dépendance entre les différents objets introduits. Ici, l'urne U_n est les v.a.r. X_n et I_n sont toutes dépendantes de l'entier n. Cette dépendance est marquée par la présence de n en indice. La v.a.r. X_n est donc égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1, **partant d'une urne contenant de boules numérotées de** 1 **à** n.
- En ce début de partie, on étudie X_n pour les faibles valeurs de n. C'est souvent le cas : les débuts de partie commencent par des questions simples. Il est donc conseillé de ne jamais sauter une partie sans avoir attentivement lu les questions qui la débutent. C'est souvent l'occasion de prendre des points facilement et cela permet généralement de se lancer pour le reste de l'exercice.

□

b) Quel est l'événement $\{X_2 = 1\}$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- L'événement $\{X_2 = 1\}$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est apparue dès le premier tirage, l'expérience s'effectuant dans une urne contenant initialement 2 boules.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \{X_2 = 1\} = \{I_2 = 1\}.}$$

- On a alors :

$$\mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{I_2 = 1\}\big) = \frac{1}{2} \qquad \textit{(car } I_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 2]\!])\textit{)}$$

- D'autre part : $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
  En effet, dans une urne qui ne contient que les boules 1 et 2, la boule numéro 1 est tirée soit lors du 1$^{\text{er}}$ tirage, soit lors du 2$^{\text{ème}}$.
  On en déduit que la famille $\big(\{X_2 = 1\}, \{X_2 = 2\}\big)$ est un système complet d'événements et :

$$\mathbb{P}\big(\{X_2 = 2\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\}\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } X_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 2]\!]).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } X_2 \text{ admet une espérance et une variance.}\\ \text{De plus : } \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_2) = \dfrac{2^2 - 1}{12} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}.\end{array}}$$

□

c) Calculer $\mathbb{P}_{\{I_3=1\}}(\{X_3 = 2\})$, $\mathbb{P}_{\{I_3=2\}}(\{X_3 = 2\})$, $\mathbb{P}_{\{I_3=3\}}(\{X_3 = 2\})$.
Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Si l'événement $\{I_3 = 1\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 1 lors du 1^er^ tirage. Dans ce cas, X_3 prend la valeur 1.

$$\boxed{\mathbb{P}_{\{I_3=1\}}(\{X_3 = 2\}) = 0}$$

- Si l'événement $\{I_3 = 2\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 2 lors du 1^er^ tirage. Dans ce cas, les boules 2 et 3 sont retirées de l'urne qui ne contient plus que la boule numéro 1. Cette boule est donc nécessairement lors du tirage qui suit. L'événement $\{X_3 = 2\}$ est donc réalisé.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{\{I_3=2\}}(\{X_3 = 2\}) = 1.}$$

- Si l'événement $\{I_3 = 3\}$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée 3 lors du 1^er^ tirage. Dans ce cas, la boule 3 est retirée de l'urne qui ne contient plus que les boules numéro 1 et 2. L'événement $\{X_3 = 2\}$ est alors réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est obtenue par tirage dans cette urne.

$$\boxed{\text{Par équiprobabilité, on en déduit : } \mathbb{P}_{\{I_3=3\}}(\{X_3 = 2\}) = \frac{1}{2}.}$$

- D'après la question ***3.a)***, $I_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
La famille $\big(\{I_3 = 1\}, \{I_3 = 2\}, \{I_3 = 3\}\big)$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}\big(\{I_3 = i\} \cap \{X_3 = 2\}\big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}\big(\{I_3 = i\}\big) \times \mathbb{P}_{\{I_3=i\}}\big(\{X_3 = 2\}\big) & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,3]\!], \\
& & & \mathbb{P}\big(\{I_3 = i\}\big) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{\{I_3=i\}}\big(\{X_3 = 2\}\big) & \textit{(car } I_3 \sim \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)} \\
& = & \frac{1}{3} \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}_{\{I_3=i\}}\big(\{X_3 = 2\}\big) & \\
& = & \frac{1}{3} \left(0 + 1 + \frac{1}{2}\right) \ = \ \frac{1}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) = \frac{1}{2}.}$$

- Par ailleurs, on démontre comme en question ***4.b)*** :

$$\{X_3 = 1\} \ = \ \{I_3 = 1\}$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big(\{X_3 = 1\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{I_3 = 1\}\big) \ = \ \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_3 = 1\}\big) \ = \ \frac{1}{3}}$$

- Remarquons alors : $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

En effet, dans une urne contenant initialement les boules numéro 1, 2 et 3, la boule numéro 1 peut être tirée lors du 1^er^, 2^ème^ ou 3^ème^ tirage (c'est le cas si on obtient d'abord la boule 3, puis la 2, puis la 1).

On en déduit que la famille $\big(\{I_3 = 1\}, \{I_3 = 2\}, \{I_3 = 3\}\big)$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\big(\{X_3 = 1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{X_3 = 2\}\big) \;=\; 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) \;=\; \frac{1}{6}}$$

- La v.a.r. X_3 est finie. Elle admet donc une espérance et une variance. De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3) &= \sum_{i=1}^{3} i\ \mathbb{P}\big(\{X_3 = i\}\big) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} \;=\; \frac{11}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \frac{11}{6}}$$

- Et, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(X_3^2\Big) &= \sum_{i=1}^{3} i^2\ \mathbb{P}\big(\{X_3 = i\}\big) \\ &= 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{2} \;=\; \frac{23}{6}\end{aligned}$$

Enfin, par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X_3) \;=\; \mathbb{E}\Big(X_3^2\Big) - \Big(\mathbb{E}(X_3)\Big)^2 \;=\; \frac{23}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 \;=\; \frac{23 \times 6 - 11^2}{36} \;=\; \frac{138 - 121}{36} \;=\; \frac{17}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_3) = \frac{17}{36}}$$

□

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3).
Seulement pour les cubes : En déduire la covariance du couple (I_3, X_3).
Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après les questions précédentes : $I_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$ et $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
- Soit $k \in [\![1, 3]\!]$ et soit $j \in [\![1, 3]\!]$.
  Plusieurs cas se présentent alors :
  × si $j = 1$,

	L'événément $\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 1\}$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $\{I_3 = k\}$ est réalisé	et	l'événement $\{X_3 = 1\}$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	La boule numéro k est obtenue au 1^{er} tirage	et	la boule numéro 1 est obtenue au 1^{er} tirage

Ainsi, si $k \neq 1$ alors : $\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 1\} = \varnothing$ et $\mathbb{P}\big(\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 1\}\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
Si $k = 1$ alors : $\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 1\} = \{I_3 = 1\} \cap \{X_3 = 1\} = \{X_3 = 1\}$ et :

$$\mathbb{P}\big(\{I_3 = 1\} \cap \{X_3 = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_3 = 1\}\big) = \frac{1}{3}$$

× si $j = 3$, on a de même :

L'événément $\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 3\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ La boule numéro k est obtenue au 1^er^ tirage et la boule numéro 1 est obtenue au 3^ème^ tirage

Or, étant donnée l'expérience, la boule numéro 1 n'est obtenue au 3^ème^ tirage que si la boule 3 est obtenue au 1^er^ tirage (et la boule 2 est obtenue au 2^ème^ tirage).
Ainsi, si $k \neq 3$ alors : $\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 3\} = \varnothing$ et $\mathbb{P}\big(\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 3\}\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
Si $k = 3$ alors : $\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = 3\} = \{I_3 = 3\} \cap \{X_3 = 3\} = \{X_3 = 3\}$ et :

$$\mathbb{P}\big(\{I_3 = 3\} \cap \{X_3 = 3\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_3 = 3\}\big) = \frac{1}{6}$$

× si $j = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\{I_3 = k\} \cap \{X_3 = j\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{I_3 = k\}\big)\, \mathbb{P}_{\{I_3=k\}}\big(\{X_3 = j\}\big) \\ &= \frac{1}{3}\, \mathbb{P}_{\{I_3=k\}}\big(\{X_3 = j\}\big) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } k = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } k = 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(d'après la question précédente)

- On peut résumer la loi du couple (I_3, X_3) par le tableau à double entrée suivant :

$k \in I_3(\Omega)$ \ $j \in X_3(\Omega)$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$

- Comme I_3 et X_3 sont des v.a.r. finies, la v.a.r. $I_3\, X_3$ admet une espérance.

De plus, d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(I_3\, X_3\big) &= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} k\, j\ \mathbb{P}\big(\, \{I_3 = k\}\ \cap\ \{X_3 = j\}\,\big) \right) \\
&= \quad (1 \times 1)\ \mathbb{P}\big(\, \{I_3 = 1\} \cap \{X_3 = 1\}\,\big) \\
&\quad + \ (2 \times 2)\ \mathbb{P}\big(\, \{I_3 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}\,\big) \qquad \textit{(car toutes les autres probabilités sont nulles)} \\
&\quad + \ (2 \times 3)\ \mathbb{P}\big(\, \{I_3 = 2\} \cap \{X_3 = 3\}\,\big) \\
&\quad + \ (3 \times 3)\ \mathbb{P}\big(\, \{I_3 = 3\} \cap \{X_3 = 3\}\,\big) \\
&= 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{3} + 1 + \frac{9}{6} \ = \ \frac{10+6+9}{6} \ = \ \frac{25}{6}
\end{aligned}$$

On obtient alors, par définition :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(I_3, X_3) &= \mathbb{E}\big(I_3\, X_3\big) - \mathbb{E}(I_3) \times \mathbb{E}(X_3) \\
&= \frac{25}{6} - \frac{3+1}{2} \times \frac{11}{6} \qquad \textit{(car } I_3 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket) \textit{ et d'après la question } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)} \\
&= \frac{25}{6} - \frac{22}{6} \ = \ \frac{3}{5} \ = \ \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Cov}(I_3, X_3) \neq 0$, on en conclut que les v.a.r. I_3 et X_3 ne sont pas indépendantes.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que si les v.a.r. X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 alors on a :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0}$$

  En particulier, on obtient, par contraposée, un résultat permettant de démontrer que deux v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

- Rappelons au passage que ce résultat `N'EST PAS` une équivalence.
  Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :
  × qui ne sont pas indépendantes,
  × qui vérifient $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- L'énoncé propose d'utiliser la propriété précédente pour conclure. Cependant, on aurait aussi pu démontrer la non indépendance en remarquant par exemple :

$$\underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big(\, \{I_3 = 1\} \cap \{X_3 = 3\}\,\big)}} \ \neq \ \underset{\displaystyle \frac{1}{3}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big(\, \{I_3 = 1\}\,\big)}} \ \times \ \underset{\displaystyle \frac{1}{6}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big(\, \{X_3 = 3\}\,\big)}}$$

□

5. a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

Démonstration.

- La v.a.r. prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la boule numéro 1 à l'issue de l'expérience effectuée dans l'urne U_n.
- L'urne contenant initialement n boules, on effectue au plus n tirages. La v.a.r. X_n prend pour valeur le rang d'apparition d'une boule, c'est-à-dire le numéro d'un tirage.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X_n \text{ prend ses valeurs dans } [\![1, n]\!].}$$ □

Commentaire

- On demande de démontrer que X_n prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
  Il s'agit donc de démontrer : $X_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ et non pas : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
  Cette deuxième propriété peut se démontrer par récurrence.
  On détaille ci-dessous la rédaction attendue.
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
  - **Initialisation** :
    D'après la question ***4.a)*** : $X_1(\Omega) = \{1\}$.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$).
    On condière l'urne U_{n+1}. Deux cas se présentent.
    × si le premier tirage fournit la boule numéro 1 alors X_{n+1} prend la valeur 1.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \{1\} \subset X_{n+1}(\Omega).}$$

Commentaire

(suite de la remarque précédente)

× sinon, l'expérience se poursuit. En particulier, si le premier tirage a fourni la boule $n+1$, les tirages suivants sont effectués dans l'urne U_n qui contient les boules numérotées de 1 à n. Dans ce cas, X_{n+1} prend la valeur prise par X_n incrémentée de 1 (puisqu'un premier tirage a déjà eu lieu).
Or, par hypothèse de récurrence : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [\![2, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega).}$$

Finalement, on a démontré : $[\![1, n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega)$.
Enfin : $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$ car la v.a.r. X_{n+1} prend pour valeur le numéro d'un tirage (celui où la boule 1 apparaît) dans une expérience qui en compte au plus $n+1$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$

b) Déterminer $\mathbb{P}(\{X_n = 1\})$ et $\mathbb{P}(\{X_n = n\})$.

Démonstration.

- L'événement $\{X_n = 1\}$ est réalisé si et seulement si la boule numéro 1 est apparue lors du premier tirage lors de l'expérience réalisée dans l'urne U_n. Ainsi :

$$\{X_n = 1\} = \{I_n = 1\}$$

$$\boxed{\text{En particulier : } \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{I_n = 1\}\big) = \frac{1}{n}.}$$

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « obtenir la boule numéro $n+1-i$ lors du $i^{\text{ème}}$ tirage (lors de l'expérience débutant dans l'urne U_n) ».

  L'événement $\{X_n = n\}$ est réalisé si et seulement si n tirages sont nécessaires pour obtenir la boule numéro 1. Cela se produit si et seulement si :

  × le 1^{er} tirage fournit la boule n. Ainsi, l'événement A_1 est réalisé.

  × le $2^{\text{ème}}$ tirage fournit la boule $n-1$. Ainsi, l'événement A_2 est réalisé.

  × ...

  × le $n^{\text{ème}}$ tirage fournit la boule 1 (ce qui met fin à l'expérience).
  Ainsi, l'événement A_n.

  On en déduit :

$$\{X_n = n\} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

  En particulier :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\Big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(A_1\big) \times \mathbb{P}_{A_1}\big(A_2\big) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}\big(A_n\big) & \textit{(d'après la formule des probabilités composées et car : } \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1} \times \ldots \times \dfrac{1}{1} \ = \ \dfrac{1}{n!} & (*) \end{array}$$

- Il reste à démontrer : $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}\big(A_i\big) = \dfrac{1}{i}$.
  Soit $i \in [\![2, n]\!]$.
  Si l'événément $A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}$ est réalisé, c'est que les boules n, $n-1$, ..., $n-(i-1)$ sont sorties successivement dans cet ordre. À l'issue de chacun de ces tirages, seul la boule tirée a été retirée de l'urne (car on a tiré à chacune de ces étapes le plus grand numéro de l'urne). Ainsi, avant de procéder au $i^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est constituée des boules numérotées de 1 à i.
  Les boules étant tirées de manière équiprobable, on en conclut :

$$\mathbb{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}}\big(A_i\big) = \frac{1}{i}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien démontré : } \mathbb{P}\big(\{X_n = n\}\big) = \frac{1}{n!}.}$$ □

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}(\{X_n = j\}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{X_k = j-1\})$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $j \geqslant 2$.
La famille $\big(\{I_n = k\}\big)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{I_n = k\} \cap \{X_n = j\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{I_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{I_n=k\}}\big(\{X_n = j\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{I_n = 1\}\big) \times \mathbb{P}_{\{I_n=1\}}\big(\{X_n = j\}\big) + \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\{I_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{I_n=k\}}\big(\{X_n = j\}\big) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\{I_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{I_n=k\}}\big(\{X_n = j\}\big) && \textit{(car d'après la } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{, si } j \neq 1 \textit{ alors } \mathbb{P}_{\{I_n=1\}}\big(\{X_n = j\}\big) = 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}\big(\{I_n = k\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_{k-1} = j-1\}\big) && \textit{(en utilisant la } \textbf{\textit{3.c)}} \textit{ avec } n \geqslant 2,\ j \geqslant 2 \textit{ et } k \geqslant 2\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{I_n = k+1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_k = j-1\}\big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{X_k = j-1\}\big) && \textit{(car } I_n \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}(\{X_n = j\}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{X_k = j-1\}).}$$

□

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\,\mathbb{P}(\{X_n = j\}) - (n-1)\,\mathbb{P}(\{X_{n-1} = j\})$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\{X_n = j\}) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}(\{X_{n-1} = j\}) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(\{X_{n-1} = j-1\})$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$ et soit $j \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& n\ \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) \\
= \ & \cancel{n} \left(\frac{1}{\cancel{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_k = j-1\}\big)\right) - \cancel{(n-1)} \left(\frac{1}{\cancel{n-1}} \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\big(\{X_k = j-1\}\big)\right) && \textit{(d'après la question précédente avec } n-1 \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 2\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \forall j \geqslant 2,\ \ n\ \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) - (n-1)\ \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big)}$$

- On en déduit alors, pour les mêmes valeurs de n et j :

$$n\ \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) = (n-1)\ \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big)$$

et ainsi $$\mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \forall j \geqslant 2,\ \ \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n}\ \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big)}$$

Il reste alors à vérifier cette propriété lorsque $n = 2$ et pour j variant dans $\mathbb{N}^*$.

- Notons $n = 2$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord :

$$\frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j\}\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j-1\}\big)$$

Deux cas se présentent alors.

× Si $j \geqslant 3$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $\{X_1 = j\} = \varnothing$ et $\{X_1 = j-1\} = \varnothing$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j\}\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j-1\}\big) \;=\; 0$$

De même, comme $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$, alors $\{X_2 = j\} = \varnothing$ et :

$$\mathbb{P}\big(\{X_2 = j\}\big) = 0$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j \geqslant 3.}$$

× Si $j = 2$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $\{X_1 = j\} = \varnothing$ et $\{X_1 = j-1\} = \{X_1 = 1\} = \Omega$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j\}\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j-1\}\big) \;=\; \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 \;=\; \frac{1}{2}$$

D'autre part, d'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}\big(\{X_2 = 2\}\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j = 2.}$$

× Si $j = 1$, comme $X_1(\Omega) = \{1\}$ alors $\{X_1 = j\} = \{X_1 = 1\} = \Omega$
et $\{X_1 = j-1\} = \{X_1 = 0\} = \varnothing$. Ainsi :

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j\}\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{X_1 = j-1\}\big) \;=\; \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 \;=\; \frac{1}{2}$$

D'autre part, d'après la question ***4.b)*** :

$$\mathbb{P}\big(\{X_2 = 1\}\big) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La propriété est vraie pour } n = 2 \text{ et } j = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \forall j \geqslant 1,\ \ \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big).}$$

□

6. a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant ***5.d)*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
Les v.a.r. X_{n-1} et X_n sont finies. Elles admettent donc une espérance. De plus :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{E}(X_n) & \\
= & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \; \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) & \\
= & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \; \left(\frac{n-1}{n} \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n} \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big)\right) & \textit{(d'après la question précédente avec } n \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} j \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big) & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} j \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j-1\}\big) & \textit{(car } \{X_{n-1} = n\} = \varnothing \textit{ et } \{X_{n-1} = 0\} = \varnothing\textit{)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1) \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \; \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \; \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\{X_{n-1} = j\}\big) & \textit{(par définition de } \mathbb{E}(X_{n-1}) \textit{ et linéarité de la somme)} \\
= & \displaystyle\frac{n-1}{n} \; \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \; \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \times 1 & \textit{(car } \big(\{X_{n-1} = j\}\big)_{j \in [\![1,n-1]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
= & \displaystyle\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \; \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$

□

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \geqslant 2, \; \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1}) \;=\; \frac{1}{k}$$

- En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n :

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1})\big) & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1) & & h_n - 1 \quad \textit{(par télescopage)}
\end{array}$$

Enfin, comme $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(1) = 1$, on obtient : $\mathbb{E}(X_n) = h_n - 1 + 1 = h_n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \geqslant 2, \; \mathbb{E}(X_n) = h_n \text{ et, d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}}, \text{ on a : } \mathbb{E}(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

7. a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big)$ et de $\mathbb{E}\big(X_{n-1}\big)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.
Les v.a.r. X_{n-1} et X_n sont finies. Elles admettent donc une variance. De plus :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\big(X_n^2\big) \\
= \ & \sum_{j=1}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_n = j\right\}\big) && \textit{(par théorème de transfert)} \\
= \ & \sum_{j=1}^{n} j^2 \ \left(\frac{n-1}{n} \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) + \frac{1}{n} \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j-1\right\}\big)\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.d)}} \textit{ avec } n \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j-1\right\}\big) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} j^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j-1\right\}\big) && \textit{(car } \{X_{n-1} = n\} = \varnothing \textit{ et } \{X_{n-1} = 0\} = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \frac{n-1}{n} \ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) && \textit{(par définition de } \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) \textit{ et linéarité de la somme)} \\
& + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \ \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big) \\
= \ & \frac{n-1}{n} \ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{1}{n} \ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} && \textit{(car } \big(\left\{X_{n-1} = j\right\}\big)_{j \in [\![1,n-1]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)} \\
= \ & \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{V}(X_n) \\
= \ & \mathbb{E}\big(X_n^2\big) - \big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 && \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\
= \ & \left(\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \frac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\right) - \left(\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\right)^2 && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{6.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\
= \ & \left(\mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) + \cancel{\frac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1})} + \frac{1}{n}\right) - \left(\big(\mathbb{E}(X_{n-1})\big)^2 + \cancel{\frac{2}{n} \ \mathbb{E}(X_{n-1})} + \frac{1}{n^2}\right) \\
= \ & \mathbb{E}\big(X_{n-1}^2\big) - \big(\mathbb{E}(X_{n-1})\big)^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\
= \ & \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} && \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

- On a ainsi :

$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1}) \ = \ \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

- En sommant les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n :

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k=2}^{n} \big(\mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1})\big) & = & \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{V}(X_n) - \mathbb{V}(X_1) & & \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \end{array} \quad \textit{(par linéarité de la somme)}$$

Enfin, comme $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(1) = 0$, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_n) \ = \ (h_n - 1) - (k_n - 1) \ = \ h_n - k_n$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n.}$$

□

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.
D'après la question ***2.c)*** : $h_n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente : } \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

Il est à noter que, dans la question précédente, le résultat est donné par l'énoncé. Il ne s'agit pas de déterminer l'expression de $\mathbb{V}(X_n)$ mais de démontrer l'égalité $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$. La question ***7.c)*** peut donc être traitée sans avoir fait la ***7.b)***. Finalement, Cette question est à concevoir comme une question bonus pour les candidats qui ont réussi à traiter la question ***2.c)*** car c'est l'unique résultat exigé pour répondre à la question.

□

8. Soit $(T_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose :

$$S_n \ = \ \sum_{i=1}^{n} T_i \ = \ T_1 + \cdots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

Démonstration.

- Par définition la v.a.r. T_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre 1.
  Autrement dit, la loi de T_1 est définie par :

$$\mathbb{P}\big(\{T_1 = 0\}\big) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(\{T_1 = 1\}\big) = 1$$

- Or, on a démontré que la v.a.r. X_1 suit la loi certaine égale à 1. On a donc aussi :

$$\mathbb{P}\big(\{X_1 = 0\}\big) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big(\{X_1 = 1\}\big) = 1$$

Les v.a.r. X_1 et T_1 ont même loi.

Commentaire

- La loi $\mathcal{B}(p)$ est souvent seuelement définie avec $p \in]0,1[$, excluant ainsi les cas $p = 0$ et $p = 1$. La raison est la suivante :
  - × on préfére dire qu'une v.a.r. X est presque certainement égale à 1 plutôt que de dire qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre 1.
  - × on préfére dire qu'une v.a.r. X est presque certainement égale à 0 plutôt que de dire qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre 0.
- Dans l'énoncé, on fait le choix de considérer la loi $\mathcal{B}(1)$ ce qui permet d'assurer l'homogénéité des définitions des v.a.r. $T_1, \ldots, T_n$. □

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}(\{S_n = j\}) \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(\{S_{n-1} = j-1\}) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}(\{S_{n-1} = j\})$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$ et soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $T_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$, on a : $T_n(\Omega) = \{0,1\}$.
  Ainsi, la famille $\big(\{T_n = 0\}, \{T_n = 1\}\big)$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{S_n = j\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{T_n = 0\} \cap \{S_n = j\}\big) \;+\; \mathbb{P}\big(\{T_n = 1\} \cap \{S_n = j\}\big) \\
&= \mathbb{P}\left(\{T_n = 0\} \cap \left\{\sum_{i=1}^{n} T_i = j\right\}\right) \;+\; \mathbb{P}\left(\{T_n = 1\} \cap \left\{\sum_{i=1}^{n} T_i = j\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{T_n = 0\} \cap \left\{\sum_{i=1}^{n-1} T_i = j\right\}\right) \;+\; \mathbb{P}\left(\{T_n = 1\} \cap \left\{\sum_{i=1}^{n-1} T_i = j-1\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\big(\{T_n = 0\} \cap \{S_{n-1} = j\}\big) \;+\; \mathbb{P}\big(\{T_n = 1\} \cap \{S_{n-1} = j-1\}\big)
\end{aligned}$$

- Les v.a.r. $T_1, \ldots, T_n$ sont mutuellement indépendantes. On en déduit, par le lemme des coalitions, que les v.a.r. T_n et $S_{n-1} = T_1 + \ldots + T_{n-1}$ sont indépendantes.
  Ainsi, en reprenant le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{S_n = j\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{T_n = 0\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{S_{n-1} = j\}\big) \;+\; \mathbb{P}\big(\{T_n = 1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{S_{n-1} = j-1\}\big) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{S_{n-1} = j\}\big) \;+\; \frac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{S_{n-1} = j-1\}\big) \qquad \textit{(car } T_n \sim \mathcal{B}\left(\tfrac{1}{n}\right)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{S_n = j\}\big) = \frac{n-1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{S_{n-1} = j\}\big) \;+\; \frac{1}{n} \times \mathbb{P}\big(\{S_{n-1} = j-1\}\big)}$$

- Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: X_n et S_n ont même loi.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'après la question ***8.a)***, X_1 et $T_1 = S_1$ ont même loi.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (X_{n+1} et S_{n+1} ont même loi).

– D'après la question ***5.a)***, $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$.
D'autre part, comme $T_1(\Omega) = \ldots = T_n(\Omega) = \{0,1\}$, on a : $S_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.

– Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = j\}\big) & = & \dfrac{n}{n+1}\, \mathbb{P}\big(\{S_n = j\}\big) + \dfrac{1}{n+1}\, \mathbb{P}\big(\{S_n = j-1\}\big) & \textit{(d'après ce qui précéde avec } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{n+1}\, \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) + \dfrac{1}{n+1}\, \mathbb{P}\big(\{X_n = j-1\}\big) & \textit{(car, par hypothèse de récurrence, } X_n \textit{ et } S_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.d)}} \textit{ avec } n+1 \geqslant 2 \textit{ et } j \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = j\}\big).}$$

– Remarquons enfin que l'événement S_{n+1} prend la valeur 0 si et seulement si les v.a.r. T_1, …, T_{n+1} prennent toutes la valeur 0. On en déduit :

$$\begin{array}{rrcll} & \{S_{n+1} = 0\} & = & \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \{T_i = 0\} & \\ \text{et ainsi} & \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = 0\}\big) & = & \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \{T_i = 0\}\right) & \\ & & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{T_i = 0\}\big) & \textit{(car les v.a.r. } T_1, \ldots, T_{n+1} \textit{ sont indépendantes)} \\ & & = & 0 \times \dfrac{1}{2} \times \ldots \times \dfrac{n}{n+1} & \textit{(car : } \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ T_i \sim \mathcal{B}(i)\textit{)} \\ & & = & 0 & \end{array}$$

Enfin, comme $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![1, n+1]\!]$ alors : $\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 0\}\big) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = 0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} = 0\}\big)}$$

Ainsi S_{n+1} et X_{n+1} ont même loi. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n).}$$ □

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. S_n admet une espérance (respectivement une variance) comme somme des v.a.r. T_1, …, T_n qui admettent toutes une espérance (respectivement une variance).

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} && \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ T_i \sim \mathcal{B}\left(\tfrac{1}{i}\right)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = h_n}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i) && \textit{(car les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \times \left(1 - \frac{1}{i}\right) && \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ T_i \sim \mathcal{B}\left(\tfrac{1}{i}\right)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} && \textit{(par linéarité de la somme)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{V}(S_n) = h_n - k_n}$$

- Enfin, comme les v.a.r. S_n et X_n ont même loi, elles ont même espérance et même variance.

$$\boxed{\text{On retrouve bien, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{E}(X_n) = h_n \text{ et } \mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n.}$$ □

Exercice : ESCP 2004

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes B_1, B_2, …, B_{10}. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Commentaire

Il est vivement conseillé de prendre le temps de comprendre précisément l'expérience aléatoire. Un défaut de compréhension aura en effet des répercussions importantes sur le reste du problème. Le contenu initial de l'urne est une donnée primordiale. Il est précisé de manière très explicite que l'urne contient 10 boules. Le rôle de l'entier r est par contre beaucoup moins clair. Il faut comprendre que parmi les 10 boules de l'urne, on en distingue r. Plus précisément, les boules B_1, …, B_r sont considérés comme différentes (on aurait pu les choisir d'une autre couleur par exemple) des boules B_{r+1}, …, B_{10}.

Partie I : Étude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, … , B_r

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, … , B_r définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Par définition, Y_1 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule B_1.
  × L'expérience consiste en une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (tirage d'une boule dans l'urne) indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{1}{10}$ (probabilité d'obtenir la boule B_1).
  × La v.a.r. Y_1 est le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y_1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right).}$$

Commentaire

- Même si cela n'est pas explicitement supposé dans l'énoncé, on fait ici l'hypothèse que les tirages sont indépendants. Il est à noter que les tirages se font avec remise. Ainsi, la composition de l'urne n'est pas modifiée au cours des tirages. Il est alors raisonnable de penser que la probabilité de tirer une boule lors d'un tirage ne dépend pas des résultats des autres tirages.
- Le fait que la composition de l'urne reste inchangée tout au long de l'expérience permet de démontrer que la probabilité de tirer la boule B_1 est de $\frac{1}{10}$ à chaque tirage. Par contre, lorsque les tirages s'effectuent sans remise, l'expérience consiste toujours en une succession d'épreuves de Bernoulli mais celles-ci ont des paramètres de succès différents.
- En cas d'absence de remise, il est naturel de conditionner par des événements permettant de préciser le contenu de l'urne avant que le tirage n'ait lieu. Cela nous amène généralement à l'utilisation de la formule des probabilités composées ainsi qu'à celle des probabilités totales.

- Comme $Y_1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$, alors Y_1 admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y_1) = \frac{1-\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{9}{10} \times 100 = 90$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_1) = 10 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_1) = 90}$$

□

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules B_1, B_2, …, B_r sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

Démonstration.

- Tout d'abord, notons A l'événement « les r boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages ».
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
  On a alors :

$$A = \{T_1 = 1\} \cap \{T_2 = 2\} \cap \ldots \cap \{T_r = r\}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big(\{T_1 = 1\} \cap \{T_2 = 2\} \cap \ldots \cap \{T_r = r\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{T_1 = 1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{T_2 = 2\}\big) \times \ldots \times \mathbb{P}\big(\{T_r = r\}\big) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \ldots \times \frac{1}{10} && \textit{(car chaque boule a la même probabilité d'apparaître)} \\
&= \left(\frac{1}{10}\right)^r
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{10}\right)^r}$$

Commentaire

- On a introduit dans cette question des v.a.r. T_i.
  On aurait aussi pu introduire, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![1, r]\!]$ l'événement :
  $$A_i^j : \text{« la boule } B_j \text{ a été tirée lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$
  Dans ce cas : $A = A_1^1 \cap \ldots \cap A_r^r$.
- Il était aussi possible d'introduire, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ l'événement :
  $$C_j : \text{« la boule } B_j \text{ a été tirée lors du } j^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$
  Dans ce cas : $A = B_1 \cap \ldots \cap B_r$.
- Ce dernier choix est certainement le plus adapté à la question posée. Les autres permettent l'introduction de v.a.r. ou événements plus généraux qui pourront être utilisés dans d'autres questions de l'énoncé.

Commentaire

- Il était enfin possible de traiter cette question par dénombrement. On considère alors que l'expérience consiste à effectuer r tirages successifs et avec remise dans l'urne contenant initialement 10 boules.
  - × Dans ce cas, Ω_1 (l'univers des possibles de l'expérience ci-dessus) est l'ensemble des r-uplets de l'ensemble $\mathscr{B} = [\![1, 10]\!]$ des boules.
    (ici la boule est désignée par son numéro mais on pourrait aussi considérer l'ensemble des boules sous la forme $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_{10}\}$)
    Ainsi : $\text{Card}(\Omega_1) = 10^r$.
  - × Comme Ω_1 est un ensemble fini, on choisit comme tribu $\mathscr{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$.
  - × Enfin, on munit $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}_1$ (chaque r-tirage a même probabilité d'appraître).

  Le seul r-tirage qui réalise l'événement A est : $(1, 2, \ldots, r)$.
  Autrement dit : $A = \{(1, 2, \ldots, r)\}$. On en déduit :
  $$\mathbb{P}_1(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega_1)} = \frac{1}{10^r}$$

□

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}\big(\{Y_r = r\}\big)$.

Démonstration.

- L'événement $\{Y_r = r\}$ est réalisé si et seulement si il a fallu attendre r tirages pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, ..., B_r.
  Autrement dit, cet événement est réalisé si et seulement si on obtient exactement une fois chacune des boules B_1, ..., B_r lors des r premiers tirages.
- Ainsi, l'événement $\{Y_r = r\}$ est réalisé par tous les r-tirages qui contiennent chaque nombre de $[\![1, r]\!]$. Un tel r-tirage est entièrement déterminé par :
  - × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : r possibilités.
  - × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position, différent du numéro précédent : $r-1$ possibilités.
  - × ...
  - × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $r^{\text{ème}}$ position, différent des numéros précédents : 1 possibilité.

  Il y a donc $r \times (r-1) \times \ldots \times 1 = r!$ tels r-tirages.
  (chacun de ces r-tirage n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $[\![1, r]\!]$)
- Chacun de ces r-tirages a la même probabilité d'apparaître puisque l'ordre dans lequel les boules B_1, ..., B_r n'a pas d'influence sur le résultat.
  Par exemple :

$$\mathbb{P}\big(\{T_1 = 1\} \cap \{T_2 = 2\} \cap \ldots \cap \{T_r = r\}\big) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big(\{T_1 = r\} \cap \{T_2 = r-1\} \cap \ldots \cap \{T_r = 1\}\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\big(\{Y_r = r\}\big) = r! \times \mathbb{P}(A) = \frac{r!}{10^r}.}$$

Commentaire

- Il était possible de traiter entièrement cette question par dénombrement. On a déterminé le nombre de r-tirages réalisant l'événement considéré. Or, il y a 10^r r-tirages en tout.
  On en conclut, en reprenant les notations de la question précédente :
$$\mathbb{P}\big(\{Y_r = r\}\big) \;=\; \frac{\text{Card}\big(\{Y_r = r\}\big)}{\text{Card}(\Omega_1)} \;=\; \frac{r!}{10^r}$$
- Il était aussi possible, mais plus technique, en opérant par décomposition d'événements. Notons $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1, r]\!]$. Alors :
$$\{Y_r = r\} \;=\; \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \Big(\bigcap_{i=1}^{r} \{T_i = \sigma(i)\} \Big)$$
  Et ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Y_r = r\}\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \Big(\bigcap_{i=1}^{r} \{T_i = \sigma(i)\} \Big)\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{T_i = \sigma(i)\} \right) && \textit{(car les événements de la famille } \Big(\bigcap_{i=1}^{r} \{T_i = \sigma(i)\}\Big)_{\sigma\in\mathcal{S}_r} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}\big(\{T_i = \sigma(i)\}\big) \right) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{10} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\frac{1}{10}\right)^r \;=\; r! \times \left(\frac{1}{10}\right)^r && \textit{(car } \text{Card}\big(\mathcal{S}_r\big) = r!\textit{)}
\end{aligned}$$

□

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

Démonstration.

- Il faut au minimum r tirages pour obtenir au moins une fois chacune des r boules $B_1, \ldots, B_r$.
$$\boxed{Y_r(\Omega) \;\subset\; [\![r, +\infty[\![}$$
- De plus, n'importe quelle valeur $i \in [\![r, +\infty[\![$ peut être atteinte par Y_r. Démontrons-le.
  Soit $i \in [\![r, +\infty[\![$. Considérons par exemple l'∞-tirage ω défini par :
$$\omega = (1, 2, \ldots, r-1, r-1, \ldots, r-1, r, \ldots)$$
  Ce tirage apparaît si l'on tire les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ dans cet ordre, suivi du tirage répété de la boule B_{r-1} jusqu'au $i^{\text{ème}}$ tirage où la boule B_r est tirée. Cet ∞-tirage ω réalise l'événement $\{Y_r = i\}$ (ce qui démontre que Y_r peut prendre la valeur i).

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des valeurs que peut prendre } Y_r \text{ est } Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![.}$$

□

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$). On pose :

$$\begin{cases} X_1 = W_1 \\ \forall i \in [\![2, r]\!], \ X_i = W_i - W_{i-1} \end{cases}$$

On admet que les variables aléatoires X_1, ..., X_r sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires X_1, ..., X_r.

Démonstration.

- Par définition :

$$\forall i \in [\![2, r]\!], \ X_i = W_i - W_{i-1}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{r} X_i &= \sum_{i=2}^{r} \big(W_i - W_{i-1}\big) \\ &= W_r - W_1 && \text{\textit{(par télescopage)}} \\ &= W_r - X_1 && \text{\textit{(car } X_1 = W_1\text{)}} \\ &= Y_r - X_1 && \text{\textit{(car } Y_r = W_r\text{)}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_r = X_1 + \sum_{i=2}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r} X_i.}$$

□

b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, r]\!]$.

- La v.a.r. W_i prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour qu'on ait obtenu, pour la première fois, i boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.
- Comme $X_i = W_i - W_{i-1}$, la v.a.r. a donc pour valeur la différence entre :
  - × le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de i boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.

  et × le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de $(i-1)$ boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.

Ainsi, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, la v.a.r. X_i est donc le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de $i-1$ boules distinctes parmi B_1, ..., B_r et la première obtention de i boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.

- Par définition, $X_1 = W_1$.

La v.a.r. X_1 est donc le nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, une des boules B_1, ..., B_r.

Commentaire

La première définition est en réalité aussi adaptée pour le cas $i = 1$. On peut en effet considérer que la v.a.r. X_1 est le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de 0 boule parmi B_1, ..., B_r (sous-entendu ce qu'on a avant le premier tirage) et la première obtention d'une boule B_1, ..., B_r. On retrouve ainsi que X_1 est la v.a.r. qui donne le nombre de tirages nécessaires à la première obtention d'une boule parmi B_1, ..., B_r. □

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
D'après la question précèdente, X_i est la v.a.r. qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de $i-1$ boules distinctes parmi B_1, ..., B_r et la première obtention de i boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.

- L'expérience consiste en une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (tirage d'une boule dans l'urne) indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{r-(i-1)}{10}$ (probabilité d'obtenir, dans l'urne contenant 10 boules, une boule qui est une des boules B_1, ..., B_r mais qui n'est pas une des $i-1$ boules distinctes parmi B_1, ..., B_r déjà obtenue au moins une fois).
- La v.a.r. X_i est le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_i \sim \mathcal{G}\left(\frac{r-i+1}{10}\right).}$$

- Comme $X_i \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{r-i+1}{10}\right)$, alors X_i admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\frac{r-i+1}{10}} = \frac{10}{r-i+1}$$

$$\mathbb{V}(X_i) = \frac{1-\frac{r-i+1}{10}}{\left(\frac{r-i+1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{10-(r-i+1)}{10}}{\frac{(r-i+1)^2}{10^2}} = \frac{10-(r-i+1)}{\cancel{10}} \times \frac{10^{\cancel{2}}}{(r-i+1)^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } i \in [\![1, r]\!],\ \mathbb{E}(X_i) = \frac{10}{r-i+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = 10\ \frac{10-(r-i+1)}{(r-i+1)^2}.}$$

□

d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

Démonstration.

- D'après la question **3.a)**, $Y_r = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$. La v.a.r. Y_r admet une variance (et donc une espérance) comme somme de v.a.r. qui admettent chacune une variance (et donc une espérance).
- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_r) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{E}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{10}{r-i+1} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \frac{10}{j} && \textit{(à l'aide du changement d'indice } j = r+1-i\textit{)} \\
&= 10\ S_1(r)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_r) = 10\ S_1(r)}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y_r) &= \mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(X_i) && \textit{(car, d'après l'énoncé, les v.a.r. de la famille } (X_i)_{i\in[\![1,r]\!]} \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{r} 10 \times \frac{10-(r-i+1)}{(r-i+1)^2} \\
&= 10 \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{10}{(r-i+1)^2} - \frac{\cancel{r-i+1}}{(r-i+1)^{\cancel{2}}}\right) \\
&= 10 \left(10 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(r-i+1)^2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r-i+1}\right) \\
&= 10 \left(10 \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j}\right) && \textit{(à l'aide du changement d'indice } j = r+1-i\textit{)} \\
&= 100\, S_2\,(r) - 10 S_1\,(r)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y_r) = 100\ S_2(r) - 10\ S_1(r).}$$

Commentaire

Le changement d'indice $j = r+1-i$ n'est rien d'autre qu'une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r+1-i} &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j}
\end{aligned}$$

□

4. ***a)*** Si k est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ et en déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{rcccccl}
 & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 & \\
\text{donc} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{t} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} & \textit{(par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le minimum de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est } \frac{1}{k+1} \text{ et son maximum est } \frac{1}{k} \text{ sur } [k, k+1].}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\, \dfrac{1}{k} & & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & & \big((k+1)-k\big)\, \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \ \frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \ \leqslant \ \frac{1}{k}.}$$

Commentaire

- Il faut noter que les intégrales en présence sont bien définies.
  En effet, les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{k}$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{k+1}$ sont continues sur le **segment** $[k, k+1]$.
- Il est important de noter que l'argument de bonne définition est essentiel dans le cas où l'on étudie des intégrales impropres. Dans ce cas, il est essentiel de démontrer la convergence de ces intégrales impropres avant de pouvoir utiliser la croissance de l'intégrale.

□

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :

$$10\, \ln(r+1) \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y_r) \ \leqslant \ 10\, \big(\ln(r)+1\big)$$

Démonstration.
Soit $r \geqslant 2$. D'après la question ***4.a)*** :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \ \leqslant \ \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \ \leqslant \ \frac{1}{k}$$

- En sommant les inégalités de droite pour k variant de 1 à r, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k} \\ & & & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \ln(r+1) & = & \big[\ \ln(t)\ \big]_1^{r+1} & = & \displaystyle\int_1^{r+1} \frac{1}{t}\, dt & & S_1(r) \end{array} \quad \textit{(par relation de Chasles)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } S_1(r) \ \geqslant \ \ln(r+1).}$$

- En sommant les inégalités de gauche pour k variant de 1 à $r-1$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i} & & \displaystyle\int_1^{r} \frac{1}{t}\, dt \end{array} \quad \textit{(par relation de Chasles)}$$

Puis en ajoutant 1 de part et d'autre :

$$1 + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i} \leqslant 1 + \ln(r)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } S_1(r) \leqslant \ln(r)+1.}$$

- En combinant les deux inégalité précédentes, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} 10\ \ln(r+1) & \leqslant & 10\ S_1(r) & \leqslant & 10\ \big(\ln(r)+1\big) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \mathbb{E}(Y_r) & & \end{array}$$

*(d'après la question **3.d)**)*

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall r \geqslant 2,\ 10\ \ln(r+1) \ \leqslant\ \mathbb{E}(Y_r) \ \leqslant\ 10\ (\ln(r)+1).}$$

□

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :

$$1-\frac{1}{r+1} \ \leqslant\ S_2(r) \ \leqslant\ 2-\frac{1}{r}$$

En déduire un encadrement de $\mathbb{V}(Y_r)$.

Démonstration.
Soit $r \geqslant 2$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{rcccccl} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k^2} & \geqslant & \dfrac{1}{t^2} & \geqslant & \dfrac{1}{(k+1)^2} & \end{array}$$

(par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$)

$$\boxed{\text{Ainsi, le minimum de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est } \frac{1}{k+1} \text{ et son maximum est } \frac{1}{k} \text{ sur } [k,k+1].}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\ dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\ \dfrac{1}{k^2} & & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\ dt & & \big((k+1)-k\big)\ \dfrac{1}{(k+1)^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{(k+1)^2} \ \leqslant\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{k^2}.}$$

- En sommant les inégalités de droite pour k variant de 1 à r, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} \\ & & & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 1-\dfrac{1}{r+1} & = & \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^{r+1} & = & \displaystyle\int_1^{r+1} \frac{1}{t^2}\ dt & & S_2(r) \end{array}$$

(par relation de Chasles)

$$\boxed{\text{Ainsi : } 1-\frac{1}{r+1} \leqslant S_2(r).}$$

- En sommant les inégalités de gauche pour k variant de 1 à $r-1$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{(k+1)^2} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\, dt & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ S_2(r) - 1 & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{r} \frac{1}{k^2} & & \displaystyle\int_1^r \frac{1}{t^2}\, dt & = & \left[-\frac{1}{t} \right]_1^r = 1 - \frac{1}{r} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } S_2(r) - 1 \leqslant 1 - \frac{1}{r} \text{ puis : } S_2(r) \leqslant 2 - \frac{1}{r}.}$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } 1 - \frac{1}{r+1} \leqslant S_2(r) \leqslant 2 - \frac{1}{r}.}$$

- Or, d'après la question ***3.d)*** :

$$\mathbb{V}(Y_r) = 100\, S_2\,(r) - 10\, S_1\,(r)$$

En reprenant les inégalités précédentes :

$$100\ \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) \leqslant 100\ S_2(r) \leqslant 100\ \left(2 - \frac{1}{r}\right)$$

$$\text{donc} \qquad 100\ \left(1 - \frac{1}{r+1}\right) - 10\, S_1(r)\ \leqslant\ \underbrace{100\ S_2(r) - 10\, S_1(r)}_{=\ \mathbb{V}(Y_r)}\ \leqslant\ 100\ \left(2 - \frac{1}{r}\right) - 10\, S_1(r)$$

Enfin, d'après la question précédente :

$$-10\big(\ln(r) + 1\big)\ \leqslant\ -10\, S_1(r) \qquad \text{et} \qquad -10\, S_1(r)\ \leqslant\ -10\ \ln(r+1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit :} \\ \forall r \geqslant 2,\ 100 \left(1 - \dfrac{1}{r+1}\right) - 10\,(\ln(r) + 1) \leqslant \mathbb{V}\,(Y_r) \leqslant 100 \left(2 - \dfrac{1}{r}\right) - 10 \ln(r+1) \end{array}}$$

□

Partie II : Étude du nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $\{Z_n = k\}$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

5. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

Démonstration.

- Par définition, la v.a.r. Z_1 prend pour valeur le nombre de boules distinctes parmi B_1, ..., B_r obtenues en un seul tirage. On considère alors que l'expérience consiste à effectuer 1 tirage.
  × Cette expérience possède deux issues. Il y a succès si on obtient une boule parmi B_1, ..., B_r (ce qui se produit avec probabilité $\frac{r}{10}$) et échec dans le cas contraire.

× La v.a.r. Z_1 prend la valeur 1 en cas de succès de l'expérience et prend pour valeur 0 sinon.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Z_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{r}{10}\right) \text{ et } \mathbb{E}(Z_1) = \frac{r}{10}.}$$

Commentaire

Il est conseillé d'utiliser la rédaction indiquée au-dessus lorsque l'on reconnaît une loi usuelle. Toutefois, il peut arriver que, de par le découpage des questions, le sujet attende une rédaction plus détaillée. On développe ci-dessous la rédaction la plus générale consistant tout d'abord à préciser l'ensemble image puis obtenir la loi de Z_1 à l'aide d'une décomposition d'événements.

- Lorsqu'on effectue ce tirage, deux cas se présentent :
  - × soit on obtient une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$.
    Dans ce cas, la v.a.r. Z_1 prend la valeur 1.
  - × soit on obtient une boule parmi $B_{r+1}, \ldots, B_{10}$.
    Dans ce cas, la v.a.r. Z_1 prend la valeur 0.

  On en déduit : $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi : $Z_1 \sim \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 1\}\big)$.
- De plus (avec les notations introduites précédemment) :

$$\{Z_1 = 1\} = \{T_1 = 1\} \cup \ldots \cup \{T_1 = r\}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 1\}\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{r} \{T_1 = i\}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}\big(\{T_1 = i\}\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big(\{T_1 = i\}\big)_{i\in[\![1,r]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{10} = \frac{r}{10} \end{aligned}$$

On a bien : $Z_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{r}{10}\right)$.

□

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbb{E}(Z_2) = \frac{19\,r}{100}$.

Démonstration.

- Par définition, la v.a.r. Z_2 prend pour valeur le nombre de boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ obtenues après deux tirages. Or en deux tirages, on peut obtenir au plus 2 boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Z_2(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}.}$$

Commentaire

On peut être plus précis et démontrer : $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
On peut par exemple remarquer que :

- × le 2-tirage $(r+1, r+1)$ réalise $\{Z_2 = 0\}$,
  (les deux premiers tirages ont fourni 2 *boules qui ne sont pas parmi* $B_1, \ldots, B_r$*)*
- × le 2-tirage $(1, r+1)$ réalise $\{Z_2 = 1\}$,
  (les deux premiers tirages ont fourni 1 *boule parmi* $B_1, \ldots, B_r$ *et* 1 *qui ne l'est pas)*
- × le 2-tirage $(1, r)$ réalise $\{Z_2 = 2\}$.
  (les deux premiers tirages ont fourni 2 *boules parmi* $B_1, \ldots, B_r$*)*

- La famille $\big(\{Z_1 = 0\}, \{Z_1 = 1\}\big)$ est un système complet d'événements.
  Soit $i \in \{0, 1, 2\}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_2 = i\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 0\} \cap \{Z_2 = i\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = i\}\big)$$

- Plusieurs cas se présentent.

× Si $i = 0$ alors :

$$\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 0\} = \varnothing$$

En effet, si le premier tirage a fourni une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$, au bout de deux tirages on a forcément obtenu au moins une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 0\} \cap \{Z_2 = 0\}\big)$$

On considère alors que l'expérience consiste à effectuer deux tirages successifs et avec remise.

- Dans ce cas, Ω_2 (l'univers des possibles de l'expérience ci-dessus) est l'ensemble des 2-uplets de l'ensemble $\mathscr{B} = [\![1, 10]\!]$ des boules. Ainsi : $\text{Card}(\Omega_2) = 10^2$.
- Comme Ω_2 est un ensemble fini, on choisit comme tribu $\mathscr{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$.
- Enfin, on munit $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}_2$ (chaque 2-tirage a même probabilité d'appraître).

L'événement $\{Z_1 = 0\} \cap \{Z_2 = 0\}$ est réalisé par tous les 2-tirages qui contiennent deux nombres de $[\![r+1, 10]\!]$. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

× le numéro (élément de $[\![r+1, 10]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : $10 - (r+1) + 1 = 10 - r$ possibilités.

× le numéro (élément de $[\![r+1, 10]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position : $10 - (r+1) + 1 = 10 - r$ possibilités.

Il y a donc : $(10 - r)^2$ tels 2-tirages. Finalement :

$$\mathbb{P}_2\big(\{Z_1 = 0\} \cap \{Z_2 = 0\}\big) = \frac{\text{Card}\big(\{Z_1 = 0\} \cap \{Z_2 = 0\}\big)}{\text{Card}(\Omega_2)} = \frac{(10 - r)^2}{10^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big) = \frac{(10 - r)^2}{10^2}.}$$

Commentaire

On peut aussi procéder par décomposition d'événement.
On reprend les notations de la question ***2.a)***. Remarquons tout d'abord :

$$\{Z_2 = 0\} \ = \ \{r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10\} \ \cap \ \{r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10\}$$

(*l'événement $\{Z_2 = 0\}$ est réalisé si et seulement si les deux premiers tirages fournissent une boule parmi B_{r+1}, …, B_{10}*)

On en déduit : T_1 et T_2 sont indépendantes car les tirages se font avec remise. Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10\} \ \cap \ \{r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10\}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10\}\big) && \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
= \ & \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=r+1}^{10} \{T_1 = i\}\right) \times \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=r+1}^{10} \{T_2 = i\}\right) \\
= \ & \left(\sum_{i=r+1}^{10} \mathbb{P}\big(\{T_1 = i\}\big)\right) \times \left(\sum_{i=r+1}^{10} \mathbb{P}\big(\{T_2 = j\}\big)\right) && \textit{(car les événements de la famille } \big(\{T_1 = i\}\big)_{i \in [\![r+1,10]\!]} \textit{ et de la famille } \big(\{T_2 = j\}\big)_{j \in [\![r+1,10]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
= \ & \left(\sum_{i=r+1}^{10} \frac{1}{10}\right) \times \left(\sum_{i=r+1}^{10} \frac{1}{10}\right) \\
= \ & \frac{10-r}{10} \times \frac{10-r}{10}
\end{aligned}$$

× Si $i = 2$ alors :

$$\{Z_1 = 0\} \cap \{Z_2 = 2\} = \varnothing$$

En effet, si le premier tirage n'a pas fourni de boule parmi B_1, …, B_r, on ne peut en avoir obtenu deux distinctes au bout de deux tirages. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 2\}\big)$$

L'événement $\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 2\}$ est réalisé par tous les 2-tirages qui contiennent deux nombres distincts de $[\![1, r]\!]$. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

- × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : r possibilités.
- × le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position, différent du 1^{er} : $r-1$ possibilités.

Il y a donc : $r \times (r-1)$ tels 2-tirages. Finalement :

$$\mathbb{P}_2\big(\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 2\}\big) = \frac{\text{Card}\,\big(\{Z_1 = 1\} \cap \{Z_2 = 2\}\big)}{\text{Card}(\Omega_2)} = \frac{r \times (r-1)}{10^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big) = \frac{r \times (r-1)}{10^2}.}$$

Commentaire

Ici aussi il était possible de procéder par décomposition d'événements. Tout d'abord :

$$\{Z_2 = 2\} = \bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \{T_1 = i\} \cap \{T_2 = j\}$$

$\left(\begin{array}{l}\textit{l'événement } \{Z_2 = 2\} \textit{ est réalisé si et seulement si les deux premiers} \\ \textit{tirages fournissent deux boules distinctes parmi } B_1, \ldots, B_r\end{array}\right)$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \{T_1 = i\} \cap \{T_2 = j\}\Big) \\
= \ & \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big(\{T_1 = i\} \cap \{T_2 = j\}\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big(\{T_1 = i\} \cap \{T_2 = j\}\big)_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \\
= \ & \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big(\{T_1 = i\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{T_2 = j\}\big) && \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
= \ & \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big(\{T_1 = i\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{T_2 = j\}\big) \\
= \ & \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i \neq j}} \frac{1}{100} && \textit{(car pour tout } (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, \ \mathbb{P}\big(\{T_1 = i\}\big) = \frac{1}{10} = \mathbb{P}\big(\{T_2 = j\}\big)\textit{)} \\
= \ & \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} \frac{1}{100} - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i = j}} \frac{1}{100} \\
= \ & \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{100}\right) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{100} \\
= \ & \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{r}{100}\right) - \frac{r}{100} \ = \ \frac{r^2}{100} - \frac{r}{100} \ = \ \frac{r(r-1)}{100}
\end{aligned}$$

- La famille $(\{Z_2 = 0\}, \{Z_2 = 1\}, \{Z_2 = 2\})$ forme un système complet d'événements.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big) = 1$$
  Et ainsi :
  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big) &= 1 - \Big(\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big)\Big) \\
  &= 1 - \frac{(10-r)^2}{100} - \frac{r(r-1)}{100} \\
  &= \frac{1}{100}\ \big(100 - (100 - 20\,r + r^2) - r^2 + r\big) \ = \ \frac{21\,r - 2\,r^2}{100}
  \end{aligned}$$
  $$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big) = \frac{21\,r - 2\,r^2}{100}}$$

- La v.a.r. Z_2 est finie. Elle admet donc une espérance.
  De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_2) &= \sum_{i=0}^{2} i \ \mathbb{P}\big(\{Z_2 = i\}\big) \\ &= 0 \times \frac{(10-r)^2}{100} + 1 \times \left(\frac{21r - 2r^2}{100}\right) + 2 \times \frac{r(r-1)}{100} \\ &= \frac{19\,r}{100} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = \frac{19\,r}{100}}$$

Commentaire

- La valeur de $\mathbb{E}(Z_2)$ est fournie dans l'énoncé. Cela permet de mettre en avant le lien suivant :

$$1 \times \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big) + 2 \times \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big) = \frac{19\,r}{100}$$

  Ainsi, si on a déterminé $\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big)$, il est possible de vérifier la valeur de $\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big)$ à l'aide de cette égalité. Ensuite, à l'aide de l'égalité :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big) = 1$$

  on peut alors vérifier la valeur de $\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big)$.
- Il est tout à fait possible, **au brouillon**, d'opérer par rétro-ingénierie, c'est à dire partir du résultat donné par l'énoncé ($\mathbb{E}(Z_2)$ en l'occurrence) pour en déduire un résultat intermédiaire ($\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big)$ puis $\mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big)$). Évidemment, partir du résultat ne constitue en aucun cas une démonstration. Mais la valeur du résultat intermédiaire peut parfois renseigner sur la voie à choisir pour le démontrer.

□

6. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$10\,p_{n,k} \ = \ (10 - r + k)\,p_{n-1,k} + (r + 1 - k)\,p_{n-1,k-1} \qquad (*)$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r+1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, r]\!]$.

- Tout d'abord, remarquons : $Z_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$.
  En effet, en n tirages, on obtient au plus r boules distinctes parmi les boules B_1, …, B_r.

$$\boxed{Z_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, r]\!]}$$

  Notons au passage que ce résultat est aussi vérifié pour $n = 1$.
  En effet : Z_0 est la v.a.r. constante nulle. On a donc bien : $Z_0(\Omega) = \{0\} \subset [\![0, r]\!]$.

Commentaire

La propriété $Z_n(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$ (inclusion et non égalité) est suffisante pour pouvoir conclure que la famille $\big(\{Z_{n-1} = i\}\big)_{i \in [\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements. Afin de bien comprendre ce point, on peut l'illustrer à l'aide de la v.a.r. Z_1 (cas où $n = 2$).
On a vu en question ***5.a)*** : $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi :

$$\big(\{Z_1 = 0\}, \{Z_1 = 1\}\big) \quad \text{est un système complet d'événements}$$

mais on peut aussi remarquer :

$$\underset{\displaystyle \big(\{Z_1 = 0\}, \{Z_1 = 1\}, \varnothing, \varnothing\big)}{\underset{\shortparallel}{\big(\{Z_1 = 0\}, \{Z_1 = 1\}, \{Z_1 = 2\}, \{Z_1 = 3\}\big)}} \quad \text{est un système complet d'événements}$$

Ceci provient du fait qu'ajouter un nombre fini (ou infini dénombrable) de fois l'événement impossible $\varnothing$, ne modifie pas les propriétés de définition d'un systeme complet d'événements.
La nouvelle famille obtenue :

× est toujours constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. En effet :

$$\{Z_1 = 0\} \cap \{Z_1 = 1\} = \varnothing, \quad \{Z_1 = 0\} \cap \varnothing = \varnothing, \quad \{Z_1 = 1\} \cap \varnothing = \varnothing, \quad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

× la réunion de tous les événements de la famille n'est pas modifiée. En effet :

$$\{Z_1 = 0\} \cup \{Z_1 = 1\} \cup \varnothing \cup \varnothing = \{Z_1 = 0\} \cup \{Z_1 = 1\} = \Omega$$

- Ainsi, la famille $\big(\{Z_{n-1} = i\}\big)_{i \in [\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) \\
= \ & \sum_{i=0}^{r} \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = i\} \cap \{Z_n = k\}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k-1\} \cap \{Z_n = k\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k\} \cap \{Z_n = k\}\big) && \textit{(en effet, pour tout } i \in [\![1, r]\!], \textit{ si } i \neq k-1 \ \texttt{OU} \ i \neq k, \textit{ on a : } \{Z_{n-1} = i\} \cap \{Z_n = k\} = \varnothing \ (\star)\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k-1\}\big) \times \mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k-1\}}\big(\{Z_n = k\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k\}}\big(\{Z_n = k\}\big)
\end{aligned}$$

- Revenons à la propriété $(\star)$.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Alors si $i \neq k-1$ `OU` $i \neq k$, on a :

$$\{Z_{n-1} = i\} \cap \{Z_n = k\} = \varnothing$$

En effet, on ne peut obtenir à la fois $i < k-1$ (respectivement $i > k$) boules distinctes parmi B_1, ..., B_r au cours des $n-1$ premiers tirages et k boules distinctes parmi B_1, ..., B_r en ajoutant le $n^{\text{ème}}$ tirage. Autrement dit, le $n^{\text{ème}}$ tirage peut amener au plus une nouvelle boule non encore apparue parmi les boules B_1, ..., B_r.

- Précisons maintenant les différents éléments de l'égalité issue de la formule des probabilités totales.
   × Tout d'abord :

$$\mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k-1\}}\big(\{Z_n = k\}\big) = \frac{r+1-k}{10}$$

En effet, si l'événement $\{Z_{n-1} = k-1\}$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu $k-1$ boules distinctes parmi les boules B_1, …, B_r lors des $n-1$ premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $\{Z_n = k\}$ est réalisé si et seulement si on tire une boule non encore obtenue (parmi les boules B_1, …, B_r) lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.
Or, parmi les 10 boules de l'urne, il y a $r-(k-1)$ boules non encore obtenues.

$$\boxed{\mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k-1\}}\big(\{Z_n = k\}\big) = \frac{r+1-k}{10}}$$

× Ensuite :

$$\mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k\}}(\{Z_n = k\}) = \frac{10-r+k}{10}$$

En effet, si l'événement $\{Z_{n-1} = k\}$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu k boules distinctes parmi les boules B_1, …, B_r lors des $n-1$ premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $\{Z_n = k\}$ est alors réalisé si et seulement si :

- on obtient une des k boules distinctes déjà obtenue lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.

OU - on obtient une boule parmi les boules B_{r+1}, …, B_{10} lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.

Parmi les 10 boules de l'urne, il y a donc $k + \big(10-(r+1)+1\big) = 10-r+k$ boules dont le tirage permet de réaliser $\{Z_n = k\}$.

$$\boxed{\mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k\}}(\{Z_n = k\}) = \frac{10-r+k}{10}}$$

• Finalement :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k-1\}\big) \times \mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k-1\}}\big(\{Z_n = k\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{Z_{n-1}=k\}}\big(\{Z_n = k\}\big) \\ & = & \dfrac{r-k+1}{10}\ p_{n-1,k-1} + \dfrac{10-r+k}{10}\ p_{n-1,k}\end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } 10\ p_{n,k} = (10-r+k)\ p_{n-1,k} + (r+1-k)\ p_{n-1,k-1}.}$$

• Il reste alors à démontrer que l'égalité $(*)$ est encore vérifiée si $k \geqslant r+1$.
Soit $k \in [\![r+1, +\infty[\![$. Deux cas se présentent.

× Si $k = r+1$ alors :

– d'une part :

$$\begin{array}{rl} & (10-r+k)\ p_{n-1,k} + \cancel{(r+1-k)\ p_{n-1,k-1}} \\ = & (10-r+k)\ \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k\}\big) \ = \ 0 \end{array}$$

(car $\{Z_{n-1} = k\} = \varnothing$ puisque $k \notin [\![0, r]\!]$)

– d'autre part :

$$10\ p_{n,k} = 10\ \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) \ = \ 0$$

(car $\{Z_n = k\} = \varnothing$ puisque $k \notin [\![0, r]\!]$)

$$\boxed{\text{L'égalité est donc vérifiée pour } k = r+1.}$$

× Si $k \geqslant r+2$ alors :

$$\{Z_n = k\} = \{Z_{n-1} = k\} = \{Z_{n-1} = k-1\} = \varnothing$$

car $k \notin [\![0, r]\!]$ et $k-1 \notin [\![0, r]\!]$. Ainsi :

$$p_{n,k} = p_{n-1,k} = p_{n-1,k-1} = 0$$

Ainsi, l'égalité $(*)$ est aussi vérifée pour $k \geqslant r+2$.

Commentaire

- Afin de démontrer l'égalité $(*)$, il convient tout d'abord d'écrire explicitement cette formule :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) &= \frac{10-r+k}{10} \times \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k\}\big) + \frac{r+1-k}{10} \times \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k-1\}\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k\}\big) \times \frac{10-r+k}{10} + \mathbb{P}\big(\{Z_{n-1} = k-1\}\big) \times \frac{r+1-k}{10}\end{aligned}$$

  C'est cette forme qui doit faire penser à l'utilisation de la formule des probabilités totales selon le système complet d'événements associé à la v.a.r. Z_{n-1}.

- Pour démontrer une égalité entre probabilités, le procédé classique consiste à démontrer une égalité entre événements. Ici, on a préféré présenter le résultat en utilisant directement la formule des probabilités totales. Mais la démonstration de cette formule fait justement apparaître une égalité entre événements. Explicitons cette étape.
  Comme la famille $\big(\{Z_{n-1} = i\}\big)_{i \in [\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned}\{Z_n = k\} &= \Omega \cap \{Z_n = k\} \\ &= \left(\bigcup_{i=0}^{r} \{Z_{n-1} = i\}\right) \cap \{Z_n = k\} \\ &= \bigcup_{i=0}^{r} \Big(\{Z_{n-1} = i\} \cap \{Z_n = k\}\Big) \\ &= \big(\{Z_{n-1} = k-1\} \cap \{Z_n = k\}\big) \\ &\quad \cup \big(\{Z_{n-1} = k\} \cap \{Z_n = k\}\big)\end{aligned}$$

  (en effet, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, si $i \neq k-1$ `OU` *$i \neq k$, on a : $\{Z_{n-1} = i\} \cap \{Z_n = k\} = \varnothing$)*

- Il est à noter que cette dernière égalité :

$$\{Z_n = k\} = \big(\{Z_{n-1} = k-1\} \cap \{Z_n = k\}\big) \cup \big(\{Z_{n-1} = k\} \cap \{Z_n = k\}\big)$$

  peut aussi se démontrer de manière directe.
  En effet, l'événement $\{Z_n = k\}$ est réalisé si et seulement si après n tirages on a obtenu k boules distinctes parmi les boules B_1, ..., B_r. Cela se produit si et seulement si :
  - on a obtenu k boules distinctes parmi les boules B_1, ..., B_r lors des $n-1$ premiers tirage et le tirage suivant n'en amène pas de nouvelle.
    Ainsi, $\{Z_{n-1} = k-1\} \cap \{Z_n = k\}$ est réalisé.

  `OU`
  - on a obtenu $k-1$ boules distinctes parmi les boules B_1, ..., B_r lors des $n-1$ premiers tirage et le tirage suivant en amène une nouvelle.
    Ainsi, $\{Z_{n-1} = k\} \cap \{Z_n = k\}$ est réalisé.

$\square$

7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par :

$$\begin{cases} Q_0(X) = 1 \\ Q_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\, X^k \end{cases}$$

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Q_1(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{1} p_{1,k}\, X^k & \textit{(par définition)} \\ & = & p_{1,0} + p_{1,1}\, X & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_1 = 1\}\big)\, X & \\ & = & \dfrac{10-r}{10} + \dfrac{r}{10}\, X & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{Q_1(X) = \frac{10-r}{10} + \frac{r}{10}\, X}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} Q_2(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{2} p_{2,k}\, X^k & \textit{(par définition)} \\ & = & p_{2,0} + p_{2,1}\, X + p_{2,2}\, X^2 & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 1\}\big)\, X + \mathbb{P}\big(\{Z_2 = 2\}\big)\, X^2 & \\ & = & \dfrac{(10-r)^2}{100} + \dfrac{21r - 2r^2}{100}\, X + \dfrac{r\,(r-1)}{100}\, X^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{Q_2(X) = \frac{(10-r)^2}{100} + \frac{21r-2r^2}{100}\, X + \frac{r\,(r-1)}{100}\, X^2}$$

□

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q_n'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, où Q_n' désigne la dérivée du polynôme Q_n.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Q_n(1) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k} & \textit{(par définition)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) \ = \ 1 & \textit{(car } \big(\{Z_n = i\}\big)_{i \in [\![0,n]\!]} \textit{ est un système complet d'événements } (\star)\textit{)} \end{array}$$

L'argument $(\star)$ résulte de la propriété : $Z_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
En effet, en n tirages on obtient forcément moins de n boules distinctes parmi B_1, ..., B_r.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q_n(1) = 1.}$$

- Ensuite :

$$Q_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} k\ p_{n,k}\ X^{k-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
Q_n'(1) &= \sum_{k=0}^{n} k\ p_{n,k} && \textit{(par définition)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \in Z_n(\Omega)}}^{n} k\ \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) + \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin Z_n(\Omega)}}^{n} k\ \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big)} \\
&= \sum_{k \in Z_n(\Omega) \cap [\![0,n]\!]} k\ \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) \\
&= \sum_{k \in Z_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) && \begin{array}{l}\textit{(car } Z_n(\Omega) \cap [\![0,n]\!] = Z_n(\Omega) \\ \textit{puisque } Z_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]\textit{)}\end{array}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q_n'(1) = \mathbb{E}(Z_n).}$$

Commentaire

- Dans cette question, on illustre le fait que l'on peut généralement travailler avec une sur-approximation de l'ensemble image de la v.a.r. étudiée. Plus précisément, si on considère une v.a.r. X discrète admettant une espérance et qu'il existe une sur-approximation $\mathcal{H}$ de $X(\Omega)$ (c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{H}$ tel que $X(\Omega) \subset \mathcal{H}$) alors :
  - × la famille $\big(\{X = i\}\big)_{i \in \mathcal{H}}$ est un système complet d'événements.
    (cela a déjà donné lieu à une remarque)
  - × l'espérance de X peut s'écrire sous la forme :
    $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathcal{H}} i\ \mathbb{P}\big(\{X = i\}\big)$$
    (on le démontre en reprenant les arguments utilisés dans la rédaction de la question)
- Même si ce n'est pas utile, on peut donner une formule explicite pour $Z_n(\Omega)$. Cet ensemble image dépend de la situation de n par rapport à r :
  - × si on considère plus de r tirages (c'est-à-dire si $n \geqslant r$), alors Z_n peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble $[\![0, r]\!]$.
  - × si on considère strictement moins de r tirages (c'est-à-dire si $n < r$), alors Z_n peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble $[\![0, n]\!]$.

  Finalement : $Z_n(\Omega) = [\![0, \min(n, r)]\!]$.

□

c) En utilisant l'égalité $(*)$, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$10\, Q_n(x) \ = \ (10 - r + rx)\ Q_{n-1}(x) + x\,(1-x)\ Q_{n-1}'(x) \qquad (**)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
10\, Q_n(X) & = & 10 \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\ X^k & \textit{(par définition de } Q_n\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} (10\, p_{n,k})\ X^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \big((10-r+k)\ p_{n-1,k} + (r+1-k)\ p_{n-1,k-1}\big)\ X^k & \textit{(d'après } \boldsymbol{6}\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} (10-r)\ p_{n-1,k}\ X^k \ + \ \sum\limits_{k=0}^{n} k\, p_{n-1,k}\ X^k & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
& + & \sum\limits_{k=0}^{n} r\, p_{n-1,k-1}\ X^k \ - \ \sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\ X^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} (10-r)\ p_{n-1,k}\ X^k \ + \ \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\ X^k & \textit{(car } p_{n-1,n} = 0\textit{)} \\
& + & \sum\limits_{k=1}^{n} r\, p_{n-1,k-1}\ X^k \ - \ \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\ X^k & \textit{(car } p_{n-1,-1} = 0\textit{)} \\
& = & (10-r) \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\ X^k \ + \ \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\ X^{k-1}\right)\ X & \\
& + & r \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\ X^k \ - \ \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\ X^k & \\
& = & (10-r)\ Q_{n-1}(X) \ + \ X\ Q'_{n-1}(X) & \textit{(par définition de } Q_{n-1}\textit{)} \\
& + & r \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\ X^{j+1} \ - \ \sum\limits_{j=0}^{n-1} j\, p_{n-1,j}\ X^{j+1} & \textit{(par le décalage d'indice } j = k-1\textit{)} \\
& = & (10-r)\ Q_{n-1}(X) \ + \ X\ Q'_{n-1}(X) & \\
& + & r \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\ X^{j}\right) X \ - \ \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} j\, p_{n-1,j}\ X^{j-1}\right) X^2 & \textit{(par le décalage d'indice } j = k-1\textit{)} \\
& = & (10-r)\ Q_{n-1}(X) \ + \ X\, Q'_{n-1}(X) \ + \ r\, X\, Q_{n-1}(X) \ - \ X^2\ Q'_{n-1}(X) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 10\ Q_n(X) = (10 - r + r\, X)\ Q_{n-1}(X) + X\ (1-X)\ Q'_{n-1}\ (X).}$$

□

d) En dérivant membre à membre l'égalité $(**)$, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- En dérivant formellement l'égalité $(**)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
10 Q'_n(X) & = & (10 - r + r\, X)\ Q'_{n-1}(X) + r\, Q_{n-1}(X) + X(1-X) Q''_{n-1}(X) + (1-2X)\ Q'_{n-1}(X) \\
& = & r\, Q_{n-1}(X) + \big(11 - r + (r-2)\ X\big)\ Q'_{n-1}(X) + X(1-X)\ Q''_{n-1}(X)
\end{array}$$

- On évalue l'égalité polynomiale précédente en 1, on obtient :

$$\begin{aligned} 10\ Q_n'(1) &= r\, Q_{n-1}(1) + (11 - r + r - 2)\ Q_{n-1}'(1) + 1\,(1-1)\ Q_{n-1}''(1) \\ &= r + 9\ Q_{n-1}'(1) \end{aligned}$$

- Et ainsi, d'après la question ***3.b)*** :

$$10\ \mathbb{E}(Z_n) = 9\ \mathbb{E}(Z_{n-1}) + r$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \frac{9}{10}\ \mathbb{E}(Z_{n-1}) + \frac{r}{10}}$$

- Notons $u_n = \mathbb{E}(Z_n)$. On constate que la suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
  - × L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = \frac{9}{10}\,x + \frac{r}{10}$$

  Elle admet pour unique solution : $\lambda = r$.

  - × On écrit :

$$\begin{array}{rcccccl} u_{n+1} &=& \frac{9}{10} &\times& u_n &+& \frac{r}{10} \quad (L_1) \\ \lambda &=& \frac{9}{10} &\times& \lambda &+& \frac{r}{10} \quad (L_2) \end{array}$$

  et donc $\quad u_{n+1} - \lambda = \frac{9}{10} \times (u_n - \lambda) \qquad (L_1)-(L_2)$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

  - × La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{9}{10}$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n \times v_0 = \left(\frac{9}{10}\right)^n \times (u_0 - \lambda) = \left(\frac{9}{10}\right)^n \times (\mathbb{E}(Z_0) - r) = -\left(\frac{9}{10}\right)^n r$$

  car $Z_0 = 0$ par définition. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = v_n + \lambda = -\left(\frac{9}{10}\right)^n r + r = r\ \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = r\ \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)}$$

□

8. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q_n'' désigne la dérivée du polynôme Q_n'.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q_n''(1)$ et $Q_{n-1}''(1)$.

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q_n''(1) = r(r-1)\ \left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

Démonstration.

- On dérive formellement deux fois l'égalité $(**)$.

$$\begin{aligned}
10\ Q_n''(X) &= r\,Q_{n-1}'(X) + (r-2)\,Q_{n-1}'(X) + (11-r+(r-2)\,X)\ Q_{n-1}''(X) \\
&\quad + (1-2X)\ Q_{n-1}''(X) + X(1-X)\ Q_{n-1}^{(3)}(X) \\
&= 2\,(r-1)\ Q_{n-1}'(X) + (12-r+(r-4)X)\ Q_{n-1}''(X) + X(1-X)\ Q_{n-1}^{(3)}(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En évaluant en 1, on obtient : } 10\ Q_n''(1) = 2\,(r-1)\ Q_{n-1}'(1) + 8\,Q_{n-1}''(1).}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : Q_n''(1) = r(r-1)\left(1+\left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$.

  ▸ **Initialisation :**

  × D'une part : $Q_1(X) = \sum\limits_{k=0}^{1} p_{1,k}\ X^k = p_{1,0} + p_{1,1}\ X$.
  Donc $Q_1''(X) = 0$, d'où $Q_1''(1) = 0$.

  × D'autre part : $r(r-1)\ \left(1+\left(\frac{8}{10}\right)^1 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^1\right) = 0$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ▸ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\text{i.e. } Q_{n+1}''(1) = r(r-1)(1+(\frac{8}{10})^{n+1} - 2\ (\frac{9}{10})^{n+1})\right)$.

$$\begin{aligned}
10\,Q_{n+1}''(1) &= 2\ (r-1)\,Q_n'(1) + 8\ Q_n''(1) \\
&= 2\ (r-1)r\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + 8\ Q_n''(X) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.d)}}\textit{)} \\
&= 2\ (r-1)r\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + 8\ r(r-1)\left(1+\left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= r(r-1)\left(2 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n + 8 + 8\left(\frac{8}{10}\right)^n\right) \\
&= r(r-1)\left(10 + \frac{8^{n+1}}{10^n} - 2\ \frac{9^{n+1}}{10^n}\right)
\end{aligned}$$

  Ainsi : $Q_{n+1}''(1) = r(r-1)\ \left(1+(\frac{8}{10})^{n+1} - 2\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n''(1) = r(r-1)(1+(\frac{8}{10})^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n).}$$ □

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- En dérivant $Q_n'(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,p_{n,k} X^{k-1}$, on obtient : $Q_n''(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,(k-1) p_{n,k} X^{k-2}$.

- On en déduit :

$$Q_n''(1) = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k^{\,2}\,p_{n,k} - \sum_{k=0}^{n} kp_{n,k} = \mathbb{E}(Z_n^2) - \mathbb{E}(Z_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Z_n^2) = Q_n''(1) + \mathbb{E}(Z_n).}$$

- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n^2) - \big(\mathbb{E}(Z_n)\big)^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{V}(Z_n) \\
= \ & Q_n''(1) + \mathbb{E}(Z_n) - (\mathbb{E}(Z_n))^2 \\
= \ & Q_n''(1) + Q_n'(1) - (Q_n'(1))^2 \\
= \ & r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\,\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + r\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) - \left(r(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n)\right)^2 \quad \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{3.d)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\
= \ & r(r-1)\left(\frac{8}{10}\right)^n + r\left(\frac{9}{10}\right)^n - r^2\left(\frac{81}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) = r(r-1)\left(\frac{8}{10}\right)^n + r\left(\frac{9}{10}\right)^n - r^2\left(\frac{81}{100}\right)^n}$$

□

II. Couples de v.a.r. discrètes

Exercice : `EML 97`

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à p, $p \in \,]0,1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :
× Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé,
× X indique le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce,
× Y indique le nombre de « faces » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- La première partie de l'expérience consiste en la succession de N épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{6}$ (probabilité d'obtenir 6 avec un dé équilibré).
- La v.a.r. Z est le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } Z \sim \mathcal{B}\left(N, \dfrac{1}{6}\right). \\[2mm] \text{D'où : } \mathbb{E}(Z) = N\ \dfrac{1}{6} \ = \ \dfrac{N}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = N\ \dfrac{1}{6}\ \left(1 - \dfrac{1}{6}\right) \ = \ \dfrac{5\,N}{36}.\end{array}}$$

□

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{Z=n\}}\big(\{X = k\}\big)$.
On distinguera les cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- Si $n > N$, alors, comme $Z(\Omega) = [\![0, N]\!]$, on obtient : $\{Z = n\} = \varnothing$.
  En particulier : $\mathbb{P}\big(\{Z = n\}\big) = 0$.

  $$\boxed{\text{Si } n > N, \text{ l'application probabilité } \mathbb{P}_{\{Z=n\}} \text{ n'est pas bien définie.}}$$

Commentaire

- On insiste lors de cette permière étape de la démonstration sur le fait que le nombre de 6 obtenus lors des N lancers successifs du dé ne peut être plus grand que N.
- Il convient donc de distinguer le cas où $n > N$ et $n \leqslant N$. On peut regretter que cette disjonction de cas n'apparaisse pas de manière explicite dans cette question. On remarque toutefois qu'elle apparaît dans la suivante, ce qui peut permettre d'y penser.

- Si $n \in [\![0, N]\!]$, alors : $\mathbb{P}(\{Z = n\}) \neq 0$ et ainsi, l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{Z=n\}}$ est bien définie.

  Si l'événement $\{Z = n\}$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu n fois 6 lors de la première partie de l'expérience. Deux cas se présentent alors.

  – Si $n = 0$ alors la v.a.r. X prend la valeur 0 (comme on n'effectue pas de lancer de la pièce, on n'obtient pas de « pile »). Ainsi :

  $$\mathbb{P}_{\{Z=0\}}\big(\{X = 0\}\big) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\{Z=0\}}\big(\{X = k\}\big) = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \quad (*)$$

  – Si $n \in [\![1, N]\!]$ alors la deuxième partie de l'expérience consiste à effectuer n lancers de la pièce truquée. Plus précisément :

  × la deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p (probabilité d'obtenir « pile » avec la pièce truquée),

  × la v.a.r. X est le nombre de succès obtenus lors de cette deuxième partie d'expérience.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la loi conditionnelle de } X \text{ sachant l'événement } \{Z = n\} \text{ est la loi } \mathcal{B}(n, p).}$$

  Précisons ce dernier point. Soit $k \in \mathbb{N}$.

  × Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors :
  $$\mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = k\}) \ = \ \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$$

  × Si $k > n$, alors :
  $$\mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = k\}) \ = \ 0$$

  On remarque enfin que lorsque $n = 0$, les deux égalités précédentes coïncident avec celles écrites à la ligne $(*)$.

On en conclut alors :

$$\forall n \in [\![0,N]\!],\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X=k\}) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Commentaire

- Cette question est à considérer comme difficile. En effet, il faut faire preuve d'initiative pour ne pas oublier les cas non explicités par l'énoncé.
- Le résultat de cette question n'est pas fourni dans l'énoncé. Cela pourrait être bloquant pour toute la suite de l'énoncé. Cependant, la question suivante fournit la loi du couple (X,Z) ce qui permet de traiter le reste de l'énoncé. Mieux : connaissant la loi du couple (X,Z) et connaissant la loi de Z, on peut obtenir la loi conditionnelle de X sachant $\{Z=n\}$. On peut donc, au brouillon, se servir du résultat de la question ***3.*** pour vérifier celui qu'on doit obtenir en question ***2***.

☐

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k,n) :

× si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Z=n\}) = \dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n}\,p^k\,(1-p)^{n-k}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n}$.

× si $n > N$ ou $k > n$ alors $\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Z=n\}) = 0$.

Démonstration.
Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Deux cas se présentent.

- Si $n > N$, alors comme vu dans la question précédente : $\{Z=n\} \ = \ \varnothing$. On en déduit :

$$\{X=k\}\cap\{Z=n\} \ = \ \{X=k\}\cap\varnothing \ = \ \varnothing$$

En particulier, on obtient :

$$\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Z=n\}) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

- Si $n \leqslant N$, remarquons tout d'abord :

	L'événément $\{X=k\}\cap\{Z=n\}$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $\{X=k\}$ est réalisé	et	l'événement $\{Z=n\}$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	On obtient k « piles » lors des lancers de la pièce	et	on obtient n fois la face 6 lors des N lancers de dés
$\Leftrightarrow$	On effectue n lancers de la pièce et on obtient k « piles » lors de ces lancers		

Deux nouveaux cas se présentent alors.

× Si $k \notin [\![0,n]\!]$, alors :

$$\{X=k\}\cap\{Z=n\} = \varnothing$$

En effet, on ne peut pas obtenir un nombre $k \notin [\![0,n]\!]$ de « piles » lorsque l'on effectue n lancers de pièces. En particulier :

$$\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Z=n\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z = n\}) &= \mathbb{P}(\{Z = n\})\, \mathbb{P}_{\{Z=n\}}(\{X = k\}) \\ &= \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{N-n} \times \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z = n\}) = \begin{cases} \binom{n}{k} \binom{N}{n}\, p^k\, (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N \\ 0 & \text{si } n > N \text{ ou } k > n \end{cases}}$$

□

4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{X = 0\})$.

Démonstration.
La famille $(\{Z = n\})_{n \in [\![0, N]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = 0\}) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Z = n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{n}{0} \binom{N}{n}\, p^0\, (1-p)^{n-0} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (1-p)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\, (1-p)\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \\ &= \left(\frac{1}{6}\, (1-p) + \frac{5}{6}\right)^N = \left(1 - \frac{1}{6}\, p\right)^N \quad \textit{(par formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \left(1 - \frac{p}{6}\right)^N}$$

□

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$:

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}(\{X = k\})$.

Démonstration.
Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$.

- D'une part :

$$\binom{n}{k} \binom{N}{n} = \frac{\cancel{n!}}{k!\, (n-k)!} \times \frac{N!}{\cancel{n!}\, (N-n)!} = \frac{N!}{k!\, (n-k)!\, (N-n)!}$$

- D'autre part :

$$\binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k} = \frac{N!}{k!\, \cancel{(N-k)!}} \times \frac{\cancel{(N-k)!}}{(n-k)!\, \big((N-k) - (n-k)\big)!} = \frac{N!}{k!\, (n-k)!\, (N-n)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (n,k) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N, \text{ on obtient : } \binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.}$$

Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à N éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient N individus)
On souhaite alors construire une partie P à n éléments de cet ensemble contenant k éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de n individus dans lequel figurent k représentants de ces individus)*.
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à n éléments de E : $\binom{N}{n}$ possibilités.

On distingue ensuite k éléments de cet ensemble P : $\binom{n}{k}$ possibilités.
(on choisit d'abord les n individus et on élit ensuite k représentants de ces individus)

Ainsi, il y a $\binom{N}{n}\binom{n}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, les k éléments à distinguer : $\binom{N}{k}$ possibilités.

On choisit ensuite $n-k$ éléments dans E, pour former P, en y ajoutant les k éléments précédents : $\binom{N-k}{n-k}$ possibilités.
(on choisit d'abord les k représentants puis on leur adjoint un groupe de $n-k$ individus)

Ainsi, il y a $\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat souhaité.

- Remarquons maintenant : $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.
En effet, il y a au plus N lancers de pièces. Ainsi, le nombre de « piles » obtenus au cours de cette expérience est un entier positif majoré par N.

$$\boxed{\text{En particulier, pour tout } k > N : \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = 0.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leqslant N$.
La famille $(\{Z = n\})_{n \in [\![0,N]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \\
= \ & \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}\big(\{Z = n\} \cap \{X = k\}\big) \\
= \ & \sum_{\substack{n=0 \\ k \in [\![0,n]\!]}}^{N} \mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Z = n\}\big) + \cancel{\sum_{\substack{n=0 \\ k \notin [\![0,n]\!]}}^{N} \mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Z = n\}\big)} \\
= \ & \sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Z = n\}\big)
\end{aligned}$$

(car, d'après la question précédente, pour $k \notin [\![0, n]\!]$: $\mathbb{P}\big(\{X = k\} \cap \{Z = n\}\big) = 0$)

- La dernière ligne est obtenue en constatant que pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} n \in [\![0, N]\!] \\ k \in [\![0, n]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant N \\ 0 \leqslant k \leqslant n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant n \leqslant N \\ k \leqslant n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ k \leqslant n \leqslant N\right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{ll}
& \mathbb{P}(\{X = k\}) \\
= & \sum\limits_{n=k}^{N} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z = n\}) \\
= & \sum\limits_{n=k}^{N} \binom{n}{k} \binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.}}\textit{)} \\
= & \sum\limits_{n=k}^{N} \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k} p^k \ (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \\
= & \binom{N}{k} p^k \sum\limits_{n=k}^{N} \binom{N-k}{n-k} (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \\
= & \binom{N}{k} p^k \sum\limits_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} (1-p)^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-(n+k)} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\
= & \binom{N}{k} p^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \sum\limits_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} (1-p)^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \\
= & \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \sum\limits_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{(N-k)-n} \\
= & \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{1-p}{6} + \frac{5}{6}\right)^{N-k} \qquad \textit{(par formule du binôme de Newton)} \\
= & \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}}$$

□

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :
  - × $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$,
  - × $\forall k \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{p}{6}\right).}$$

- Pour déterminer la loi de Y, il suffit de constater que les v.a.r. X et Y jouent un rôle symétrique. On raisonne alors de la même manière que pour l'obtention de la loi de X en remplaçant p par q.

$$\boxed{\text{On obtient alors : } Y \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{q}{6}\right).}$$

□

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ? Déterminer la loi du couple (X, Y).

Démonstration.

- Montrons que les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.
  - × Remarquons tout d'abord : $\{X = N\} \cap \{Y = N\} = \varnothing$.

    En effet, l'événement $\{X = N\} \cap \{Y = N\}$ est réalisé si et seulement si on obtient à la fois N « piles » et N « faces » lors des lancers de la pièce. Or, comme il y a au maximum N lancers, on ne peut obtenir à la fois N « piles » et N « faces ».

    $$\boxed{\{X = N\} \cap \{Y = N\} = \varnothing}$$

  - × On obtient alors :

    $$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big(\{X = N\} \cap \{Y = N\}\big)}} \neq \underset{p^N}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big(\{X = N\}\big)}} \times \underset{q^N}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big(\{Y = N\}\big)}}$$

    *(d'après la question **6.**)*

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- Dans les énoncés, on trouvera souvent la question : « les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? ». Ainsi énoncée, cette question attend généralement la réponse : `NON`.
- Il s'agit alors de démontrer la négation de la propriété d'indépendance. Or :

  $$\begin{array}{rl} & \texttt{NON}\big(\ \forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})\ \big) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in X(\Omega),\ \exists y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \neq \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\}) \end{array}$$

  Pour démontrer que deux v.a.r. ne sont pas indépendantes, il s'agit d'exhiber un couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que : $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \neq \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\})$.
- En particulier, on pourra chercher $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que :

  $$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big)}} \neq \underset{0}{\underset{\nparallel}{\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)}} \times \underset{0}{\underset{\nparallel}{\mathbb{P}\big(\{Y = y\}\big)}}$$

- Déterminons la loi du couple (X, Y).
  - × D'après la question précédente, on peut considérer : $X(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0, N]\!]$.

    $$\boxed{X(\Omega) = [\![0, N]\!] \ \text{ et } \ Y(\Omega) = [\![0, N]\!]}$$

  - × Soit $(k, \ell) \in [\![0, N]\!]^2$.
    On obtient alors :

    $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = \ell\}) & = & \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z - X = \ell\}) & \textit{(car } Z = X + Y\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z = \ell + k\}) & \end{array}$$

    Deux cas se présentent alors :

- si $\ell + k > N$, alors : $\{Z = \ell + k\} = \varnothing$. D'où :

$$\{X = k\} \cap \{Z = \ell + k\} \ = \ \{X = k\} \cap \varnothing \ = \ \varnothing$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = \ell\}) \ = \ \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z = \ell + k\}) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

- si $\ell + k \leqslant N$, alors, d'après la question ***3.*** :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = \ell\}) &= \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Z = \ell + k\}) \\ &= \binom{\ell + k}{k} \binom{N}{\ell + k} p^k \ (1 - p)^{(\ell + \cancel{k}) - \cancel{k}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N - (\ell + k)} \left(\frac{1}{6}\right)^{\ell + k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, pour tout } (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 : \\ \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = \ell\}) = \begin{cases} \dbinom{\ell + k}{k} \dbinom{N}{\ell + k} p^k \ (1 - p)^{\ell} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N - \ell - k} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\ell + k} & \text{si } \ell + k \leqslant N \\ 0 & \text{si } \ell + k > N \end{cases} \end{array}}$$

□

8. **Seulement pour les cubes** :
En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y).

Démonstration.

- Les v.a.r. X, Y et Z sont finies. Elles admettent donc une variance.
- Tout d'abord :

$$\mathbb{V}(X + Y) \ = \ \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$$

Commentaire

Rappelons que cette propriétépeut se démontrer à l'aide des propriétés de l'opérateur de covariance. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X + Y) &= \mathrm{Cov}\big(X + Y, X + Y\big) \\ &= \mathrm{Cov}\big(X, X + Y\big) + \mathrm{Cov}\big(Y, X + Y\big) && \textit{(par linéarité à gauche de la covariance)} \\ &= \mathrm{Cov}\big(X, X\big) + \mathrm{Cov}\big(X, Y\big) + \mathrm{Cov}\big(Y, X\big) + \mathrm{Cov}\big(Y, Y\big) && \textit{(par linéarité à droite de la covariance)} \\ &= \mathbb{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y) && \textit{(car on a : } \mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Cov}(X, Y)\textit{)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{V}(X+Y)-\mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y) \\
&= \mathbb{V}(Z)-\mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y) \\
&= \frac{5\,N}{36} - N\,\frac{p}{6}\left(1-\frac{p}{6}\right) - N\,\frac{q}{6}\left(1-\frac{q}{6}\right) && \textit{(d'après } \textbf{1.} \textit{ et car } X \sim \mathcal{B}\left(N, \tfrac{p}{6}\right) \textit{ et } Y \sim \mathcal{B}\left(N, \tfrac{q}{6}\right)\textit{)} \\
&= \frac{5\,N}{36} - N\,\frac{p}{6}\,\frac{6-p}{6} - N\,\frac{q}{6}\,\frac{6-q}{6} \\
&= \frac{N}{36}\,\big(5-p\,(6-p)-q\,(6-q)\big) \\
&= \frac{N}{36}\,\big(5-6p+p^2-6q+q^2\big) \\
&= \frac{N}{36}\,\big(5-6\,(p+q)+p^2+q^2\big) \\
&= \frac{N}{36}\,\big(5-6+p^2+q^2\big) && \textit{(car } p+q=1\textit{)} \\
&= \frac{N}{36}\,\big(-1+p^2+(1-p)^2\big) \\
&= \frac{N}{36}\,\big(\cancel{-1}+p^2+(\cancel{1}-2p+p^2)\big) \\
&= \frac{N}{36}\,\big(2p^2-2p\big) \\
&= \frac{2\,N}{36}\,p\,(1-p)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{N\;p\;q}{36}.}$$

□

Exercice : ESCP 2001

Préliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{1^2\;(1+1)^2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.} \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2\ (n+2)^2}{4} \right)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2\ (n+1)^2}{4} + (n+1)^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \big(n^2 + 4\,(n+1)\big) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\ (n+2)^2 \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\ (n+1)^2}{4}.}$$

□

Partie I

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires.
On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

Démonstration.

- On note $b_1, \dots, b_{N-2}$ les $(N-2)$ boules blanches, et b_{N-1}, b_N les deux boules noires de l'urne. L'univers Ω est l'ensemble des N-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $\{b_1, \dots, b_N\}$.
  (on peut aussi choisir de confondre boule et numéro associé - dans ce cas, Ω est l'ensemble des N-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, N]\!]$)
- Comme Ω est un ensemble fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Enfin, on munit $(\Omega, \mathscr{A})$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.

□

3. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer :

$$\mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

Démonstration.

- Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on considère les événements suivants :

$$N_k : \text{« la } k^{\text{ème}} \text{ boule tirée est noire »} \quad \text{et} \quad B_k : \text{« la } k^{\text{ème}} \text{ boule tirée est blanche »}$$

- Soit $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$. Deux cas se présentent :

× si $i \geqslant j$, alors :
$$\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\} \ = \ \varnothing$$
En effet, si l'événement $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\})$ est réalisé, alors la première boule noire apparait avant la seconde boule noire. Ceci est impossible.

× si $i > j$, alors l'événement $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}$ est réalisé si et seulement si la première boule noire est obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage et la seconde boule noire au $j^{\text{ème}}$ tirage.
Un N-tirage réalisant l'événement $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}$ est donc entièrement déterminé par :

- le numéro de la boule noire en $i^{\text{ème}}$ position : $\binom{2}{1} = 2$ possibilités.
- le numéro de la boule noire en $j^{\text{ème}}$ position parmi les boules noires restantes : $\binom{1}{1} = 1$ possibilité.
- les positions des $N-2$ boules blanches dans les $N-2$ positions restantes : $(N-2)!$ possibilités.

Ainsi le nombre de N-tirages réalisant l'événement $\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}$ est $2\,(N-2)!$.
On en déduit :
$$\mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) = \frac{\text{Card}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2\ (N-2)!}{N!} = \frac{2}{N\,(N-1)}$$

Finalement : $\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, $\mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$

Commentaire

Pour le cas $i < j$, on peut également utiliser la formule des probabilités composées.
On détaille ci-dessous la manière de procéder.
- Tout d'abord :
$$\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\} = B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j \cap B_{j+1} \cap \ldots \cap B_N$$
- De plus : $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j \, B_{j+1} \cap \ldots \cap B_{N-1}) \neq 0$.
Ainsi, par formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) \\ = \ & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(N_i) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{j-1}}(N_j) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{N-1}}(B_N) \\ = \ & \frac{N-2}{N} \times \frac{N-3}{N-1} \times \ldots \times \frac{2}{N-(i-1)} \times \ldots \times \frac{1}{N-(j-1)} \times \ldots \times \frac{1}{N-(N-1)} \\ = \ & \frac{(N-2)! \times 2 \times 1}{N!} \ = \ \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$
□

4. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.

× On remarque : $X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!]$.
En effet, comme il y a deux boules noires dans l'urne, la première apparaît au pire lors du $(N-1)^{\text{ème}}$ tirage et peut apparaître lors de tout autre tirage.

× De plus : $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$.
En effet, comme il y a deux boules noires dans l'urne, la seconde apparaît au mieux lors du $2^{\text{ème}}$ tirage et peut apparaître lors de tout autre tirage.

- Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.
La famille $\left(\{X_2 = j\} \right)_{j \in [\![2,N]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_1 = i\}) &= \sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) \\
&= \cancel{\sum_{\substack{j=2 \\ j \leqslant i}}^{N} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\})} + \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{N} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) \\
&= \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2\,(N-(i+1)+1)}{N(N-1)} \;=\; 2\,\frac{N-i}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!] \\ \forall i \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}(\{X_1 = i\}) = 2\,\dfrac{N-i}{N(N-1)}. \end{array}}$$

Commentaire

On note que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $i = 1$. En effet, dans ce cas, la première somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- Soit $j \in [\![2, N]\!]$.
La famille $\left(\{X_1 = i\} \right)_{i \in [\![1,N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_2 = j\}) &= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) \\
&= \cancel{\sum_{\substack{i=1 \\ i \geqslant j}}^{N-1} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^{N-1} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 2\,\frac{j-1}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X_2(\Omega) = [\![2, N]\!] \\ \forall j \in [\![2, N]\!],\ \mathbb{P}(\{X_2 = j\}) = 2\,\dfrac{j-1}{N(N-1)}. \end{array}}$$

Commentaire

On note que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $j = N$. En effet, dans ce cas, la deuxième somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- Démontrons que les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
  - × Tout d'abord :
$$\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\} \ = \ \varnothing$$
En effet, l'événement $\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\}$ est réalisé si et seulement la première et la seconde boule noire sont tirées simultanément au $2^{\text{ème}}$ tirage. Ceci est impossible car on tire les boules dans l'urne une par une.
On en déduit :
$$\mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\}) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  - × De plus :
    - d'une part : $\mathbb{P}(\{X_1 = 2\}) = 2\,\dfrac{N-2}{N(N-1)} \neq 0$,
    - d'autre part : $\mathbb{P}(\{X_2 = 2\}) = 2\,\dfrac{2-1}{N(N-1)} \neq 0$

  On en déduit :
$$\mathbb{P}(\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\}) \ \neq \ \mathbb{P}(\{X_1 = 2\}) \times \mathbb{P}(\{X_2 = 2\})$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

En toute rigueur, cette démonstration est fausse. Elle repose sur le fait que $2 \in X_1(\Omega)$ et $2 \in X_2(\Omega)$. Or si $N = 2$ (ce qui n'est pas exclu par l'énoncé), $2 \notin X_1(\Omega)$. Dans ce cas, X_1 est la v.a.r. certaine égale à 1 et X_2 est la v.a.r. certaine égale à 2.
Et X_1 et X_2 sont alors indépendantes.

□

5. a) Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.

Démonstration.
Notons $Z = N + 1 - X_2$.

- Commençons par déterminer $Z(\Omega)$.
Notons $h : x \mapsto N + 1 - x$, de telle sorte que : $Z = h(X)$.
On rappelle : $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$. On en déduit :
$$Z(\Omega) \ = \ \big(h(X_2)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X_2(\Omega)\big) \ = \ h([\![2, N]\!]) \ \subset \ [\![1, N-1]\!]$$
En effet, soit $k \in [\![2, N]\!]$:
  - × $h(k) = N + 1 - k \in \mathbb{Z}$,
  - × de plus :
$$\begin{array}{ll} \text{comme} & 2 \leqslant k \leqslant N \\ \text{alors} & -2 \geqslant -k \geqslant -N \\ \text{donc} & N-1 \geqslant N+1-k \geqslant 1 \\ \text{d'où} & N-1 \geqslant h(k) \geqslant 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } Z(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!].}$$

- Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}(\{Z = i\}) & = & \mathbb{P}(\{N+1-X_2 = i\}) & \\ & = & \mathbb{P}(\{X_2 = N+1-i\}) & \\ & = & 2\,\dfrac{(N+\cancel{1}-i)-\cancel{1}}{N\,(N-1)} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.}}\textit{, car} \\ & & & N+1-i \in [\![2, N]\!] \quad (*)\textit{)} \\ & = & 2\,\dfrac{N-i}{N\,(N-1)} & \end{array}$$

Détaillons l'assertion $(*)$.

$$\begin{array}{ll}\text{Comme} & 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ \text{alors} & -1 \geqslant -i \geqslant -(N-1) \\ \text{donc} & N \geqslant N+1-i \geqslant 2\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}(\{Z = i\}) = 2\,\frac{N-i}{N\,(N-1)}}$$

- Finalement, on obtient :
  × $Z(\Omega) \subset X_1(\Omega)$,
  × $\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $\mathbb{P}(\{Z = i\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = i\})$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } Z = N+1-X_2 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi.}}$$

□

b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

Démonstration.

- Comme la v.a.r. X_1 correspond au rang de la première boule noire et la v.a.r. X_2 correspond à celui de la seconde, l'écart entre les deux est au minimum de 1 et au maximum de $(N-1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (X_2 - X_1)(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!].}$$

- Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$.
  La famille $(\{X_1 = i\})_{i \in [\![1, N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = k\}) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 - X_1 = k\}) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k+i\}) & \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ k+i \in X_2(\Omega)}}^{N-1} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k+i\}) & \\ & & + \cancel{\displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ k+i \notin X_2(\Omega)}}^{N-1} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k+i\})} & \textit{(car } \{X_2 = k+i\} = \varnothing \\ & & & \textit{si } k+i \notin X_2(\Omega)\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k+i\}) & \end{array}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k+i \in X_2(\Omega) = [\![2, N]\!] \\ i \in [\![1, N-1]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \leqslant k+i \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2-k \leqslant i \leqslant N-k \\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant i \leqslant N-k\right.$$

Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = k\}) & = & \sum\limits_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k+i\}) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{N-k} \dfrac{2}{N\ (N-1)} & \textit{(d'après \textbf{2.}, car } k+i > i\textit{)} \\ & = & \dfrac{2\ (N-k)}{N\ (N-1)} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = k\}) = \dfrac{2\ (N-k)}{N\ (N-1)}}$$

- Finalement, on obtient :
  × $(X_2 - X_1)(\Omega) \subset X_1(\Omega)$,
  × $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\mathbb{P}(\{X_2 - X_1 = k\}) = \mathbb{P}(\{X_1 = k\})$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } X_2 - X_1 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi.}}$$

□

6. À l'aide des résultats de la question ***5*** :

a) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une espérance en tant que v.a.r. finies.
- De plus, d'après les questions ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$\left\{\begin{array}{l} N+1-X_2 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi} \\ X_2 - X_1 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi} \end{array}\right.$$

On en déduit que les v.a.r. $N+1-X_2$ et $X_2 - X_1$ admettent aussi une espérance et :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(N+1-X_2) \\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2 - X_1) \end{array}\right.$$

De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(N+1-X_2) = \mathbb{E}(N+1) - \mathbb{E}(X_2) = N+1-\mathbb{E}(X_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2 - X_1) = \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1)$$

Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_1) = N+1-\mathbb{E}(X_2) \\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1) \end{array}\right.$$

- On obtient alors un système linéaire de deux équations à deux inconnues ($\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{E}(X_1) & + & \mathbb{E}(X_2) & = & N+1 \\ 2\,\mathbb{E}(X_1) & - & \mathbb{E}(X_2) & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{E}(X_1) & + & \mathbb{E}(X_2) & = & N+1 \\ & - & 3\,\mathbb{E}(X_2) & = & -2\,(N+1) \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,\mathbb{E}(X_1) & & & = & N+1 \\ & - & 3\,\mathbb{E}(X_2) & = & -2\,(N+1) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{N+1}{3} \text{ et } \mathbb{E}(X_2) = 2\ \frac{N+1}{3}.}$$

□

b) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une variance en tant que v.a.r. finies.
- D'après la question ***4.a)***, les v.a.r. $N+1-X_2$ et X_1 ont même loi. On en déduit que $N+1-X_2$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1) \ = \ \mathbb{V}(N+1-X_2) \ = \ (-1)^2\ \mathbb{V}(X_2) \ = \ \mathbb{V}(X_2)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) \ = \ \mathbb{V}(X_2)}$$

□

c) **Seulement pour les cubes** : Établir la relation : $2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$
(où $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2).

Démonstration.

- Tout d'abord, comme les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une variance, alors $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$ est bien définie.
- D'après la question ***4.b)***, les v.a.r. $X_2 - X_1$ et X_1 ont même loi. On en déduit que $X_2 - X_1$ admet une variance et :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(X_1) & = & \mathbb{V}(X_2 - X_1) & \\
& = & \mathbb{V}(X_2) + 2\ \operatorname{Cov}(X_2, -X_1) + \mathbb{V}(-X_1) & \\
& = & \mathbb{V}(X_2) - 2\ \operatorname{Cov}(X_2, X_1) + \mathbb{V}(X_1) & \textit{(par linéarité à droite de la covariance)} \\
& = & 2\ \mathbb{V}(X_1) - 2\ \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

On obtient : $\mathbb{V}(X_1) \ = \ 2\ \mathbb{V}(X_1) - 2\ \operatorname{Cov}(X_1, X_2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(X_1) \ = \ 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2).}$$

□

7. **Seulement pour les cubes** : Calculer $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$.

Démonstration.

- Déterminons d'abord $\mathbb{E}(X_1^2)$. Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1^2) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x^2\ \mathbb{P}(\{X=x\}) = \sum_{i=1}^{N-1} i^2\ \mathbb{P}(\{X=i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} i^2\ \frac{2\ (N-i)}{N(N-1)} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} i^2\ (N-i) \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} i^3\right) \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(N\ \frac{(N-1)\ N\ \big(2(N-1)+1\big)}{6} - \frac{(N-1)^2\ N^2}{4}\right) \\
&= \frac{2}{N(N-1)} \left(\frac{N^2\,(N-1)\,(2N-1)}{6} - \frac{(N-1)^2\ N^2}{4}\right) \\
&= \frac{2}{\cancel{N}\cancel{(N-1)}}\ \frac{N^{\cancel{2}}\,\cancel{(N-1)}}{12}\,(2\,(2N-1)-3\,(N-1)) \\
&= \frac{N}{6}\,(4N-2-3N+3) = \frac{N(N+1)}{6}
\end{aligned}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1) &= \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = \frac{N(N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{N(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{9} \\
&= \frac{N+1}{18}\,(3N-2\,(N+1)) \\
&= \frac{(N+1)(N-1)}{18}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{(N+1)(N-1)}{18}}$$

- Or, d'après la question ***6.b)*** : $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(X_1)$.
  D'après la question précédente : $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \dfrac{1}{2}\ \mathbb{V}(X_1)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}(X_2) = \frac{(N+1)(N-1)}{18} \text{ et } \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(N+1)(N-1)}{36}}$$ □

Partie II

On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

8. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

Démonstration.

- Remarquons d'abord : $D = \{A \neq B\}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\{A \neq B\}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\{A \neq B\}}) = 1 - \mathbb{P}(\{A = B\})$$

Commentaire

Il est pertinent ici de penser à utiliser l'événement contraire, puisque l'événement D est défini par une propriété exprimée négativement.

- La famille $(\{B = j\})_{j \in [\![1,N]\!]}$ forme un système complet d'événements, car $B \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])$. Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{A = B\}) &= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(\{A = B\} \cap \{B = j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(\{A = j\} \cap \{B = j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(\{A = j\}) \times \mathbb{P}(\{B = j\}) && \textit{(car A et B sont indépendantes)} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\,\frac{1}{N} && \textit{(car $A \sim \mathcal{U}([\![1,N]\!])$ et $B \sim \mathcal{U}([\![1,N]\!])$)} \\
&= \frac{N}{N^2} \ = \ \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(\{A = B\}) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}}$$

□

9. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\left\{\begin{array}{l} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{array}\right.$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \dots, N\}$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\})$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $\mathbb{P}(D) = \dfrac{N-1}{N} \neq 0$. Ainsi la probabilité $\mathbb{P}_D$ est bien définie.
- Soit $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$.
  Si l'événement D est réalisé, alors les v.a.r. A et B prennent des valeurs distinctes.
  Dans ce cas, l'événement $\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}$ est réalisé si et seulement si le minimum de la valeur prise par la v.a.r. A et la valeur prise par la v.a.r. B est i, et le maximum de la valeur prise par A et la valeur prise par B est j.
  Trois cas se présentent alors.
  × Si $i > j$, alors :
  $$\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\} \ = \ \varnothing$$
  En effet, le minimum des valeurs prises par A et B ne peut être strictement plus grand que le maximum des valeurs prises par A et B.
  $$\boxed{\text{Ainsi, si } i > j, \text{ alors : } \mathbb{P}_D(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}) = 0.}$$
  × Si $i = j$, alors :
  $$\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\} \ = \ \{\min(A, B) = i\} \cap \{\max(A, B) = i\} \ = \ \{A = i\} \cap \{B = i\}$$
  Ainsi :
  $$D \cap \big(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}\big) \ = \ \{A \neq B\} \cap \big(\{A = i\} \cap \{B = i\}\big) \ = \ \varnothing$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}_D(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}) \ = \ \frac{\mathbb{P}\Big(D \cap \big(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}\big)\Big)}{\mathbb{P}(D)} \ = \ \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(D)} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, si } i = j : \mathbb{P}_D(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = i\}) = 0}$$

× Si $i < j$, alors, comme $i \neq j$:

$$D \cap \big(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}\big) \ = \ \{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}$$

De plus :

$$\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\} \ = \ \big(\{A = i\} \cap \{B = j\}\big) \cup \big(\{A = j\} \cap \{B = i\}\big)$$

Les deux événements de cette union sont incompatibles. On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_D(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}) \\
= \ & \mathbb{P}_D(\{A = i\} \cap \{B = j\}) + \mathbb{P}_D(\{A = j\} \cap \{B = i\}) \\
= \ & \frac{\mathbb{P}(D \cap \{A = i\} \cap \{B = j\})}{\mathbb{P}(D)} + \frac{\mathbb{P}(D \cap \{A = j\} \cap \{B = i\})}{\mathbb{P}(D)} \\
= \ & \frac{\mathbb{P}(\{A = i\} \cap \{B = j\})}{\mathbb{P}(D)} + \frac{\mathbb{P}(\{A = j\} \cap \{B = i\})}{\mathbb{P}(D)} \\
= \ & \frac{1}{\mathbb{P}(D)} \left(\mathbb{P}(\{A = i\}) \times \mathbb{P}(\{B = j\}) + \mathbb{P}(\{A = j\}) \times \mathbb{P}(\{B = i\})\right) && \textit{(car A et B sont indépendantes)} \\
= \ & \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \times \frac{1}{N}\right) && \textit{(car $A \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])$ et $B \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])$)} \\
= \ & \frac{\cancel{N}}{N-1} \ \frac{2}{N^{\cancel{2}}} \ = \ \frac{2}{N\,(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } i < j : \mathbb{P}_D(\{Y_1 = i\} \cap \{Y_2 = j\}) = \frac{2}{N\,(N-1)}}$$

□

Exercice : ESSEC 2001

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord dans un cas particulier (**Partie I**), puis de façon générale (**Partie II**).

Partie I

1. Calculs préliminaires

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$. En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} \ = \ \binom{n+1}{q+1}$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall n \geqslant q, \ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : \sum\limits_{k=q}^{n} \dbinom{k}{q} = \dbinom{n+1}{q+1}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{k=q}^{q} \binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1$.
- D'autre part : $\binom{q+1}{q+1} = 1$

D'où $\mathcal{P}(q)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant q$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e. \sum\limits_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} = \binom{n+2}{q+1} \right)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} &= \left(\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} \right) + \binom{n+1}{q} \\ &= \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \binom{n+2}{q+1} && \textit{(d'après la formule du triangle de Pascal)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant q,\ \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}.}$$

□

b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)$$

Démonstration.

- Si $q = 1$, on trouve, à l'aide de la formule précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\ (n-1)!} = \frac{(n+1)\,n}{2}$$

$$\boxed{\text{Or } \binom{k}{1} = k. \text{ Donc } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}}$$

- Si $q = 2$, on trouve, à l'aide de la formule précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)!}{3!\ (n-2)!} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3 \times 2}$$

$$\boxed{\text{Or } \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}. \text{ Donc : } \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = 2 \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3}.}$$

- Si $q = 3$, on trouve, à l'aide de la formule précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)!}{4!\ (n-3)!} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4 \times 3 \times 2}$$

$$\boxed{\text{Or } \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3 \times 2}. \text{ Donc : } \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{4}.}$$

□

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré,
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré,
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés,
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_1)$, $\mathbb{E}(N_2)$ et $\mathbb{V}(N_2)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

Commentaire

- Si on confond jeton et numéro associé, alors l'ensemble des jetons est l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Dans ce cas, l'ensemble Ω des résultats possibles de l'expérience est l'ensemble des 2-uplets (c'est-à-dire des couples) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
- Comme Ω est un ensemble fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Enfin, on munit $(\Omega, \mathscr{A})$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.

2. **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(\{N_1 = i\})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\mathbb{P}_{\{N_1=i\}}(\{N_2 = j\})$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$.
En déduire : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{N_2 = j\}) = \dfrac{1}{n}$. Puis comparer les lois de N_1 et N_2.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × La première partie de l'expérience (premier tirage) consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi n issues (en l'occurrence les jetons de l'urne) numérotés de 1 à n.
  - × La v.a.r. N_1 prend la valeur du numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N_1 \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$.
  Si l'événement $\{N_1 = i\}$ est réalisé, c'est que le premier tirage a fourni le jeton numéro i.
  Dans ce cas, l'événement $\{N_2 = j\}$ est réalisé si et seulement si le deuxième tirage, qui s'effectue dans l'urne initiale privée du jeton i, a fourni le jeton numéro j.
  Les jetons étant tirés de manière équiprobable, on en conclut : $\mathbb{P}_{\{N_1=i\}}\big(\{N_2 = j\}\big) = \dfrac{1}{n-1}$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \ \Rightarrow\ \mathbb{P}_{\{N_1=i\}}\big(\{N_2 = j\}\big) = \frac{1}{n-1}}$$

Commentaire

On a évidemment : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}_{\{N_1=i\}}\big(\{N_2 = i\}\big) = 0$. En effet, si le jeton numéro i est tiré lors du premier tirage, il ne peut l'être lors du second.

- Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
  La famille $\big(\{N_1 = i\}\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{N_2 = j\}\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big) \times \mathbb{P}_{\{N_1=i\}}\big(\{N_2 = j\}\big) && \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big) \neq 0\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathbb{P}(\{N_1 = i\}) \times \mathbb{P}_{\{N_1=i\}}(\{N_2 = j\}) \ + \sum_{\substack{i=1 \\ i = j}}^{n} \mathbb{P}(\{N_1 = i\}) \times \mathbb{P}_{\{N_1=i\}}(\{N_2 = j\}) \\
= \ & \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{n}\,\frac{1}{n-1}\Big) + \cancel{\mathbb{P}\big(\{N_1 = i\}\big) \times \mathbb{P}_{\{N_1=j\}}\big(\{N_2 = j\}\big)} && \textit{(car } \mathbb{P}_{\{N_1=j\}}\big(\{N_2 = j\}\big) = 0\textit{)} \\
= \ & (n-1)\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{n-1} \ = \ \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{N_2 = j\}\big) = \frac{1}{n}}$$

Commentaire

- Même si ce n'était pas l'esprit du sujet (comme le démontre le « en déduire »), il était possible de proposer une démonstration par dénombrement de cette question. Détaillons le procédé ci-dessous.
- Soit $j \in [\![1,n]\!]$.
  Un 2-tirage réalisant l'événement $\{N_2 = j\}$ est un couple d'entiers distincts dont le deuxième élément est j. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :
  - le premier numéro de ce couple (c'est un numéro de $[\![1,n]\!]$ qui n'est pas j) : $\binom{n-1}{1} = n-1$ possibilités.
  - le deuxième numéro de ce couple (c'est j) : 1 possibilité.

  Il y a donc $n-1$ tels 2-tirages. Ainsi :

$$\mathbb{P}\big(\{N_2 = j\}\big) = \frac{\mathrm{Card}\big(\{N_2 = j\}\big)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\cancel{n-1}}{n\,\cancel{(n-1)}} = \frac{1}{n}$$

- Remarquons enfin :
  × $N_1(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
  En effet, le 1^er tirage peut fournir n'importe quel numéro de jeton de $[\![1,n]\!]$.
  × $N_2(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
  En effet, le 2^nd tirage fournit forcément un numéro de jeton (ainsi $N_2(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$) et :
  - le 2-tirage $(2,1)$ réalise l'événement $\{N_2 = 1\}$,
  - le 2-tirage $(1,2)$ réalise l'événement $\{N_2 = 2\}$,
  - le 2-tirage $(1,3)$ réalise l'événement $\{N_2 = 3\}$,
  - ...
  - le 2-tirage $(1,n)$ réalise l'événement $\{N_2 = n\}$.

Les v.a.r. N_1 et N_2 ont même ensemble image ($N_1(\Omega) = [\![1,n]\!] = N_2(\Omega)$) et sont telles que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\{N_1 = j\}) = \frac{1}{n} = \mathbb{P}(\{N_2 = j\})$$

$$\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ suivent toutes les deux la loi uniforme sur } [\![1, n]\!].}$$

Commentaire

- C'est toujours un bon réflexe de déterminer les ensembles images des v.a.r. considérés car cela permet de guider la rédaction. En particulier, il est important de savoir si l'on travaille sur des v.a.r. finies (de telles v.a.r. admettent des moments à tous les ordres) ou des v.a.r. non finies (dans ce cas, on devra systématiquement démontrer l'existence des moments). D'autre part :
  - × l'ensemble image peut permettre de conclure quant à la loi d'une v.a.r. X.
    En effet si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}(\{X = 1\})$.
  - × l'ensemble image peut permettre d'écarter des possibilités de lois pour X.
    Par exemple, si X est une v.a.r. finie alors X ne peut pas suivre une loi géométrique ou une loi de Poisson.
- C'est pourquoi on a précisé dans cette question les ensembles image $N_1(\Omega)$ et $N_2(\Omega)$. En réalité, cette précaution n'est pas nécessaire pour répondre à la question posée.
  En effet, si X et Y sont deux v.a.r. **discrètes**, alors :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi } \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\{X = x\}) = \mathbb{P}(\{Y = x\})$$

  (en particulier, ces probabilités sont nulles si x n'appartient pas aux ensembles image des v.a.r. considérées)
- On insiste sur le fait que la propriété précédente n'est vérifiée que pour les v.a.r. discrètes. Rappelons au passage que si X est une v.a.r. à densité alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(\{X = x\}) = 0$. Ainsi, si X et Y sont deux v.a.r. à densité on a toujours :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\{X = x\}) = 0 = \mathbb{P}(\{Y = x\})$$

  mais cela n'apporte pas d'information sur les lois de X et de Y.
- Notons enfin qu'à une question du type « comparer les lois des v.a.r. N_1 et N_2 », la seule réponse possible est que les v.a.r. N_1 et N_2 ont même loi. C'est donc dans ce sens qu'il faudra traiter la question. □

b) Calculer les espérances $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{E}(N_2)$, les variances $\mathbb{V}(N_1)$ et $\mathbb{V}(N_2)$.

Démonstration.
D'après la question précédente, N_1 et N_2 suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(N_1) = \frac{n+1}{2} = \mathbb{E}(N_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_1) = \frac{n^2-1}{12} = \mathbb{V}(N_2).}$$

Commentaire

Remarquons que les v.a.r. N_1 et N_2 suivent la même loi.

- Leurs **moments** sont donc égaux. En effet, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(N_1^r) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^r\ \mathbb{P}(\{N_1 = k\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^r\ \mathbb{P}(\{N_2 = k\}) \;=\; \mathbb{E}(N_2^r)$$

(les v.a.r. N_1 et N_2 admettent des moments à tout ordre car ce sont des v.a.r. finies)

- On prendra garde à ne pas commettre l'erreur grossière d'en conclure que les **v.a.r.** N_1 et N_2 sont égales. En effet, pour le 2-tirage $\omega = (2,1)$:

$$N_1(\omega) = 2 \;\neq\; 1 = N_2(\omega)$$

Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que : $N_1(\omega) \neq N_2(\omega)$. Ainsi, les v.a.r. N_1 et N_2 sont distinctes. $\square$

c) Montrer, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\mathbb{P}(\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\[2mm] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et en déduire :

$$\mathbb{E}(N_1\, N_2) \;=\; \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

Démonstration.
Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Remarquons tout d'abord :

L'événément $\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événément $\{N_1 = i\}$ est réalisé et l'événement $\{N_2 = j\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ On obtient le jeton i au 1$^{\text{er}}$ tirage et on obtient le jeton j au 2$^{\text{nd}}$ tirage

Deux cas se présentent alors :

- si $i = j$, alors :

$$\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\} = \varnothing$$

En effet, on ne peut pas tirer le jeton j lors du second tirage s'il l'a déja été lors du premier.
Ainsi : $\mathbb{P}(\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

- si $i \neq j$, alors d'après ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}(\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}) = \mathbb{P}(\{N_1 = i\})\ \mathbb{P}_{\{N_1=i\}}(\{N_2 = j\}) = \frac{1}{n}\ \frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n : \mathbb{P}(\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \\[2mm] 0 & \text{si } i = j \end{cases}}$$

- Les v.a.r. N_1 et N_2 admettent un moment d'ordre 2 car ce sont des v.a.r. finies.
On en déduit que le produit $N_1\, N_2$ admet une espérance.

Commentaire

- Dans le cas général :

$$\left.\begin{array}{l} \times\ X \text{ admet un moment d'ordre 2} \\ \times\ Y \text{ admet un moment d'ordre 2} \end{array}\right\} \Rightarrow XY \text{ admet une espérance}$$

- On rappelle le cas particulier où X et Y sont indépendantes :

$$\left.\begin{array}{l} \times\ X \text{ admet une espérance} \\ \times\ Y \text{ admet une espérance} \\ \times\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{array}\right\} \Rightarrow XY \text{ admet une espérance}$$

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_1N_2) &= \sum_{i\in N_1(\Omega)} \left(\sum_{j\in N_2(\Omega)} i\times j\ \mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=j\})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} i\times j\ \mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=j\})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \left(\sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=j\})\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} j\ \mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=j\}) \\ = & \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} j\ \mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=j\}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^{n} j\ \mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=j\}) \\ = & \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} j\ \mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=j\}) + i\ \cancel{\mathbb{P}(\{N_1=i\}\cap\{N_2=i\})} \\ = & \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} j\ \frac{1}{n(n-1)} \\ = & \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} j \right) \\ = & \frac{1}{n(n-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} j \right) - i \right) \\ = & \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n\ (n+1)}{2} - i \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_1\,N_2) &= \sum_{i=1}^{n} i\,\left(\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\,-\,i\right)\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\,\sum_{i=1}^{n} i\,\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\,-\,i\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\,\sum_{i=1}^{n} \frac{n\,(n+1)}{2}\,i\,-\,\frac{1}{n(n-1)}\,\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{\cancel{n}(n-1)}\,\frac{\cancel{n}\,(n+1)}{2}\,\sum_{i=1}^{n}\,i\,-\,\frac{1}{\cancel{n}(n-1)}\,\frac{\cancel{n}\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{n-1}\,\frac{n+1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}\,-\,\frac{1}{n-1}\,\frac{(n+1)\,(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{24}\,\frac{n+1}{n-1}\,\left(6\,n\,(n+1)-4\,(2n+1)\right) \\
&= \frac{1}{24}\,\frac{n+1}{n-1}\,\left(6\,n^2-2n-4\right) \\
&= \frac{1}{12}\,\frac{n+1}{n-1}\,\left(3\,n^2-n-2\right) \\
&= \frac{1}{12}\,\frac{n+1}{\cancel{n-1}}\,(3n+2)\,\cancel{(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N_1N_2)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}}$$

- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(N_1,N_2) &= \mathbb{E}(N_1N_2)-\mathbb{E}(N_1)\,\mathbb{E}(N_2) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}-\frac{n+1}{2}\,\frac{n+1}{2} \\
&= \frac{(n+1)}{12}\,\big(3n+2-3(n+1)\big) \\
&= -\frac{n+1}{12}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(N_1,N_2)=-\frac{n+1}{12}}$$

- Enfin, par définition :

$$\begin{aligned}
\rho(N_1, N_2) &= \frac{\mathrm{Cov}(N_1, N_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(N_1)\mathbb{V}(N_2)}} \\
&= \frac{-\frac{n+1}{12}}{\sqrt{\left(\frac{n^2-1}{12}\right)^2}} \\
&= \frac{-\frac{n+1}{12}}{\left|\frac{n^2-1}{12}\right|} \\
&= -\frac{n+1}{12}\,\frac{12}{n^2-1} \\
&= -\frac{\cancel{n+1}}{12}\,\frac{12}{(n-1)\ \cancel{(n+1)}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho(N_1, N_2) = -\frac{1}{n-1}}$$

□

d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $\mathbb{V}(N_1 + N_2)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $N_1 + N_2$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(N_1 + N_2) &= \mathbb{V}(N_1) + 2\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2) + \mathbb{V}(N_2) \\
&= 2\,\frac{n^2-1}{12} - 2\,\frac{n+1}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{6} - \frac{n+1}{6} \\
&= \frac{n+1}{6}(n-1-1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}}$$

□

3. **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y**

a) Montrer, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$: $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \dfrac{2}{n(n-1)}$.
Que valent ces probabilités sinon ?

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Remarquons tout d'abord :

L'événement $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\{X = i\}$ est réalisé et l'événement $\{Y = j\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Le plus petit numéro des 2 jetons est i et le plus grand numéro des 2 jetons est j

$\Leftrightarrow$ Le jeton i est obtenu au 1^{er} tirage et le jeton j est obtenu au 2^{nd}
ou le jeton j est obtenu au 1^{er} tirage et le jeton i est obtenu au 2^{nd} $(*)$

Deux cas se présentent alors.

- Si $i \geqslant j$, alors : $\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \varnothing$.
  En effet, le plus petit jeton tiré ne peut être :
  $\times$ strictement plus grand que le plus grand jeton tiré,
  $\times$ égal au plus grand jeton tiré puisque les tirages ont lieu sans remise.
  Ainsi : $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Si $i < j$, alors d'après $(*)$:

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} \ = \ \big(\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}\big) \cup \big(\{N_1 = j\} \cap \{N_2 = i\}\big)$$

Les deux événements composant cette union sont incompatibles. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) & = & \mathbb{P}(\{N_1 = i\} \cap \{N_2 = j\}) + \mathbb{P}(\{N_1 = j\} \cap \{N_2 = i\}) \\ & = & \dfrac{1}{n(n-1)} + \dfrac{1}{n(n-1)} \end{array} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Finalement } \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n \\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant n \end{array} \right.}$$

Commentaire

- Il était possible de proposer une démonstration par dénombrement de cette question dans le cas $i > j$. Détaillons le procédé ci-dessous.
- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$.
  Un 2-tirage réalisant l'événement $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ est un couple d'entiers distincts dont le plus petit élément est i et le plus grand élément est j.
  Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :
  - la position du plus petit élément de ce couple ($1^{\text{ère}}$ ou $2^{\text{ème}}$ coordonnée du couple) : 2 possibilités.
  - la position du plus grand élément de ce couple : 1 possibilité restante.

  Il y a donc 2 tels 2-tirages ((i, j) et (j, i)). Ainsi :

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \ = \ \frac{\text{Card}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{n\,(n-1)}$$

□

b) En déduire les probabilités $\mathbb{P}(\{Y = j\})$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $\mathbb{P}(\{X = i\})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.
(on vérifiera que les formules donnant $\mathbb{P}(\{Y = j\})$ et $\mathbb{P}(\{X = i\})$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$)

Démonstration.

- Déterminons la loi de Y.

  $\times$ Tout d'abord : $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
  En effet, $Y(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ (car Y prend la valeur d'un numéro de jeton) et :
  - le 2-tirage $(1, 2)$ réalise l'événement $\{Y = 2\}$,
  - le 2-tirage $(1, 3)$ réalise l'événement $\{Y = 3\}$,
  - $\cdots$
  - le 2-tirage $(1, n)$ réalise l'événement $\{Y = n\}$.

- l'événement $\{Y=1\}$ n'est jamais réalisé.
  En effet, l'événement $\{Y=1\}$ est réalisé si et seulement si le plus grand numéro des jetons tirés est 1. Dans ce cas, comme les tirages s'effectuent sans remise, l'autre jeton porte donc un numéro strictement plus petit que 1, ce qui est impossible.

× Soit $j \in [\![2,n]\!]$.
La famille $(\{X=i\})_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y=j\}) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{n-1} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ i\geqslant j}}^{n-1} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} && \textit{(toujours d'après la question précédente)} \\
&= 2\,\frac{j-1}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{Y(\Omega)=[\![2,n]\!] \text{ et : } \forall j\in[\![2,n]\!],\ \mathbb{P}(\{Y=j\}) = 2\,\frac{j-1}{n(n-1)}.}$$

× Dans le cas où $j=1$:
- d'une part : $\{Y=1\}=\varnothing$ (comme expliqué plus haut). D'où : $\mathbb{P}(\{Y=1\})=\mathbb{P}(\varnothing)=0$.
- d'autre part : $2\,\dfrac{1-1}{n(n-1)}=0$.

$$\boxed{\text{La formule obtenue reste valable dans le cas où } j=1.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $j=1$. En effet, dans ce cas, la deuxième somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- <u>Déteminons la loi de X</u>.

× Tout d'abord : $X(\Omega)=[\![1,n-1]\!]$.
En effet, $X(\Omega)\subset[\![1,n]\!]$ (car X prend la valeur d'un numéro de jeton) et :
- le 2-tirage $(1,n)$ réalise l'événement $\{X=1\}$,
- le 2-tirage $(2,n)$ réalise l'événement $\{X=2\}$,
- $\cdots$
- le 2-tirage $(n-1,n)$ réalise l'événement $\{X=n-1\}$.
- l'événement $\{X=n\}$ n'est jamais réalisé.
  En effet, l'événement $\{X=n\}$ est réalisé si et seulement si le plus petit numéro des jetons tirés est n. Dans ce cas, comme les tirages s'effectuent sans remise, l'autre jeton porte donc un numéro strictement plus grand que n, ce qui est impossible.

× Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.
La famille $(\{Y = j\})_{j \in [\![2,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X = i\}) &= \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \\
&= \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^{n} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) + \cancel{\sum_{\substack{j=2 \\ j \leqslant i}}^{n} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})} \\
&= \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{n(n-1)} && \textit{(toujours d'après la question précédente)} \\
&= 2\, \frac{(n-(i+1)+1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \text{ et : } \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}(\{X = i\}) = 2\, \frac{n-i}{n(n-1)}}$$

× Dans le cas où $i = n$:
- d'une part : $\{X = n\} = \varnothing$ (comme expliqué plus haut). D'où : $\mathbb{P}(\{X = n\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- d'autre part : $2\, \dfrac{n-n}{n(n-1)} = 0$.

$$\boxed{\text{La formule obtenue reste valable dans le cas où } i = n.}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $i = n$. En effet, dans ce cas, la deuxième somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

□

c) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X = i\})$ et $\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\})$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnellement à $\{Y = j\}$ et la loi de Y conditionnellement à $\{X = i\}$.

Démonstration.

- Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que : $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
  × Tout d'abord : $\mathbb{P}(\{Y = j\}) \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X = i\})$ est bien définie.
  × De plus, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X = i\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{Y = j\})} = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(j-1)}{n(n-1)}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{n(n-1)}} \times \frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2}\,(j-1)} = \frac{1}{j-1}$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ tel que } i < j : \mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X = i\}) = \frac{1}{j-1}}$$

- Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que : $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
  × Tout d'abord : $\mathbb{P}(\{X = i\}) \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y = j\})$ est bien définie.

× De plus, par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=i\})} = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{2(n-i)}{n(n-1)}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{n(n-1)}} \times \frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2}\,(n-i)} = \frac{1}{n-i}$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i<j : \mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) = \frac{1}{n-i}}$$

- Soit $j \in Y(\Omega) = [\![2,n]\!]$.
Déterminons maintenant la loi de X conditionnellement à l'événement $\{Y=j\}$.
   × D'après la question ***3.b)*** : $X(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$.
   × Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. Deux cas se présentent :
      - si $i<j$, alors d'après ce qui précède :

$$\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=i\}) = \frac{1}{j-1}$$

      - si $i \geqslant j$, alors d'après ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=i\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{Y=j\})} = \frac{0}{\mathbb{P}(\{Y=j\})} = 0$$

   En résumé :

$$\mathbb{P}_{\{Y=j\}}\big(\{X=i\}\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{j-1} & \text{si } i \in [\![1,j-1]\!] \\ 0 & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi de } X \text{ conditionnellement à l'événement } \{Y=j\} \text{ est la loi } \mathcal{U}([\![1,j-1]\!]).}$$

- Soit $i \in X(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$.
Déterminons la loi de Y conditionnellement à l'événement $\{X=i\}$.
   × D'après la question ***3.b)*** : $Y(\Omega) = [\![2,n]\!]$.
   × Soit $j \in [\![2,n]\!]$. Deux cas se présentent :
      - si $j>i$, alors d'après ce qui précède :

$$\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) = \frac{1}{n-i}$$

      - si $j \leqslant i$, alors d'après ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=j\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=i\})} = \frac{0}{\mathbb{P}(\{X=i\})} = 0$$

   En résumé :

$$\mathbb{P}_{\{X=i\}}\big(\{Y=j\}\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-i} & \text{si } j \in [\![i+1,n]\!] \\ 0 & \text{si } j \leqslant i \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi de } Y \text{ conditionnellement à l'événement } \{X=i\} \text{ est la loi } \mathcal{U}([\![i+1,n]\!]).}$$

□

d) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y.
En déduire que $\mathbb{E}(n+1-X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(n+1-X) = \mathbb{V}(Y)$, puis en déduire les expressions de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y)$.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $(n+1-X)(\Omega)$.
Notons $h : x \mapsto n+1-x$, de sorte que : $n+1-X = h(X)$.
On rappelle : $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$. On en déduit :

$$(n+1-X)(\Omega) \ = \ \big(h(X)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X(\Omega)\big) \ = \ h([\![1, n-1]\!]) \ \subset \ [\![1, n-1]\!]$$

En effet, soit $k \in [\![1, n-1]\!]$:
× $h(k) = n+1-k \in \mathbb{Z}$,
× de plus :

$$\begin{array}{cc} \text{comme} & 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \text{alors} & -1 \geqslant -k \geqslant -n+1 \\ \text{donc} & n \geqslant (n+1)-k \geqslant 2 \\ \text{d'où} & n \geqslant h(k) \geqslant 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } (n+1-X)(\Omega) \subset [\![2, n]\!].}$$

Commentaire

On a affaire ici à une transformée affine de la v.a.r. X. La fonction h est donc particulièrement simple. De ce fait, il est possible de déterminer $(n+1-X)(\Omega)$ en faisant agir, étape par étape, h sur $X(\Omega)$. Plus précisément :

$$\begin{array}{cl} \text{Comme} & X(\Omega) = [\![1, n-1]\!] \\ \text{alors} & (-X)(\Omega) = [\![-n+1, -1]\!] \\ \text{donc} & (n+1-X)(\Omega) = [\![2, n]\!] \end{array}$$

- Soit $j \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{n+1-X = j\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{-X = -n-1+j\}\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\{X = n+1-j\}\big) & \\ & = & 2\,\dfrac{n-(n+1-j)}{n(n-1)} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}} \textit{ et car } n+1-j \in [\![1, n-1]\!]) \\ & = & 2\,\dfrac{j-1}{n(n-1)} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall j \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{n+1-X = j\}\big) \ = \ 2\,\dfrac{j-1}{n(n-1)} \ = \ \mathbb{P}\big(\{Y = j\}\big).}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ et } n+1-X \text{ ont la même loi.}}$$

Commentaire

- Ce résultat n'est pas surprenant. Encore une fois, la question « comparer le lois de deux v.a.r. » n'attend qu'une seule réponse, à savoir que ces deux v.a.r. suivent la même loi.
- On rappelle aussi que cela ne signifie en aucun cas que les v.a.r. Y et $n+1-X$ sont égales. Ce n'est pas le cas. Pour le 2-tirage $\omega = (2,1)$, on a $X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 2$ et donc :
$$Y(\omega) = 2 \neq n = n+1-X(\omega) = (n+1-X)(\omega)$$

- Les v.a.r. $n+1-X$ et Y admettent des moments à tous les ordres car elles sont finies. En particulier, elles admettent une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Comme } N+1-X \text{ et } Y \text{ ont même loi, on a : } \mathbb{E}(n+1-X) = \mathbb{E}(Y) \text{ et } \mathbb{V}(n+1-X) = \mathbb{V}(Y).}$$

- De plus :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y) & = & \mathbb{E}(n+1-X) & \\ & = & \mathbb{E}(n+1) - \mathbb{E}(X) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & n+1-\mathbb{E}(X) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(X) = n+1-\mathbb{E}(Y).}$$

- Enfin :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(Y) & = & \mathbb{V}(n+1-X) & \\ & = & (-1)^2\, \mathbb{V}(X) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \mathbb{V}(X) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y).}$$

Commentaire

Il convient de rappeler que l'opérateur variance n'est en aucun cas linéaire. Il ne faut donc surtout pas écrire l'égalité suivante :

$$\mathbb{V}(n+1-X) \cancel{=} \mathbb{V}(n+1) - \mathbb{V}(X)$$

□

4. Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer les espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n.

Démonstration.

Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j\in Y(\Omega)} j\ \mathbb{P}(\{Y=j\}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\ \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j(j-1) \\
&= \frac{2}{n\cancel{(n-1)}}\ \frac{\cancel{(n-1)}\, n\,(n+1)}{3} && \textit{(d'après les formules du début d'énoncé)} \\
&= \frac{2}{3}\,(n+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathbb{E}(Y) = \frac{2\,(n+1)}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X) = n+1-\frac{2\,(n+1)}{3} = \frac{n+1}{3}.}$$

□

b) Exprimer sous forme factorisée $\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big)$, puis $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction de n.

Démonstration.

- Les v.a.r. Y^2 et $Y(Y-2)$ sont des v.a.r. finies comme produits de deux v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments à tous les ordres.
- Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) &= \sum_{j\in Y(\Omega)} j(j-2)\ \mathbb{P}(\{Y=j\}) && \textit{(par théorème de transfert)} \\
&= \sum_{1}^{n} j(j-2)\ \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j(j-1)(j-2) \\
&= \frac{2}{n\cancel{(n-1)}}\ \frac{(n+1)\, n\, \cancel{(n-1)}\,(n-2)}{4} && \textit{(d'après les formules du début d'énoncé)} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y(Y-2)) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}}$$

- Comme $Y = Y(Y-2) + 2Y$, on a : :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}\big(Y(Y-2)+2Y\big) \\
&= \mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big) + 2\,\mathbb{E}(Y) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4}{3}\,(n+1) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(3(n-2)+8) \\
&= \frac{n+1}{6}\,(3n-6+8) \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}\big(Y^2\big) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4}{9}\,(n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{18}\,\big(3\,(3n+2) - 8\,(n+1)\big) \\
&= \frac{n+1}{18}\,(9n+6-8n-8) \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{18}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.}$$

□

5. Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Vérifier : $X + Y = N_1 + N_2$.
En déduire sous forme factorisée la variance de $X+Y$ et la covariance de X et Y.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $X + Y = N_1 + N_2$.
En effet, la somme des deux jetons tirés peut s'écrire comme la somme du plus grand jeton tiré et du plus petit jeton tiré.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la quesiton } \textbf{\textit{2.c)}} : \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(N_1+N_2) = \frac{(n+1)(n-2)}{6}.}$$

- La v.a.r. $X+Y$ admet un moment d'ordre 2 en tant que somme de v.a.r. X et Y qui admettent chacune un moment d'ordre 2. On a alors :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

Commentaire

On peut utiliser cette formule sans démonstration. Rappelons toutefois :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y, X+Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X, X+Y) + \mathrm{Cov}(Y, X+Y) && \textit{(par linéarité à gauche)} \\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) && \textit{(par linéarité à droite)} \\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) \\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n-2)}{6} - 2\,\frac{(n+1)(n-2)}{18} \right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{(n+1)(n-2)}{36}(6-4) \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{36}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{36}}$$

□

b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

Démonstration.
Les v.a.r. X et Y

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}} \\
&= \frac{\frac{(n+1)(n-2)}{36}}{\sqrt{\left(\frac{(n+1)(n-2)}{18}\right)^2}} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{36}\,\frac{18}{(n+1)(n-2)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \rho(X,Y) = \frac{1}{2} \text{ et donc } \rho(X,Y) \text{ est bien indépendant de } n.}$$

□

Partie II

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ et des variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ et on suppose $\mathbb{V}(X) > 0$ (on rappelle que $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))\;(Y - \mathbb{E}(Y))\big) \quad \text{ou encore} \quad \text{Cov}(X,Y) \;=\; \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

***6.* Covariance des variables aléatoires X et Y**

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(\lambda X + Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$\mathbb{V}(\lambda X + Y) \;=\; \lambda^2\,\mathbb{V}(X) + 2\lambda\,\text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

Démonstration.

- La v.a.r. $\lambda\,X + Y$ admet une variance comme combinaison linéaire de v.a.r. admettant une variance. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\lambda X + Y) &= \mathbb{V}(\lambda X) + 2\ \text{Cov}(\lambda X, Y) + \mathbb{V}(Y) \\ &= \lambda^2\ \mathbb{V}(X) + 2\,\lambda\ \text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y) \end{aligned}$$

(par propriété de la variance et linéarité à gauche de la variance)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(\lambda X + Y) = \lambda^2\ \mathbb{V}(X) + 2\,\lambda\ \text{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)}$$

□

b) En déduire : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \;\leqslant\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.
À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité : $\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 \;=\; \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$?

Démonstration.

- On note f la fonction polynomiale définie par :

$$f : \lambda \mapsto \mathbb{V}(X)\,\lambda^2 + 2\,\text{Cov}(X,Y)\,\lambda + \mathbb{V}(Y)$$

La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2 en λ.
On note P le polynôme de degré 2 associé.

- D'après la question précédente :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = \mathbb{V}(\lambda\,X + Y)$$

Or une variance est toujours positive. Ainsi : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) \geqslant 0$.

- La fonction f étant positive, le polynôme associé P est de signe constant.
Son discriminant Δ est donc négatif ou nul. Or :

$$\Delta \;=\; \big(2\,\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - 4\,\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \;=\; 4\left(\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)\right)$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ll} \text{comme} & \Delta \leqslant 0 \\ \text{alors} & 4\left(\big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)\right) \leqslant 0 \\ \text{donc} & \big(\text{Cov}(X,Y)\big)^2 - \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \leqslant 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y).}$$

- Déterminons maintenant sous quelle condition a lieu l'égalité de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
& |\rho(X,Y)| = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) \\
\Leftrightarrow\quad & \Delta = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \text{Le polynôme } P \text{ admet une unique racine } \alpha \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists !\, \alpha \in \mathbb{R},\ P(\alpha) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \exists !\, \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbb{V}(\alpha\, X + Y) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \exists !\, \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha\, X + Y \text{ est constante presque sûrement} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists !\, \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ Y = -\alpha\, X + \beta \text{ presque sûrement}
\end{aligned}$$

Finalement l'égalité $\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$ est vérifiée si et seulement si la v.a.r. Y est une transformée affine de X presque sûrement.

Commentaire

L'inégalité $\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$ est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz. Sa démonstration n'est pas explicitement au programme mais requiert uniquement des outils présents dans le programme. Ainsi, cette démonstration peut faire l'objet de questions dans les énoncés de concours (c'est régulièrement le cas). Il est donc vivement conseillé d'avoir travaillé ce raisonnement avant les écrits. De manière générale, cet énoncé et sa démonstration font partie de la culture mathématique qu'il est bon d'avoir en se présentant aux concours. □

7. Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1,+1]$.
Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Tout d'abord, par définition : } \rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.}$$

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{lll}
 & \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y) & \\
\text{alors} & \dfrac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)} \leqslant 1 & \textit{(car } \mathbb{V}(X) > 0 \textit{ et } \mathbb{V}(Y) > 0\textit{)} \\
\text{d'où} & \sqrt{\dfrac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}} \leqslant 1 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}
\end{array}$$

Or :

$$\sqrt{\frac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}} \;=\; \frac{\sqrt{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} \;=\; \frac{|\mathrm{Cov}(X,Y)|}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \;=\; \left|\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}\right| \;=\; |\rho(X,Y)|$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } |\rho(X,Y)| \leqslant 1, \text{ ou encore } \rho(X,Y) \in [-1,1].}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) \in \{-1,1\} \quad &\Leftrightarrow \quad \big(\rho(X,Y)\big)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Y)}}\right)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2}{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \big(\mathrm{Cov}(X,Y)\big)^2 = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question ***6.b)***, $\rho(X,Y) \in \{-1,1\}$ si et seulement si la v.a.r. Y est une transformée affine de X presque surement.

Commentaire

Il est possible d'être encore plus précis.
Rappelons que d'après la question ***6.b)*** :

$$\begin{array}{rl} & \rho(X,Y) \in \{-1,1\} \\ \Leftrightarrow & |\rho(X,Y)| = 1 \\ \Leftrightarrow & \text{Le polynôme } P \text{ admet une unique racine } \alpha \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \exists!\, \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \beta \in \mathbb{R},\ Y = -\alpha\, X + \beta \text{ presque sûrement} \end{array}$$

Par la formule des racines des polynômes de second degré, on obtient que l'unique racine α de P s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{-\cancel{2}\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{\cancel{2}\,\mathbb{V}(X)} \\ & = & -\ \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(X)}\ \dfrac{\sigma(X)\,\sigma(Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \\ & = & -\ \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}\ \dfrac{\sigma(X)\,\sigma(Y)}{\mathbb{V}(X)} \\ & = & -\rho(X,Y)\ \dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \qquad \textit{(car } \mathbb{V}(X) = \big(\sigma(X)\big)^2\textit{)} \end{array}$$

On en déduit finalement, d'après ce qui précède :

$$\boxed{\rho(X,Y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } Y = \dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\ X + \beta \text{ presque sûrement}}$$

(dans ce cas, la v.a.r. Y est une transformée affine strictement croissante de X)

$$\boxed{\rho(X,Y) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } Y = -\dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\ X + \beta \text{ presque sûrement}}$$

(dans ce cas, la v.a.r. Y est une transformée affine strictement décroissante de X)

□

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Démonstration.
Si les v.a.r. X et Y sont indépendantes, alors : $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. On en déduit :

$$\rho(X,Y) \ = \ \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, alors : } \rho(X,Y) = 0.}$$

□

Exercice : `EDHEC 2015`

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. a) Montrer : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que la fonction $f_m : t \mapsto \dfrac{t^m}{1-t^2}$ est continue sur le **segment** $[0, x]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt$ est bien définie.
- Soit $t \in [0, x[$.

$$\begin{array}{llcccl}
 & 0 \leqslant & t & \leqslant & x & \\
\text{donc} & 0 \leqslant & t^2 & \leqslant & x^2 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & 0 \geqslant & -t^2 & \geqslant & -x^2 & \\
\text{d'où} & 1 \geqslant & 1-t^2 & \geqslant & 1-x^2 & \\
\text{puis} & 1 \leqslant & \dfrac{1}{1-t^2} & \leqslant & \dfrac{1}{1-x^2} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{enfin} & 0 \leqslant t^m \leqslant & \dfrac{t^m}{1-t^2} & \leqslant & \dfrac{t^m}{1-x^2} & \textit{(car } t^m \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant x$) :

$$\underbrace{\int_0^x 0\, dt}_{=0} \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}\, dt$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}\, dt &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^x t^m\, dt \\
&= \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{m+1} \left[\, t^{m+1} \,\right]_0^x \\
&= \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{m+1} \left(x^{m+1} - \cancel{0^{m+1}}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{m+1} && \textit{(car } x^{m+1} \leqslant 1 \textit{ et } \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{m+1} \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.}$$

□

b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$$

Or :

× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} 0 = 0$,

× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt = 0.}$$

Commentaire

Il n'y a pas, dans le programme ECE, de théorème permettant de passer à la limite sous le symbole d'intégration. Toute tentative de ce genre révèle donc une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

2. a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

Démonstration.
Soit $t \in [0,1[$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(t^2\right)^j = \frac{1-\left(t^2\right)^k}{1-t^2} \qquad \textit{(car } t^2 \neq 1\textit{)}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[,\ \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

□

b) En déduire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in [0,1[,\ \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt &= \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}\, dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale sur un segment)}\end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}\, dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale sur un segment)} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \left[\, t^{2j+1}\, \right]_0^x \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \left(x^{2j+1} - \cancel{0^{2j+1}}\right)\end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, on obtient : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt.$ □

c) Utiliser la question ***1.*** pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.*** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2k+1}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt = 0.$

Commentaire

- Il était possible de rédiger autrement.
  En question ***1.***, on a démontré que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt$ est bien définie. On peut donc noter u_m la quantité définie par cette intégrale. On démontre en ***1.a)*** que la suite (u_m) est convergente et de limite nulle. Il en est de même de toutes ses sous-suites.
  En particulier : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} u_{2m} = 0$. Autrement dit :

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2m}}{1-t^2}\, dt = 0$$

- On détaille dans le point précédent avec précision les mécanismes permettant d'obtenir la limite. Mais les arguments de composition de limite ou de changement de variable (on pose $m = 2k$) sont tout autant acceptables.

- Ainsi, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ apparaît comme la somme de deux quantités admettant une limite finie lorsque k tend vers $+\infty$.
  On en déduit que la série $\sum \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est convergente, de somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \lim_{k\to+\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt\right) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt
\end{aligned}$$

La série $\sum \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est convergente, de somme : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt.$

□

d) Conclure : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La série $\sum \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est convergente. On a donc :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \\ &= \cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}}\, dt - \left(\cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \right)\end{aligned}$$

*(d'après la question **2.c)** et la question **2.b)**)*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt}$$

- Il reste à démontrer cette égalité lorsque $k = 0$.
  D'après la question ***2.c)***, on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt = \int_0^x \frac{t^{2\times 0}}{1-t^2}\, dt$$

  On en déduit que l'égalité est aussi vérifiée lorsque $k = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt}$$

□

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\, dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce.
Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ».
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de pile) indépendantes et de même paramètre p (probabilité d'obtention de pile).
- La v.a.r. N est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \sim \mathcal{G}(p).}$$

□

4. ***a)*** Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

Démonstration.

- Si `x` est une variable, l'instruction `floor(x)` permet d'obtenir la partie entière par défaut de `x`.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\lfloor x \rfloor = x \;\Leftrightarrow\; x \text{ est un entier}$$
On a alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = m \;&\Leftrightarrow\; \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} \\ &\Leftrightarrow\; \frac{m}{2} \text{ est un entier} \\ &\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{N},\ \frac{m}{2} = n \\ &\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{N},\ m = 2 \times n \\ &\Leftrightarrow\; m \text{ est pair} \end{aligned}$$

Ainsi, `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

□

5. ***a)*** Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X = 2k+1\}\big)$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \geqslant j$.

- Si l'événement $\{N = 2j\}$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j$.
L'urne est alors remplie avec des boules numérotés de 1 à $2j$.
- Dans ce cas, l'événement $\{X = 2k+1\}$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne. Or, comme $k \geqslant j$, alors $2k+1 \geqslant 2j+1 > 2j$.
Il est donc impossible que le joueur pioche une telle boule.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X = 2k+1\}\big) = 0.}$$

□

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X = 2k+1\}\big)$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \geqslant j+1$.
L'argument est similaire à celui de la question précédente : si le premier pile apparaît au rang $2j+1$ alors le joueur ne peut tirer une boule numérotée $2k+1 \geqslant 2(j+1)+1 = 2j+2 > 2j+1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X = 2k+1\}\big) = 0.}$$

□

c) Déterminer $\mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X = 2k+1\}\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, j-1]\!]$.

- Si l'événement $\{N = 2j\}$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j$. L'urne est alors remplie avec des boules numérotés de 1 à $2j$.
- Dans ce cas, l'événement $\{X = 2k+1\}$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne. Or, comme $k \in [\![0, j-1]\!]$ alors $2k+1 \in [\![1, 2j-1]\!] \subset [\![1, 2j]\!]$.

Toutes les boules de l'urne étant piochées avec la même probabilité, on en déduit :
$$\mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X = 2k+1\}\big) = \frac{1}{2j}.$$

Commentaire

La notation $2k+1$ désigne un entier impair. Attention cependant à ne pas en tirer de conclusion hâtive. L'événement $\{X = 2k+1\}$ est réalisé si et seulement si on pioche `LA` boule impaire numérotée $2k+1$ de l'urne. Cet événement ne doit en aucun cas être confondu avec l'événement A_{2j} « piocher une boule impaire dans l'urne contenant les boules numérotées 1 à $2j$ ». Cet dernier événement est réalisé si et seulement on tire une boule portant un numéro de l'ensemble $\{1, 3, 5, \dots, 2j-1\}$. On peut donc l'écrire :

$$A_{2j} \; = \; \bigcup_{k=0}^{j-1} \{X = 2k+1\}$$

□

d) Déterminer $\mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X = 2k+1\}\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, j]\!]$.
L'argument est similaire à celui de la question précédente.

- Si l'événement $\{N = 2j+1\}$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j+1$.
- Dans ce cas, l'événement $\{X = 2k+1\}$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne (avec $2k+1 \in [\![1, 2j+1]\!]$).

Toutes les boules de l'urne étant piochées avec la même probabilité, on en déduit :
$$\mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X = 2k+1\}\big) = \frac{1}{2j+1}.$$

Commentaire

- Le raisonnement étant similaire au précédent, donner directement le résultat permet certainement d'obtenir l'ensemble des points alloués à cette question.
- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie au nombre de questions intermédiaires présentes dans l'énoncé. Les questions ***5.a)***, ***5.b)***, ***5.c)***, ***5.d)***, sont destinées à résoudre la question ***6.a)***. Avoir traité ces questions en amont permet de se focaliser sur les difficultés inhérentes à la question ***6***.
  Ce découpage présente quand même certains désavantages :
  - × il y a une impression de répétition. Les question ***5.a)*** et ***5.b)*** sont assez similaires et il en est de même des questions ***5.c)*** et ***5.d)***.
  - × la multiplication des questions intermédiaires a tendance à rendre moins lisible le but du sujet. Ici, les questions ***5.a)*** à ***5.d)*** ne sont pas motivées même si on se doute qu'elles sont destinées à aider à traiter la suite du sujet.

□

6. a) Justifier : $\mathbb{P}\big(\{X = 2k+1\}\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=n\}}\big(\{X=2k+1\}\big)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X = 2k+1\}\big) \ = \ \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} \ + \ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big(\{N=n\}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\} \cap \{X=2k+1\}\big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=n\}}\big(\{X=2k+1\}\big) \qquad \textit{(car pour tout } n \in \mathbb{N}^*\textit{, on a : } \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big) = p\,q^{n-1} \neq 0\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=n\}}\big(\{X=2k+1\}\big)}$$

- L'énoncé suggère alors de scinder la somme suivant la parité de n.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) \\ = &\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=n\}}\big(\{X=2k+1\}\big) \ + \ \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=n\}}\big(\{X=2k+1\}\big)\end{aligned}$$

- Études chacune de ces sommes.

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=n\}}\big(\{X=2k+1\}\big) \\ = &\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X=2k+1\}\big) \\ = &\sum_{\substack{j=1 \\ k \in [\![0, j-1]\!]}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X=2k+1\}\big) \ + \ \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ k \geqslant j}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X=2k+1\}\big)} \\ = &\sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j\}}\big(\{X=2k+1\}\big) \qquad (*) \\ = &\sum_{j=k+1}^{+\infty} p\,q^{2j-1} \times \frac{1}{2j} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3}} \textit{ et la question } \textbf{\textit{5.c)}}\textit{)} \\ = &\ \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j}\end{aligned}$$

La ligne $(*)$ est obtenue en constatant que pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} j \in [\![1, +\infty[\![\\ k \in [\![0, j-1]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant j \\ 0 \leqslant k \leqslant j-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant j \\ k+1 \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ k+1 \leqslant j \right. \Leftrightarrow \left\{\ j \in [\![k+1, +\infty[\![\right.$$

- On procède de même pour la deuxième somme.

$$\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=n\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=n\}}\big(\{X=2k+1\}\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j+1\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X=2k+1\}\big)$$

$$= \sum_{\substack{j=0\\ k\in[\![0,j]\!]}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j+1\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X=2k+1\}\big) + \cancel{\sum_{\substack{j=0\\ k\geqslant j+1}}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j+1\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X=2k+}}$$

$$= \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{N=2j+1\}\big)\, \mathbb{P}_{\{N=2j+1\}}\big(\{X=2k+1\}\big)$$

$$= \sum_{j=k}^{+\infty} p\, q^{2j} \times \frac{1}{2j+1} = \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}$$ *(d'après la question **3** et la question **5.c)**)*

- Finalement :

$$\mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) = \frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

□

b) En déduire : $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt$.

Démonstration.
Soit $k\in\mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)$$

$$= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\, dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt\right)$$ *(d'après la question **2.d)** avec $x=q\in[0,1[$ et la propriété admise)*

$$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}\, dt$$ *(par linéarité de l'intégrale)*

$$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}\,(t+1)}{(1-t)(1+t)}\, dt$$

$$= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{X=2k+1\}\big) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt.}$$

□

7. a) Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt = 0$.

Démonstration.

- Soit $t \in [0, q]$. Alors :

$$\begin{array}{llcccl} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & q \\ \text{donc} & 0 & \geqslant & -t & \geqslant & -q \\ \text{ainsi} & 1 & \geqslant & 1-t & \geqslant & 1-q \\ \text{d'où} & \dfrac{1}{1} & \leqslant & \dfrac{1}{1-t} & \leqslant & \dfrac{1}{1-q} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{puis} & 1 & \leqslant & \left(\dfrac{1}{1-t}\right)^2 & \leqslant & \left(\dfrac{1}{1-q}\right)^2 & \textit{(par croissance de la fonction } u \mapsto u^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

Finralement, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t} \geqslant 0$, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1+t} \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}\,\frac{t^{2n+2}}{1+t}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant q$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^q 0\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-q)^2}\,\frac{t^{2n+2}}{1+t}\ dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 0 & & & & \dfrac{1}{(1-q)^2}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{1+t}\ dt \end{array}$$

- Or :
  - $\times$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
  - $\times$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{1+t}\ dt = 0$ d'après la question ***1.b)***.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\ dt = 0.}$$

Commentaire

On se sert ici du résultat ***1.b)***. Il était aussi possible de s'en passer en effectuant une démonstration analogue à la ***1.b)***. En remarquant $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

Puis, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\ dt \leqslant \frac{1}{(1-q)^2} \times \frac{1}{2n+3}$$

et on conclut par théorème d'encadrement comme en ***1.b)***.

□

b) Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = 2k+1\}\big) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt \right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = 2k+1\}\big) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt && \textit{(d'après la question \textbf{6.b)})} \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{1-t} \right) dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(t^2\right)^k \right) dt \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \left(\frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2} \right) dt \end{aligned}$$

- Enfin, pour tout $t \in [0, q]$:

$$\frac{1}{1-t} \left(\frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2} \right) = \frac{1}{1-t} \, \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)\,(1+t)} = \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}$$

On en conclut, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = 2k+1\}\big) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt \right)}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} A \text{ est réalisé} &\Leftrightarrow \text{le joueur a pioché une boule impaire} \\ &\Leftrightarrow X \text{ prend une valeur impaire} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{N},\ \{X = 2k+1\} \text{ est réalisé} \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X = 2k+1\} \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X = 2k+1\}}$$

- On en déduit :

$$
\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}(A) & \\
= & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \{X = 2k+1\}\right) & \\
= & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} \{X = 2k+1\}\right) & \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\
= & \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X = 2k+1\}\big) & \textit{(car les événements de la famille } \big(\{X=2k+1\}\big)_{k\in[\![0,n]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
= & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p}{q} \left(\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt \;-\; \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
= & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt \;-\; \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt & \textit{(car ces deux limites existent et sont finies)} \\
= & \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt & \textit{(d'après la question \textbf{7.a)})}
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt.}$$

□

8. a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- Tout d'abord pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a\,(1-t)\,(1+t) + b\,(1-t)^2 + c\,(1+t)}{(1-t)^2\,(1+t)} \\
&= \frac{a - a\,t^2 + b - 2b\,t + b\,t^2 + c + c\,t}{(1-t)^2\,(1+t)} \\
&= \frac{(a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2}{(1-t)^2\,(1+t)}
\end{aligned}
$$

- On a alors :

$$
\begin{array}{cl}
 & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t} + \dfrac{c}{(1-t)^2} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \dfrac{(a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2}{(1-t)^2\,(1+t)} \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad 1 = (a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2 \\[2ex]
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2ex]
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ & & 2\,b & + & c & = & 1 \end{array} \right. \\[2ex]
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array} \right. \\[2ex]
\underset{\substack{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,a & + & 2\,b & & & = & 1 \\ & - & 4\,b & & & = & -1 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array} \right. \\[2ex]
\underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4\,a & & & & & = & 1 \\ & & 4\,b & & & = & 1 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array} \right.
\end{array}
$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ \dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{4}}{1+t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{(1-t)^2}.}$$

□

b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(A) & = & \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \dfrac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt \\[2ex]
 & = & \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \left(\dfrac{\frac{1}{4}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{4}}{1+t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{(1-t)^2} \right) dt \\[2ex]
 & = & \dfrac{p}{q} \left(\dfrac{1}{4} \displaystyle\int_0^q \dfrac{1}{1-t}\,dt + \dfrac{1}{4} \int_0^q \dfrac{1}{1+t}\,dt + \dfrac{1}{2} \int_0^q \dfrac{1}{(1-t)^2}\,dt \right) \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}
\end{array}
$$

- De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{1}{1-t}\,dt &= -\int_0^q \frac{-1}{1-t}\,dt \\ &= -\Big[\ \ln\big(|1-t|\big)\ \Big]_0^q = -\Big(\ln\big(|1-q|\big) - \cancel{\ln\big(|1|\big)}\Big) = -\ln(1-q)\end{aligned}$$

$$\int_0^q \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\ \ln\big(|1+t|\big)\ \Big]_0^q = \ln\big(|1+q|\big) - \cancel{\ln\big(|1|\big)} = \ln(1+q)$$

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}\,dt &= -\int_0^q (-1)\ (1-t)^{-2}\,dt = -\Big[\ (1-t)^{-1}\ \Big]_0^q \\ &= -\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q = -\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q}\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{p}{q}\left(-\frac{1}{4}\ \ln(1-q) + \frac{1}{4}\ \ln(1+q) + \frac{1}{2}\,\frac{q}{1-q}\right) \\ &= \frac{1-q}{q}\ \left(\frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1-q}{4\,q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1-q}{4q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $p = 1-q \in\ ]0,1[$ alors : $1-q > 0$ et $\frac{1-q}{4q} > 0$.
- Par ailleurs :

$$\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = \ln\left(\frac{(1-q)+2\,q}{1-q}\right) = \ln\left(1 + \frac{2\,q}{1-q}\right) > 0 \qquad \text{car} \quad \frac{2\,q}{1-q} > 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A) = \frac{1-q}{4q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.}$$

□

Exercice : `ESSEC I 2011`

Problème 1 : Évolution des intentions de vote

Dans une élection à venir, deux candidats A et B se présentent.
Un groupe d'électeurs est composé de m individus, avec $m \geqslant 2$.

- Initialement, au jour appelé « jour 0 », le nombre d'individus préférant le candidat A vaut a (il y en a donc $m-a$ préférant le candidat B).

- Ensuite, chaque jour, un des individus au hasard dans le groupe en rencontre un autre, au hasard également, et il lui parle des élections. Si leurs intentions de vote diffèrent, il le convainc de voter comme lui.

Pour tout entier naturel n, on note X_n le nombre d'individus du groupe ayant l'intention de voter pour le candidat A le soir du $n^{\text{ème}}$ jour. Ainsi, X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$.
On remarque que X_0 est une variable aléatoire certaine : $\mathbb{P}\big(\{X_0 = a\}\big) = 1$.

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

Dans cette partie, on étudie le cas d'un groupe formé de quatre électeurs.

1. Soit i et j deux entiers dans $[\![0, 4]\!]$. On note $p_{i,j}$ la probabilité pour qu'il y ait exactement j personnes dans le groupe ayant l'intention de voter pour A un jour donné, sachant qu'il y en avait i la veille.

a) Justifier : $p_{0,0} = p_{4,4} = 1$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord $p_{0,0} = 1$.
  - × Supposons que la veille d'un jour donné il y ait 0 personne souhaitant voter pour la personne A.
  - × Dans ce cas, il n'y a aucune personne dans le groupe des individus avec intention de voter pour A. Le lendemain, la rencontre est donc organisée entre :
    - un premier électeur choisi au hasard qui a pour intention de voter B.
    - un deuxième électeur choisi au hasard qui a aussi pour intention de voter B.

    De ce fait, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

  Finalement, le soir de ce jour, il y a toujours 0 personne ayant pour intention de voter A.

$$\boxed{\text{On en conclut : } p_{0,0} = 1.}$$

- Démontrons maintenant $p_{m,m} = 1$.
  - × Supposons que la veille d'un jour donné il y ait m personnes souhaitant voter pour la personne A.
  - × Dans ce cas, il n'y a aucune personne dans le groupe des individus avec intention de voter pour B. Le lendemain, la rencontre est donc organisée entre :
    - un premier électeur choisi au hasard qui a pour intention de voter A.
    - un deuxième électeur choisi au hasard qui a aussi pour intention de voter A.

    De ce fait, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

  Finalement, le soir de ce jour, il y a toujours m personnes ayant pour intention de voter A.

$$\boxed{\text{On en conclut : } p_{m,m} = 1.}$$

□

Commentaire

- Dans la rédaction, on fait le choix de conclure $p_{m,m} = 1$ en lieu et place de $p_{4,4} = 1$. Pour cette première question et celle qui suit, la valeur de m a peu d'importance. Elle en aura par contre dans les questions suivantes.
- Dans la définition de $p_{i,j}$, le jour considéré n'est pas identifié. Plus précisément, on ne parle pas du jour n mais d'un « jour donné » et pas du jour $n-1$ mais de « la veille ». Il y a une raison claire à cela : la probabilité $p_{i,j}$ que l'on étudie ne dépend pas du jour n mais uniquement du nombre d'individus qui compose chacun des deux groupes.
- On peut être encore plus précis en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\mathbb{P}_{\{X_0=i\}}\big(\{X_1 = j\}\big) \ = \ \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$$
C'est cette quantité indépendante de n qui est nommée $p_{i,j}$.
D'ailleurs, le concepteur aurait pu décider initialement de définir $p_{i,j}$ par :
$$p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_0=i\}}\big(\{X_1 = j\}\big)$$
puis faire remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$. Cette définition est certainement plus pratique pour mettre en place les rédactions usuelles. Par exemple :
  - × Si $\{X_0 = 0\}$ est réalisé, c'est qu'il y a initialement (le jour 0) 0 personne ayant l'intention de voter A.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_1 = 0\}$ est réalisé si et seulement si il y a 0 personne avec intention de voter A le soir du jour 1. Or, comme il n'y a pas d'individu ayant l'intention de voter A pour tenter de convaincre un individu de l'autre groupe, l'événement $\{X_1 = 0\}$ est forcément réalisé.
- Dans cet énoncé, on travaille sur l'évolution d'une grandeur aléatoire (le nombre d'individus ayant l'intention de voter A) qui varie dans le temps discret (au jour 0, puis au suivant, puis à celui d'après etc.). Cette évolution se fait selon un schéma classique en mathématiques : le futur (*i.e.* la valeur de X_{n+1}, nombre d'individus ayant l'intention de voter A l'instant $n+1$) ne dépend du passé (nombre d'individus ayant l'intention de voter A les instant précédents) que par le présent (*i.e.* la valeur de X_n, nombre d'individus ayant l'intention de voter A l'instant n). On dit alors que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une **chaîne de Markov**. On peut par ailleurs préciser les points suivants :
  - × la grandeur évaluée (ici, le nombre d'électeurs souhaitant voter pour la personne A) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est à valeurs dans $[\![0, m]\!]$) appelées des **états** de la chaîne de Markov. Lorsque cette grandeur prend une valeur i un jour n donné, on dit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ entre dans l'état i à l'instant n.
  - × les états 0 et m sont dits **absorbants**. Si la chaîne de Markov entre dans l'état 0 (resp. m) un jour n donné, alors elle restera dans cet état les jours suivants. C'est précisément ce que l'on démontre dans la première question de l'énoncé : une fois l'état atteint, la chaîne de Markov n'en sort plus.
  - × comme on l'a vu lors de la discussion sur la définition de $p_{i,j}$, l'évolution de la chaîne de Markov est indépendante du jour n considéré. On dit alors que cette chaîne est **homogène**.

  Pour résumer, on a affaire dans cet énoncé à une **chaîne de Markov homogène ayant un ensemble fini d'états**. Tout ce vocabulaire n'est pas à proprement parler au programme (le terme « chaîne de Markov » est seulement présent dans la partie informatique). Cependant, il arrive fréquemment qu'un sujet propose l'étude d'une chaîne de Markov. Le problème est, de ce point de vue, très classique.

b) Justifier : si i et j dans $[\![0, 4]\!]$ sont tels que $|i - j| \geqslant 2$, alors $p_{i,j} = 0$.

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![0, m]\!]$.
Dans la suite, on appellera « groupe A (resp. B) » le groupe des électeurs ayant l'intention de voter pour A (resp. B).

- Supposons que la veille d'un jour donné il y ait i personnes dans le groupe A.
- Dans ce cas, une rencontre est organisée le lendemain entre deux individus du groupe d'électeurs. Deux cas se présentent alors :
  - × Le premier individu choisi a pour intention de voter A.
    Il rencontre alors un deuxième individu. Deux nouveaux cas se présentent.
    - Si le deuxième individu a pour intention de voter A alors il n'y a pas de changement des intentions de vote.
    - Si le deuxième individu n'a pas pour intention de voter A alors il est convaincu par le premier de changer son vote. Il y a donc, le soir de cette rencontre, une personne de plus ayant pour intention de voter A.
  - × Le premier individu choisi n'a pas pour intention de voter A.
    Il a donc pour intention de voter B. Il rencontre alors un deuxième individu. Deux nouveaux cas se présentent.
    - Si le deuxième individu a pour intention de voter A alors il il est convaincu par le premier de changer son vote. Il y a donc, le soir de cette rencontre, une personne de moins ayant pour intention de voter A.
    - Si le deuxième individu n'a pas pour intention de voter A alors la rencontre a lieu entre deux individus ayant pour intention de voter B. Dans ce cas, il n'y a pas de changement des intentions de vote.

En résumé, si la veille d'un jour donné il y a i individus ayant pour intention de voter A, le lendemain soir, il y en aura soit $i - 1$, soit i, soit $i + 1$.
Autrement dit, entre la veille et le lendemain, le taille du groupe d'électeurs ayant pour intention de voter A varie d'au plus une personne.

$$\boxed{\text{On en conclut que si } |i - j| \geqslant 2, \text{ alors } p_{i,j} = 0.}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » une propriété. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles. Mettre en avant l'argument qu'une personne au plus peut changer d'intention de vote lors de la rencontre entre les deux individus du groupe d'électeur suffit ici à obtenir l'ensemble des points alloués à la question.
- Dans les premières questions de l'énoncé, on procède à l'étude de l'expérience lorsque m prend une petite valeur (ici $m = 4$). Cela permet de pouvoir lister tous les cas possibles (comme on le verra en question ***1.d)***). Le but de ces premières questions est de se familiariser avec la modélisation proposée par l'énoncé. C'est pour un souci de bonne compéhension des mécanismes de l'expérience qu'on fait le choix de détailler la rédaction de cette question.
- De manière générale, il est toujours conseillé de prendre particulièrement soin à la rédaction en début d'épreuve afin de faire bonne impression auprès du correcteur et de le mettre dans de bonnes dispositions. En fin d'épreuve, le temps venant à manquer, on pourra relâcher un peu la rédaction afin de pouvoir traiter plus de questions.

c) Établir : $p_{1,0} = p_{1,2} = \frac{1}{4}$ et $p_{1,1} = \frac{1}{2}$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in [\![0,m]\!]^2,\ p_{i,j} \ = \ \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$$

Afin de faciliter la rédaction, on désignera par la suite par le terme « groupe A (resp. B) » l'ensemble des individus ayant pour intention de voter pour le candidat A (resp. B).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si l'événement $\{X_{n-1} = 1\}$ est réalisé, c'est que le jour $n-1$, il y a seulement 1 individu dans le groupe A et $m - 1 = 3$ individus dans le groupe B.
- Dans ce cas, l'événement $\{X_n = 0\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, plus aucun individu n'a pour intention de voter A. C'est le cas seulement si la rencontre entre les deux individus a modifié l'intention de vote de l'unique individu souhaitant voter A.

  Plus précisément, l'événement $\{X_n = 0\}$ est alors réalisé par tous les 2-tirages dont le premier élément est un numéro de $[\![0,4]\!]$ désignant un individu du groupe B et le deuxième est un numéro de $[\![0,4]\!]$ désignant un individu du groupe A.
  Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

  – le premier numéro de ce couple : 3 possibilités (car le groupe B est constitué de 3 personnes)

  – le deuxième numéro de ce couple : 1 possibilité (car le groupe A ne contient qu'une personne)

  Il y a donc 3 tels 2-tirages.
  Notons par ailleurs qu'il y a en tout 4×3 2-tirages différents (4 possibilités pour le premier individu choisi et 3 pour le deuxième). On en conclut :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=1\}}\big(\{X_n = 0\}\big) \ = \ \frac{\cancel{3} \times 1}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,0} = \frac{1}{4}.}$$

- On raisonne de même pour démontrer $p_{1,2} = \dfrac{1}{4}$. Il suffit de remarquer que si $\{X_{n-1} = 0\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 2\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 2 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A et le second au groupe B. On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=1\}}\big(\{X_n = 2\}\big) \ = \ \frac{1 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,2} = \frac{1}{4}.}$$

- Il reste à démontrer $p_{1,1} = \dfrac{1}{2}$. Il suffit de remarquer que si $\{X_{n-1} = 0\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 2\}$ est réalisé si et seulement si le jour n, 1 seul individu a pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement il n'y a pas eu de changement d'intention de vote lors de la rencontre ce qui est le cas si les deux individus choisis appartiennent au groupe B.
  On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=1\}}\big(\{X_n = 1\}\big) \ = \ \frac{\cancel{3} \times 2}{4 \times \cancel{3}} \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{1,1} = \frac{1}{2}.}$$

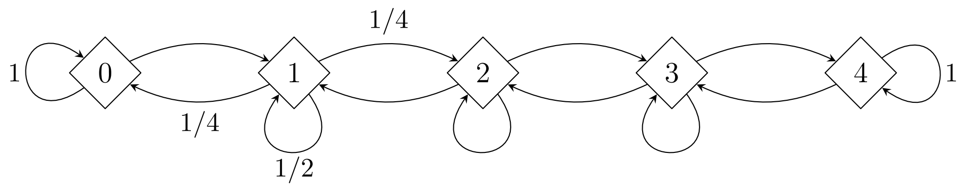
Commentaire

- Le sujet prend le parti de définir $p_{i,j}$ comme la probabilité que quelque chose se produise tout en omettant de définir cette probabilité dans un cadre formel. C'est un choix regrettable qui incite à une rédaction peu rigoureuse du type :

$$\text{« } p_{1,0} = \frac{1}{2} \text{ car c'est la probabilité de \ldots »}$$

  Au contraire, il est conseillé de travailler sur les événements. C'est pourquoi on établit la définition formelle de $p_{i,j}$ en début de correction de cette question.
- Cette définition n'est pas si simple à comprendre : même si $p_{i,j}$ s'écrit sous la forme : $p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$, la quantité $p_{i,j}$ ne dépend pas du jour $n \in \mathbb{N}^*$ choisi. Le concepteur a certainement souhaité cacher cette subtilité. Ce faisant, on omet de mettre en avant le caractère **homogène** de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui, associée au caractère fini du nombre d'états considérés, est à l'origine de la formalisation matricielle qui va suivre. □

d) De la même façon, donner pour tout $(i, j) \in [\![0, 4]\!]^2$ la probabilité $p_{i,j}$.
On présentera les résultats sur le diagramme suivant, à reproduire et à compléter, et on justifiera quelques cas.



Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons tout d'abord, la valeur de $p_{2,1} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 1\}\big)$.
  - × Si $\{X_{n-1} = 2\}$ est réalisé c'est que le jour $n - 1$, il y a 2 individus dans le groupe A et $m - 2 = 2$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_n = 1\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, seulement 1 individu a pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors de 2 personnes) et le second au groupe A (constitué aussi de deux personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 1\}\big) = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,1} = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons maintenant $p_{2,3} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 3\}\big)$.
  Si $\{X_{n-1} = 2\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 3\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 3 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A (constitué alors de 2 personnes) et le second au groupe B (constitué aussi de deux personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 3\}\big) = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,3} = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons enfin $p_{2,2} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = 2\}\big)$.
  Comme la famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\sum_{j=0}^{4} \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = j\}\big) \;=\; 1$$

  Or :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{4} \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=2\}}\big(\{X_n = j\}\big) &= p_{2,0} + p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} + p_{2,4} \\ &= p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} \\ &= \frac{1}{3} + p_{2,2} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

  *(car $p_{2,0} = 0 = p_{2,4}$ d'après la question **1.b)**)*

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{2,2} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.}$$

- Déterminons maintenant la valeur de $p_{3,2} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 2\}\big)$.
  - × Si $\{X_{n-1} = 3\}$ est réalisé c'est que le jour $n-1$, il y a 3 individus dans le groupe A et $m - 3 = 1$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_n = 2\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 2 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors d'une seule personne) et le second au groupe A (constitué de 3 personnes). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 2\}\big) \;=\; \frac{1 \times \cancel{3}}{4 \times \cancel{3}} \;=\; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,2} = \frac{1}{4}.}$$

- Déterminons maintenant $p_{3,4} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 4\}\big)$.
  Si $\{X_{n-1} = 3\}$ est réalisé alors l'événement $\{X_n = 4\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour n, 4 individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe A (constitué alors de 3 personnes) et le second au groupe B (constitué seulement d'une personne). On en déduit :

$$\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=3\}}\big(\{X_n = 4\}\big) \;=\; \frac{\cancel{3} \times 1}{4 \times \cancel{3}} \;=\; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,2} = \frac{1}{4}.}$$

- En remarquant comme précédemment que la famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements, on obtient, à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_{n-1}\}=3}$:

$$\cancel{p_{3,0}} + \cancel{p_{3,1}} + p_{3,2} + p_{3,3} + p_{3,4} \;=\; 1$$

  et donc :

$$p_{3,3} \;=\; 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p_{3,3} = \frac{1}{2}.}$$

- Enfin, il reste à déterminer $p_{0,1}$ et $p_{4,3}$.
  Là encore on utilise le fait que la famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements. À l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_{n-1}\}=0}$, on obtient :

$$p_{0,0} + p_{0,1} + \cancel{p_{0,2}} + \cancel{p_{0,3}} + p_{0,4} \;=\; 1$$

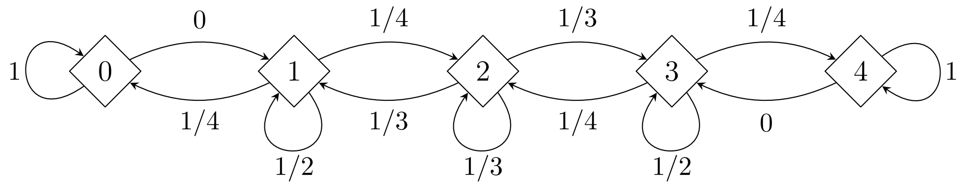
$$\boxed{\text{Et comme } p_{0,0} = 1 \text{ alors : } p_{0,1} = 0.}$$

  En procédant de même :

$$\cancel{p_{4,0}} + \cancel{p_{4,1}} + \cancel{p_{4,2}} + p_{4,3} + p_{4,4} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Et comme } p_{4,4} = 1 \text{ alors : } p_{4,3} = 0.}$$

Finalement, on obtient le graphe suivant :



Commentaire

- L'énoncé n'explicite pas l'obtention du graphe. Il est sous-entendu que $p_{i,j}$ est l'étiquette de l'arête joignant le nœud i au nœud j. Ce graphe permet donc de visualiser les probabilités de passage d'un état à un autre. C'est un schéma classique lorsqu'on étudie une chaîne de Markov homogène à espace d'états fini.
- L'énoncé demande de justifier « quelques cas ». Il aurait certainement été plus pertinent de demander de justifier les valeurs p_{2_1}, $p_{2,1}$ et $p_{2,3}$: cela suffit à démontrer que les techniques de démonstration associées à cette question sont comprises.
- On se sert une nouvelle fois dans cette question de la définition formelle :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)$$

  Ce formalisme permet de rédiger le calcul de $p_{2,2}$ (par exemple) obtenu à l'aide des calculs précédents et en tirant parti du système complet d'événements associé à X_n.
- On pourrait introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. Y_n, nombre d'électeurs ayant l'intention de voter pour B le soir du jour n (on a évidemment : $Y_n = m - X_n$. En agissant ainsi, on définit une chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Si on laisse de côté l'initialisation le jour 0, on se rend compte qu'il y a une symétrie du problème : on ne change pas l'expérience en échangeant les rôles de A et B. Ainsi, on obtiendrait exactement le même graphe pour la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cela permet de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\underbrace{\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=i\}}\big(\{X_n = j\}\big)}_{= p_{i,j}} \;=\; \mathbb{P}_{\{Y_{n-1}=i\}}\big(\{Y_n = j\}\big) \;=\; \underbrace{\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=m-i\}}\big(\{X_n = m-j\}\big)}_{= p_{m-i,m-j}}$$

  Cette propriété explique le caractère symétrique du graphe associé à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On aurait d'ailleurs pu exploiter cette propriété pour obtenir directement les valeurs $p_{3,2}$, $p_{3,3}$, $p_{3,4}$ à l'aide des valeurs $p_{1,4}$, $p_{1,3}$, $p_{1,2}$. $\square$

2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$,

et pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}$.

a) Pour tout entier naturel n, établir la relation : $U_{n+1} = M\, U_n$.
En déduire pour tout entier naturel n, l'égalité : $U_n = M^n\, U_0$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\}) &= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = 1\}) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \times \mathbb{P}_{\{X_n = k\}}(\{X_{n+1} = 1\}) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(\{X_n = k\}) \times p_{k,1} \\
&= \sum_{k=1}^{3} p_{k,1}\, \mathbb{P}(\{X_n = k\}) && \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + 0 \times \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- En procédant de même (en utilisant le même système complet d'événements), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 2\}) &= \sum_{k=1}^{3} p_{k,2}\, \mathbb{P}(\{X_n = k\}) && \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\
&= \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \\
&= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- De même :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 3\}) &= \sum_{k=1}^{3} p_{k,3}\, \mathbb{P}(\{X_n = k\}) && \textit{(car } p_{0,1} = 0 = p_{4,1}\textit{)} \\
&= 0 \times \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\{X_n = 1\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 2\}) \\ \mathbb{P}(\{X_n = 3\}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Par définition du produit de matrice, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = M \times U_n.}$

- Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : U_n = M^n\, U_0$.
  - **Initialisation** :
    On a : $M^0\, U_0 = I_3\, U_0 = U_0$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $U_{n+1} = M^{n+1}\, U_0$).

$$\begin{array}{rcll} U_{n+1} & = & M \times U_n & \textit{(d'après la démonstration précédente)} \\ & = & M \times M^n\, U_0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & M^{n+1}\, U_0 & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n\, U_0.}$$

Commentaire

- On peut se demander s'il est utile, de rédiger la récurrence pour démontrer cette dernière propriété. La formule étant donnée dans l'énoncé, la rédaction apparaît comme nécessaire puisque constitue le cœur de la question. Si le concepteur avait opté pour la formulation :

  « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre U_n, M et U_0. »

  on aurait pu se passer de cette rédaction et simplement écrire :

  « Par une récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n\, U_0$. »

- Lors de l'étude d'une chaîne de Markov, on introduit généralement la matrice A définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![0,m]\!]^2, A_{i+1,j+1} = \mathbb{P}_{\{X_{n-1}=j\}}\big(\{X_n = i\}\big) = p_{j,i}$$

  (le premier état porte le numéro 0 *ce qui oblige à faire un décalage d'indice pour définir* A*)*
  On obtient ici :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice est appelée **matrice de transition**.
  Elle permet de décrire l'évolution aléatoire de la grandeur considérée (on peut démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A\, U_n$ en ajoutant à U_n les probabilités $\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big)$).
- On peut remarquer que, pour chaque colonne j de la matrice de transition, la somme des coefficients vaut 1. Cela se démontre (comme dans la question ci-dessus), à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_{n-1}=j\}}$ et du système complet d'événements $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,4]\!]}$.
- Dans le sujet, on s'intéresse à une la matrice M, matrice extraite de la matrice de transition A. On perd ainsi la propriété énoncée ci-dessus. En contrepartie on obtient une matrice 3×3 qu'il est bien plus simple de manipuler. Et si en apparence ce choix de modélisation semble laisser de côté les états 0 et 4, on peut en réalité déduire des propriétés portant sur ces états comme en question ***3.***. Cette modélisation est donc particulièrement pertinente : à la fois plus simple mais permettant l'étude complète de la chaîne de Markov étudiée.

$\square$

b) Montrer que M admet trois valeurs propres distinctes α, β et γ, vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < 1$.

Justifier qu'il existe une matrice carrée P d'ordre 3 inversible, que l'on ne demande pas de préciser, et D une matrice diagonale d'ordre 3, à préciser, telles que $P^{-1}MP = D$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Rappelons tout d'abord :

$$\lambda \text{ valeur propre de } M \quad \Leftrightarrow \quad M - \lambda\, I_3 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or on a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M - \lambda\, I_3) \quad &= \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\substack{C_1 \leftarrow 4\,C_1 \\ C_2 \leftarrow 3\,C_2 \\ C_3 \leftarrow 4\,C_3}}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Commentaire

La matrice $M - \lambda\, I_3$ dont on cherche le rang fait apparaître des fractions. Afin de faciliter les futures manipulations, on les fait disparaître par des opérations sur les colonnes. Rappelons que le rang d'une matrice est invariant par transposition ($\forall M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\text{rg}(M) = \text{rg}\left({}^tM\right)$). Ainsi, lors d'un calcul de rang, les opérations sur les colonnes sont autorisés. Il est toutefois conseillé d'appliquer la succession d'opérations sur les lignes décrite par l'algorithme du pivot de Gauss et n'utiliser les opérations sur les colonnes que pour des cas spécifiques permettant d'alléger les calculs.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M - \lambda\, I_3) \quad &= \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 2\,(1-2\,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,(1-2\,\lambda)\,L_1}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-3\,\lambda & 1 \\ 0 & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) & -2\,(1-2\,\lambda) \\ 0 & 1 & 2\,(1-2\,\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\,\lambda \\ 0 & -2\,(1-2\,\lambda) & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \\ 0 & 2\,(1-2\,\lambda) & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\,\lambda \\ 0 & -2\,(1-2\,\lambda) & 1-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \\ 0 & 0 & 2-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Remarquons enfin :

$$\begin{array}{rcl} 2-2\,(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda) & = & 2\big(1-(1-2\,\lambda)(1-3\,\lambda)\big) \\ & = & 2\,\big(\cancel{1}-(\cancel{1}-5\,\lambda+6\,\lambda^2)\big) \\ & = & 2\,(5\,\lambda-6\,\lambda^2) \ = \ 2\,\lambda\,(5-6\,\lambda) \end{array}$$

- La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
  Elle (et donc $M-\lambda\, I$) est non inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} M-\lambda\, I \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 1=0 \ \texttt{OU} \ -2\,(1-2\,\lambda)=0 \ \texttt{OU} \ 2\,\lambda\,(5-6\,\lambda)=0 \\ & \Leftrightarrow & (1-2\,\lambda)=0 \ \texttt{OU} \ \lambda=0 \ \texttt{OU} \ (5-6\,\lambda)=0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda=\frac{1}{2} \ \texttt{OU} \ \lambda=0 \ \texttt{OU} \ \lambda=\frac{5}{6} \end{array}$$

  On pose alors $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{2}$ et $\gamma=\frac{5}{6}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathrm{Sp}(M)=\{\alpha,\beta,\gamma\} \text{ et } 0\leqslant\alpha<\beta<\gamma<1.}$$

- La matrice M est une matrice carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ est diagonalisable.}}$$

  Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M=P\,D\,P^{-1}$.
  Plus précisément :
  × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de M,
  × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  On peut par exemple choisir : $D=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telles que : } M=P\,D\,P^{-1}.}$$

Commentaire

- Il est à noter que l'ordre d'apparition dans la matrice D est dépendant du contenu de la matrice P : si la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est un élément de $E_\alpha(M)$ alors α apparaîtra en $j^{\text{ème}}$ colonne de D. On pouvait ainsi définir $3!=6$ (nombre de manières de placer trois éléments différents dans trois cases) matrices diagonales différentes.
- L'égalité : $M=P\,D\,P^{-1}$ doit être comprise comme une formule de changement de base. Pour faire ce lien, il faut effectuer un travail sur les endomorphismes. Introduisons l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$. Nommons $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f\in\mathscr{L}(E)$ l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=M$.

  Comme M est diagonalisable, il en est de même de f. Ainsi, il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la représentation matricielle de f est une matrice diagonale. Les coefficients diagonaux de cette dernière matrice sont les valeurs propres de M (rappelons $\mathrm{Sp}(f)=\mathrm{Sp}(M)$). On retrouve ainsi la matrice D.

  La formule de changement de base stipule :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P & \times & D & \times & P^{-1} \end{array}$$

□

c) En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, la suite $\Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des trois suites $\big(\alpha^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\beta^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\gamma^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $k \in \{1, 2, 3\}$. Dans la suite, notons $P = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{i \in [\![1,3]\!] \\ j \in [\![1,3]\!]}}$ et $P^{-1} = \big(b_{i,j}\big)_{\substack{i \in [\![1,3]\!] \\ j \in [\![1,3]\!]}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcll} U_n & = & M^n\, U_0 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ & = & \big(P\, D\, P^{-1}\big)^n\, U_0 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ & = & P\, D^n\, P^{-1}\, U_0 & \textit{(par récurrence immédiate)} \end{array}$$

Rappelons alors : $U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\big(\{X_0 = 1\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_0 = 2\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_0 = 3\}\big) \end{pmatrix}$ et $\mathbb{P}\big(\{X_0 = a\}\big) = 1$.

Ainsi, seul l'un au plus des coefficients de U_0 est non nul.

- Deux cas se présentent alors :

× si $a = 0$ ou $a = 4$ alors $U_0 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et ainsi $U_n = M^n\, 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \\ 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \\ 0\ \alpha^n + 0\ \beta^n + 0\ \gamma^n \end{pmatrix}.}$$

× si $a \in \{1, 2, 3\}$ alors U_0 est la matrice colonne dont le coefficient en colonne a vaut 1 et les autres coefficients valent 0. On en conclut :

$$P^{-1}\, U_0 \ = \ \begin{pmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ b_{3,a} \end{pmatrix}$$

Et finalement :
$$\begin{array}{rcl} U_n & = & P\, D^n\, P^{-1}\, U_0 \\ & = & P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ b_{3,a} \end{pmatrix} \\ & = & P \begin{pmatrix} b_{1,a}\, \alpha^n \\ b_{2,a}\, \beta^n \\ b_{3,a}\, \gamma^n \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} a_{1,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{1,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{1,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{2,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{2,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{2,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{3,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{3,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{3,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas : } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) \\ \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{1,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{1,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{2,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{2,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{2,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \\ a_{3,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{3,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{3,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } k \in \{1, 2, 3\}, \text{ la suite } \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une combinaison} \\ \text{linéaire des trois suites } \big(\alpha^n\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(\beta^n\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \big(\gamma^n\big)_{n\in\mathbb{N}}.\end{array}}$$

Commentaire

Il y a fort à parier que donner la forme de D^n et conclure que les produits de matrices successifs vont fournir des combinaisons linéaires des coefficients de D^n suffit à obtenir l'intégralité des points alloués sur cette question. Mais une telle rédaction revient presque à paraphraser le résultat fourni dans la question. Finalement, en voulant éviter que les candidats aient à faire un calcul (pas si compliqué), la question devient soit triviale (on cite le résultat de l'énoncé), soit bien plus complexe (c'est la rédaction ci-dessus) qu'un bête calcul.

□

d) Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ car $\alpha = 0$.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta^n = 0$ car $\beta \in \,]0,1[$.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma^n = 0$ car $\gamma \in \,]0,1[$.
- Et ainsi, pour tout $k \in \{1,2,3\}$, on obtient à l'aide de la question précédente :
  - × si $a = 0$ ou $a = 4$:
  $$\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ = \ 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  - × si $a \in \{1,2,3\}$:
  $$\mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ = \ a_{k,1}\, b_{1,a}\ \alpha^n + a_{k,2}\, b_{2,a}\ \beta^n + a_{k,3}\, b_{3,a}\ \gamma^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \{1,2,3\},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 0.}$$

Commentaire

- Les questions d'un énoncé ne sont pas forcément rangées dans un ordre croissant de difficulté. Il ne faut donc pas se décourager si on ne sait pas traiter une ou plusieurs questions d'affilée. Il faut au contraire s'accrocher : des questions plus simples apparaîtront.
- Cette question est une parfaite illustration du point ci-dessus :
  - × elle est bien plus simple que les deux questions qui la précèdent.
  - × elle peut parfaitement être traitée en admettant le résultat des questions ***2.b)*** et ***2.c)***. □

3. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big)\Big) = 1$.
Comment interpréter ce résultat ?

Démonstration.

- La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k\in[\![0,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :
$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big) \ = \ 1$$
Ainsi, d'après la question précédente :
$$\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big) \ = \ 1 - \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 2\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 3\}\big)\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$\boxed{\text{On a bien : } \lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = 4\}\big)\Big) = 1.}$$
- Comme $\{X_n = 0\}$ et $\{X_n = 4\}$ sont incompatibles, ce résultat se réécrit :
$$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\{X_n = 0\} \ \cup \ \{X_n = 4\}\right) \ = \ 1$$
Ce résultat signifie, qu'à terme, X_n prendra la valeur 0 ou 4.

$$\boxed{\text{À terme, tous les électeurs auront la même intention de vote.}}$$

□

Partie II - Le cas général

On revient dans cette partie au cas général d'un groupe de m électeurs.
On note $\pi_{n,k} = \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \big)$, la probabilité pour qu'il y ait exactement k électeurs envisageant de voter pour A à l'issue du $n^{\text{ème}}$ jour.

4. Soit n un entier naturel.

a) Établir les trois relations :

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\} \big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\} \big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\} \big) = 1 - \frac{2k\,(m-k)}{m(m-1)}$$

Démonstration.

- Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. Déterminons tout d'abord $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\} \big)$.
  - × Si $\{X_n = k\}$ est réalisé c'est que le jour n, il y a k individus dans le groupe A et $m-k$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_{n+1} = k+1\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour $n+1$, $k+1$ individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si la rencontre entre les deux électeurs a fait passer un électeur du groupe B vers le groupe A.

    Plus précisément, l'événement $\{X_{n+1} = k+1\}$ est alors réalisé par tous les 2-tirages dont le premier élément est un numéro de $[\![0, m]\!]$ désignant un individu du groupe A et le deuxième est un numéro de $[\![0, m]\!]$ désignant un individu du groupe B.
    Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

    – le premier numéro de ce couple : k possibilités (car le groupe A est constitué de k personnes)

    – le deuxième numéro de ce couple : $m-k$ possibilités (car le groupe B est constitué de $m-k$ personnes)

    Il y a donc $k\,(m-k)$ tels 2-tirages.
    Notons par ailleurs qu'il y a en tout $m \times (m-1)$ 2-tirages différents (m possibilités pour le premier individu choisi et $m-1$ pour le deuxième). On en conclut :

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\} \big) \ = \ \frac{k \times (m-k)}{m \times (m-1)}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\} \big) = \frac{k\,(m-k)}{m(m-1)}.}$$

- Soit $k \in [\![1, m]\!]$. Déterminons maintenant la valeur de $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\} \big)$.
  - × Si $\{X_n = k\}$ est réalisé c'est que le jour n, il y a k individus dans le groupe A et $m-k$ individus dans le groupe B.
  - × Dans ce cas, l'événement $\{X_{n+1} = k-1\}$ est réalisé si et seulement si le soir du jour $n+1$, $k-1$ individus ont pour intention de voter A. Cela se produit si et seulement si le premier individu choisi appartient au groupe B (constitué alors de $m-k$ personnes) et le second au groupe A (constitué de k personnes).

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k-1\}\big) \ = \ \frac{(m-k)\,k}{m\,(m-1)}.}$$

- Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$.
  Comme la famille $\big(\{X_{n+1} = j\}\big)_{j \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements, on a, à l'aide de l'application probabilité $\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}$:

  $$\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \ = \ 1$$

  Or :

  $$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \\ = \ & \sum_{j=0}^{k-2} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) + \sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) + \sum_{j=k+2}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \\ = \ & \sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{dès que } |k-j| \geqslant 2\textit{)} \end{aligned}$$

  Cette dernière propriété a été démontrée en question ***1.b)***. En effet, on a :

  $$\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = j\}\big) \ = \ p_{k,j} \ = \ 0 \qquad \text{dès que } |k-j| \geqslant 2$$

  (d'un jour sur l'autre il y a au maximum un électeur qui change d'intention de vote)

  Finalement :

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \ &= \ 1 - \Big(\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_n = k-1\}\big) + \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_n = k+1\}\big)\Big) \\ &= \ 1 - \left(\frac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)} + \frac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)}\right) \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = 1 - 2\,\frac{k\,(m-k)}{m\,(m-1)}.}$$

Commentaire

- L'absence de modélisation constatée dans les premières questions est corrigée dans cette partie. Cependant, il est décevant que le lien ne soit pas fait avec la première partie. À la lecture des relations à établir, il saute aux yeux que les résultats ne dépendent pas de n. C'est donc bien $p_{k,j}$ (pour $j \in \{k-1, k, k+1\}$) que l'on cherche à déterminer ici.
- Ne pas faire le lien entre les deux parties est fort regrettable. La question ***1.b)*** est énoncée dans un cadre restreint (pour $m = 4$) ce qui est tout à fait inutile comme on l'a déjà fait remarqué. De manière rigoureuse, on ne peut donc pas faire appel à ce résultat mais il faudrait le redémontrer.
- Le fait qu'il n'y ait pas d'articulation naturelle entre ces deux parties donne l'impression que la première partie a été ajoutée après coup. L'absence de modélisation et de généralisation (les questions ***1.a)*** et ***1.b)*** n'ont pas à être énoncées dans un cadre restreint) la rend difficile et peu exploitable. C'est dommage car la deuxième partie est très bien construite et que le problème en lui-même est tout à fait intéressant.
- On remarque qu'on a abandonné la notation $p_{i,j}$. Il est à noter que l'une des difficultés des sujets du TOP3 est justement la gestion de notations nouvelles. Il faut donc s'habituer à ce type d'effort intellectuel et rester bien concentré.

□

b) En déduire la relation, si $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n+1,k} = \frac{(k-1)(m+1-k)\ \pi_{n,k-1} + \big(m(m-1) - 2k(m-k)\big)\ \pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\ \pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$.

- La famille $\big(\{X_n = j\}\big)_{j \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
  On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = j\} \cap \{X_{n+1} = k\}\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) & \textit{(car pour tout } j \in [\![0,m]\!], \\
& & & \mathbb{P}\big(\{X_n = j\}\big) \neq 0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \times \pi_{n,j} & \textit{(par définition de } \pi_{n,j}\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{j=k-1}^{k+1} \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \times \pi_{n,j} & \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n=j\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = 0 \\
& & & \textit{si } |j-k| \geqslant 2\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}_{\{X_n=k-1\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \times \pi_{n,k-1} & \\
& + & \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \times \pi_{n,k} & (*) \\
& + & \mathbb{P}_{\{X_n=k+1\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) \times \pi_{n,k+1} &
\end{array}$$

- Or, d'après la question précédente : $\forall i \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbb{P}_{\{X_n=i\}}\big(\{X_{n+1} = i+1\}\big) = \dfrac{i\,(m-i)}{m(m-1)}$.
  En utilisant cette relation en $i = k-1 \in [\![0, m-2]\!] \subseteq [\![0, m-1]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k-1\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = \frac{(k-1)\,\big(m-(k-1)\big)}{m(m-1)}$$

- À l'aide de la deuxième relation de la question précédente, considérée en $i = k+1 \in [\![2, m]\!] \subseteq [\![1, m]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k+1\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = \frac{(k+1)\,\big(m-(k+1)\big)}{m(m-1)}$$

- Enfin, la troisième relation donne, en $i = k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k\}\big) = 1 - \frac{2k\,(m-k)}{m(m-1)} = \frac{m\,(m-1) - 2k\,(m-k)}{m\,(m-1)}$$

$$\boxed{\text{En reportant ces trois éléments dans } (*), \text{ on obtient bien le résultat énoncé.}}$$ □

5. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.

- **Initialisation** :
  Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. On a alors :
  $\times$ d'une part : $\pi_{0,k} \ = \ \mathbb{P}\big(\{X_0 = k\}\big) \leqslant 1$.
  $\times$ d'autre part : $\left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0 = 1$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n+1,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1} \right)$.
  Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. D'après la question précédente :

$$\pi_{n+1,k} \ = \ \frac{(k-1)(m+1-k)\ \pi_{n,k-1} + \big(m(m-1) - 2k(m-k)\big)\ \pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\ \pi_{n,k+1}}{m(m-1)}$$

Rappelons que par hypothèse de récurrence, on a : $\forall i \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,i} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$.
Trois cas se présentent.

- Si $k = 1$ alors : $\pi_{n+1,1} \ = \ \dfrac{\big(m(m-1) - 2\,(m-1)\big)\ \pi_{n,1} + 2\,(m-2)\ \pi_{n,2}}{m(m-1)}$.
  $\times$ En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = 1 \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
  $$\pi_{n,1} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$
  $\times$ En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = 2 \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
  $$\pi_{n,2} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$
  Finalement, en notant $\alpha_m = \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)$, on obtient :
  $$\begin{aligned}
  \pi_{n+1,1} \ &\leqslant \ \frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n \\
  &= \ \left(\frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)} + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \\
  &= \ \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \ = \ \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}
  \end{aligned}$$
- Si $k = m-1$ alors : $\pi_{n+1,m-1} \ = \ \dfrac{(m-2)\,2\ \pi_{n,m-2} + \big(m(m-1) - 2\,(m-1)\big)\ \pi_{n,m-1}}{m(m-1)}$.
  On procède comme dans le point précédent. On obtient :
  $$\begin{aligned}
  \pi_{n+1,m-1} \ &\leqslant \ \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n + \frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)}\ \big(\alpha_m\big)^n \\
  &= \ \left(\frac{m(m-1) - 2\,(m-1)}{m(m-1)} + \frac{2\,(m-2)}{m(m-1)}\right) \times \big(\alpha_m\big)^n \ = \ \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}
  \end{aligned}$$

- Si $k \in [\![2, m-2]\!]$
  - × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k-1 \in [\![1, m-2]\!] \subseteq [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
  $$\pi_{n,k-1} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$
  - × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k+1 \in [\![3, m-1]\!] \subseteq [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
  $$\pi_{n,k+1} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$
  - × En appliquant l'hypothèse de récurrence en $i = k \in [\![1, m-1]\!]$, on obtient :
  $$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

  Finalement, à l'aide de la formule générale, on obtient :
  $$\begin{aligned}
  & \pi_{n+1,k} \\
  \leqslant\ & \frac{(k-1)(m+1-k)}{m(m-1)} \left(\alpha_m\right)^n + \frac{m(m-1)-2k(m-k)}{m(m-1)} \left(\alpha_m\right)^n + \frac{(k+1)(m-1-k)}{m(m-1)} \left(\alpha_m\right)^n \\
  =\ & \left(\frac{\color{red}{(k-1)(m+1-k)}}{m(m-1)} + \frac{\color{green}{m(m-1)-2k(m-k)}}{m(m-1)} + \frac{\color{blue}{(k+1)(m-1-k)}}{m(m-1)}\right) \left(\alpha_m\right)^n \\
  =\ & \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right) \times \left(\alpha_m\right)^n \qquad (*) \\
  =\ & \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}
  \end{aligned}$$

  Pour obtenir l'égalité $(*)$, on étudie de plus près le 1er et 3ème terme de la somme :

  (i) $\color{red}{(k-1)(m+1-k)} = (k-1)\big((m-k)+1\big) = (k-1)(m-k) + (k-1)$

  (ii) $\color{blue}{(k+1)(m-1-k)} = (k+1)\big((m-k)-1\big) = (k+1)(m-k) - (k+1)$

  En sommant ces deux termes, on obtient :
  $$\begin{aligned}
  & (k-1)(m-k) + (k-1) + (k+1)(m-k) - (k+1) \\
  =\ & (m-k)\ \big((k-1)+(k+1)\big) + (k-1) - (k+1) \\
  =\ & (m-k)\ 2\,k - 2
  \end{aligned}$$

  Finalement, en ajoutant le 2ème terme à cette somme, on obtient :
  $$\color{green}{m(m-1) - 2k(m-k)} + (m-k)\ 2\,k - 2 \ = \ m(m-1) - 2$$

  Cela permet de conclure que l'égalité $(*)$ est bien vérifiée.

On a démontré : $\forall k \in [\![1, m-1]\!]$, $\pi_{n+1,k} \leqslant \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.}$$

Commentaire

- On rappelle que $\mathcal{P}(n)$ est une proposition mathématique qui dépend de n. L'écriture (n) a d'ailleurs pour but d'insister sur cette dépendance en n. En revanche, la proposition : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est totalement indépendante de n car n apparaît alors comme une variable liée au quantificateur $\forall$ (on dit que n est une variable muette). L'écriture « $\mathcal{P}(n) : \cancel{\forall n \in \mathbb{N}}, \dots$ » n'a alors pas de sens (il y a dépendance en n à gauche mais pas à droite). Attention cependant à ne pas en conclure que la proposition $\mathcal{P}(n)$ ne peut contenir de quantificateurs. Comme on le voit dans cet exemple $\big(\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1, m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant (\alpha_m)^n \big)$, $\mathcal{P}(n)$ peut s'écrire à l'aide de quantificateurs mais la variable n ne doit en aucun cas être liée à un quantificateur (sinon, elle serait muette).
- Dans cette récurrence, on traite séparément plusieurs cas. Cela provient de l'obligation de vérifier que l'on est bien dans le cadre d'application de l'hypothèse de récurrence. Cette gestion correcte des certains cas rend la démonstration complexe. Mais le cœur de la démonstration (le cas $k \in [\![2, m-2]\!]$) n'est pas réellement difficile. On peut le résumer ainsi :
  1) à l'aide de la question précédente, on fait apparaître $\pi_{n+1,k}$ comme combinaison linéaire de $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$.
  2) chacun des termes $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$ est majoré par $(\alpha_m)^n$ par hypothèse de récurrence.
  3) formellement, cette majoration revient à remplacer, dans la combinaison linéaire, les termes $\pi_{n,k-1}$, $\pi_{n,k}$, $\pi_{n,k+1}$ par $(\alpha_m)^n$. On met alors en facteur $(\alpha_m)^n$.
  Par un simple calcul, on s'aperçoit que l'autre terme n'est autre que α_m ce qui termine la démonstration. □

b) En déduire, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, la limite de $\pi_{n,k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, m-1]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente et en remarquant $\pi_{n,k} = \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

Or :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n = 0$ car $\dfrac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \in \,]0,1[$ (puisque $m(m-1)-2 < m(m-1)$).

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = 0.}$$ □

6. On définit l'évènement V_A (respectivement V_B) suivant : « au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour A (respectivement pour B) ».

a) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big)$ et $\mathbb{P}(V_B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } V_A \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{Au bout d'un certain nombre de jours, tous les individus du groupe ont l'intention de voter pour } A \\ \Leftrightarrow & \text{Il existe un jour } i \in \mathbb{N} \text{ pour lequel tous les électeurs ont l'intention de voter } A \\ \Leftrightarrow & \text{Il existe un jour } i \in \mathbb{N} \text{ pour lequel les } m \text{ électeurs ont l'intention de voter } A \\ \Leftrightarrow & \text{Il existe } i \in \mathbb{N} \text{ tel que la v.a.r. } X_i \text{ prend la valeur } m \\ \Leftrightarrow & \text{Il existe } i \in \mathbb{N} \text{ tel que l'événement } \{X_i = m\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \{X_i = m\} \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } V_A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{X_i = m\}.}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(V_A) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} \{X_i = m\}\right) & \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} \{X_i = m\}\right) & \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) & \textit{(car } \big(\{X_i = m\}\big)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)} \end{array}$$

- Il reste à démontrer que $\big(\{X_i = m\}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ est bien une suite croissante d'événements.
  Formellement, on doit démontrer : $\forall i \in \mathbb{N}, \{X_i = m\} \subseteq \{X_{i+1} = m\}$.
  Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons l'événement $\{X_i = m\}$ réalisé.
  Cela signifie qu'au soir du $i^{\text{ème}}$ jour, le groupe d'électeurs ayant l'intention de voter pour A comporte m individus. La rencontre qui a lieu entre les deux électeurs le jour suivant réunit donc deux individus ayant l'intention de voter A. Ainsi, il n'y a pas de modification des intentions de vote. Le soir du $(i+1)^{\text{ème}}$ jour, il y a donc toujours m individus ayant l'intention de voter A. Autrement dit, l'événement $\{X_{i+1} = m\}$ est réalisé.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \{X_i = m\} \subseteq \{X_{i+1} = m\}}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}(V_A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big).}$$

- En procédant de même, on démontre :

$$V_B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{X_i = 0\}$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(V_B) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} \{X_i = 0\}\right) & \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} \{X_i = 0\}\right) & \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) & \textit{(car } \big(\{X_i = 0\}\big)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)} \end{array}$$

La croissance de la suite $\big(\{X_i = 0\}\big)_{i\in\mathbb{N}}$ se démontre aussi comme dans le cas précédent. Si $\{X_i = 0\}$ est réalisé c'est qu'au soir du jour i il y a 0 individu ayant l'intention de voter A. Il en est de même du soir du jour $i+1$ car la rencontre a lieu entre deux électeurs ayant tous les deux l'intention de voter B.

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \mathbb{P}(V_B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big).}$$ □

b) Montrer : $\mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1$.
Que signifie ce résultat ?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k\in[\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \;=\; 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) &= 1 - \left(\sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\right) \\ &= 1 - \left(\sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k}\right)\end{aligned}$$

- Or :
  × d'après la question ***5.b)***, pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = 0$$

  × d'après la question ***6.a)*** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) = \mathbb{P}(V_B) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) = \mathbb{P}(V_A)$$

En passant à la limite dans l'égalité du point précédent, on obtient alors :

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big)}_{=\,\mathbb{P}(V_B) + \mathbb{P}(V_A)} \;=\; \underbrace{1 - \left(\sum_{k=1}^{m-1} \big(\lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k}\big)\right)}_{=\,1-0}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) = 1.}$$

- Les événements V_A et V_B sont incompatibles. En effet, si au bout d'un certain nombre de jours tous les électeurs ont l'intention de voter pour le même candidat alors les intentions de vote ne sont plus modifiées les jours suivants. Il n'est donc pas possible de retrouver tous les électeurs dans un même groupe (au soir du jour $i_1 \in \mathbb{N}$) et dans un autre (au soir du jour $i_2 \in \mathbb{N}$).
  On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(V_A \cup V_B\big) \;=\; \mathbb{P}(V_A) + \mathbb{P}(V_B) \;=\; 1$$

  Ce dernier résultat signifie qu'au bout d'un certain nombre de jours, tous les électeurs seront dans le même groupe.

$$\boxed{\text{À terme, tous les électeurs auront la même intention de vote.}}$$ □

7. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = X_{n+1} - X_n$.

a) Justifier : $Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
La v.a.r. Z_n prend pour valeur la différence entre le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour A le soir du jour $n+1$ et le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour A le soir du jour n. Or, la rencontre entre les deux électeurs le jour $n+1$ ne modifie l'intention de vote que d'un électeur au plus. Plus précisément :

- × soit la rencontre a lieu entre un électeur du groupe A qui convainc un électeur du groupe B. Dans ce cas, Z_n prend la valeur 1.
- × soit la rencontre a lieu entre deux électeurs du même bord. Dans ce cas, Z_n prend la valeur 0.
- × soit la rencontre a lieu entre un électeur du groupe B qui convainc un électeur du groupe A. Dans ce cas, Z_n prend la valeur -1.

$$\boxed{Z_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}}$$

□

b) Exprimer $\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$ en fonction des probabilités $\pi_{n,k}$ avec $k \in [\![1, m-1]\!]$.

Démonstration.
La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.
On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{Z_n = 1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} - X_n = 1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = k+1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\} \cap \{X_{n+1} = k+1\}\big) && \textit{(car } \{X_{n+1} = m+1\}\big) = \varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) && \textit{(car pour tout } k \in [\![0, m-1]\!], \\
& && \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \times \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) && \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n=0\}}\big(\{X_{n+1} = 1\}\big) = 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1} = k+1\}\big) \times \pi_{n,k}}$$

□

c) Comparer $\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$.

Démonstration.
La famille $\big(\{X_n = k\}\big)_{k \in [\![0,m]\!]}$ est un système complet d'événements.

On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z_n=-1\}\big) &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\cap\{Z_n=-1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\cap\{X_{n+1}-X_n=-1\}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\cap\{X_{n+1}=k-1\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\cap\{X_{n+1}=k-1\}\big) && \textit{(car } \{X_{n+1}=-1\}\big)=\varnothing\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\big)\times\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1}=k-1\}\big) && \textit{(car pour tout } k\in[\![1,m]\!], \\
& && \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\big)\neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\big)\times\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1}=k-1\}\big) && \textit{(car } \mathbb{P}_{\{X_n=m\}}\big(\{X_{n+1}=m-1\}\big) = \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\big)\times\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1}=k+1\}\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\big(\{Z_n=1\}\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{Z_n=1\}\big)=\mathbb{P}\big(\{Z_n=-1\}\big)}$$

Commentaire

- On détaille ici la correction pour faire apparaître de manière précise les similarités et différences avec la question précédente. Cependant, on pouvait plus sobrement indiquer que par analogie avec le raisonnement précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{Z_n=-1\}\big) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{P}\big(\{X_n=k\}\big)\times\mathbb{P}_{\{X_n=k\}}\big(\{X_{n+1}=k-1\}\big)$$

- Dans la remarque de la question ***1.d)***, on a introduit $Y_n = m - X_n$, v.a.r. qui donne le nombre d'électeurs ayant pour intention de voter pour B le soir du jour n. De même, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut introduire la v.a.r. $T_n = Y_{n+1} - Y_n$. Il y a symétrie du problème : on ne change pas l'expérience en échangeant les rôles de A et B. On en déduit que Z_n et T_n suivent la même loi. Cela permet de retrouver :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{Z_n=-1\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{X_{n+1}-X_n=-1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{(\cancel{m}-Y_{n+1})-(\cancel{m}-Y_n)=-1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{Y_n-Y_{n+1}=-1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{Y_{n+1}-Y_n=1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{T_n=1\}\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\{Z_n=1\}\big) && \textit{(car } T_n \textit{ et } Z_n \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

$\square$

d) En déduire que $\mathbb{E}(Z_n)=0$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z_n est finie. Elle admet donc une espérance.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Z_n) & = & \displaystyle\sum_{k \in Z_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = k\}\big) & \textit{(par définition)} \\ & = & (-1) \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) + 0 \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) + 1 \times \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) & \\ & = & -\mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = 0}$$

Commentaire

Il est tout à fait possible, au brouillon, d'opérer par rétro-ingénierie, c'est-à-dire partir du résultat donné par l'énoncé ($\mathbb{E}(Z_n) = 0$) pour en déduire un résultat intermédiaire (en l'occurence la propriété $\mathbb{P}\big(\{Z_n = -1\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z_n = 1\}\big)$). Évidemment, partir du résultat ne constitue en aucun cas une démonstration. Mais la valeur du résultat intermédiaire peut parfois renseigner sur la voie à choisir pour le démontrer. □

e) Montrer que la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer cette constante en fonction de a.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition : $Z_n = X_{n+1} - X_n$.
Comme les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont finies, elles admettent une espérance.
On en déduit, d'après l'égalité précédente :

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathbb{E}(Z_n)} = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)}$$

(d'après la question précédente)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)}$$

- Ainsi, la suite $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(a) = a.}$$

□

8. Montrer que $\mathbb{P}(V_A) = \dfrac{a}{m}$ et interpréter ce résultat.

Démonstration.

- On a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X_n) & = & \displaystyle\sum_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) & \textit{(par définition)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{m} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) & \\ & = & 0 \times \mathbb{P}\big(\{X_n = 0\}\big) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) + m \times \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente : } m \times \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) = a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big).}$$

- Or, d'après la question ***5.b)*** : $\forall k \in [\![1, m-1]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = 0$.
  On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} m \times \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \left(a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\right) \;=\; a - \sum_{k=1}^{m-1} k \times \lim_{n\to+\infty} \big(\mathbb{P}\big(\{X_n = k$$

$$\begin{array}{lr} \| & \| \\ m \times \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\{X_n = m\}\big) & a \\ \| & \\ m \times \mathbb{P}(V_A) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(V_A) = \frac{a}{m}.}$$

- On en déduit, par la question ***6.b)*** :

$$\mathbb{P}(V_B) \;=\; 1 - \mathbb{P}(V_A) \;=\; 1 - \frac{a}{m} \;=\; \frac{m-a}{m}$$

  La quantité $\dfrac{a}{m}$ (respectivement $\dfrac{m-a}{m}$) est exactement la proportion d'électeurs souhaitant initialement voter pour A (respectivement B).

> Ainsi, la probabilité que les électeurs aient tous à terme l'intention de voter pour un même candidat est donnée par la proportion d'électeurs souhaitant initialement voter pour ce candidat.

□

Exercice (`ESSEC II - 2019`)

Un modèle probabiliste d'une expérience aléatoire représente dans un certain sens le désordre qui intervient dans l'expérience et il est donc naturel que des outils soient introduits qui permettent de mesurer l'intensité de ce désordre. C'est le cas de la notion d'entropie qui fait l'objet du présent problème. On considèrera différentes situations et notamment la façon dont on mesure l'information que deux variables aléatoires s'apportent mutuellement.
Dans la première partie on étudie le cas plus simple techniquement de variables dont la loi admet une densité. Les deuxièmes et troisièmes parties sont consacrées au cas discret. Dans la deuxième partie, on introduit les différentes notions d'entropie pour le cas de variables discrètes et dans la troisième partie, on examine comment on peut mesurer l'information apportée mutuellement par deux variables aléatoires.
Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

Deuxième partie : Généralités sur l'entropie des variables discrètes

Soit A un ensemble fini non vide. On dit que X est une variable aléatoire dont la loi est à support A, si X est à valeurs dans A et si pour tout $x \in A$: $\mathbb{P}(\{X = x\}) > 0$.

Commentaire

- Profitons-en de cette définition pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
  Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq \left]-\infty, +\infty\right[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire.
- Dans le cas des v.a.r. **discrètes**, il est d'usage relativement courant de confondre :
  - × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  - × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.
- L'énoncé introduit ici la notion de support d'une v.a.r. **discrète** et le note A de manière assez malhabile. Le support d'une v.a.r. X dépend évidemment de la v.a.r. X considéré et il est préférable de faire apparaître la dépendance dans la notation choisie.
- Si X est une v.a.r. **discrète**, il est à noter que toute valeur prise par X avec probabilité non nulle est une valeur prise par X. Autrement dit, on a toujours :

$$\boxed{\mathrm{Supp}(X) \subseteq X(\Omega)}$$

  En effet, si $x \in \mathrm{Supp}(X)$ alors $\mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0$. On en déduit : $\{X = x\} \neq \varnothing$. Il existe donc (au moins) un élément $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$. La v.a.r. X prend donc la valeur x.
- La réciproque n'est pas forcément vérifiée : $X(\Omega) \cancel{\subseteq} \mathrm{Supp}(X)$.
  Autrement dit, une v.a.r. X peut prendre une valeur avec probabilité nulle. On peut par exemple penser à l'expérience consistant au lancer d'un dé à 6 faces. La v.a.r. X qui donne le résultat du dé a pour ensemble image $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. Si on considère que le dé est truqué et ne renvoie que 6, alors le support de X est $\mathrm{Supp}(X) = \{6\}$.
- Dans l'énoncé, il est précisé qu'on considère que X est un v.a.r. dont la loi est à support A si X est à valeurs dans A. On fait donc l'hypothèse : $X(\Omega) \subseteq \mathrm{Supp}(X)$. Finalement, ce préambule ne sert qu'à affirmer qu'on fera dans la suite la confusion entre $X(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. discrète X) et $\mathrm{Supp}(X)$ (l'ensemble des valeurs prises par X avec probabilité non nulle).

6. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ où n est un entier naturel. On appelle **entropie** de X le réel :

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)$$

a) On définit la fonction $g : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)$ pour k élément de $\{0, 1, \ldots, n\}$. Montrer : $H(X) = -\mathbb{E}\big(g(X)\big)$.

Commentaire

- La deuxième partie de l'énoncé se concentre sur l'entropie des v.a.r. discrètes. On introduit alors la v.a.r. $g(X)$, transformée de la v.a.r. X. Comme dans le cas des v.a.r. à densité, il faut revenir à la définition pour bien comprendre la notation $g(X)$. Rappelons que si $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors on utilise la notation $g(X)$ pour désigner $g \circ X$.
  Autrement dit, $g(X)$ est la v.a.r. définie par :
  $$g(X) \ : \ \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g\big(X(\omega)\big) \end{array}$$
- D'après la définition de g, la v.a.r. $g(X)$ n'est autre que l'application :
  $$\omega \mapsto g\big(X(\omega)\big) = \log_2\Big(\mathbb{P}\big(\,\{X = X(\omega)\}\,\big)\Big)$$
  Et comme $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ alors, lorsque ω décrit Ω, $X(\omega)$ décrit $[\![0, n]\!]$ (*i.e.* prend toutes les valeurs k de $[\![0, n]\!]$). Ceci est en accord avec la définition de $g(X)$: l'application g est définie sur $X(\Omega)$.
- Ceci étant établi, on comprend pourquoi on ne peut écrire :
  $$g(X) \ \cancel{=} \ \log_2\big(\mathbb{P}(\{X = X\})\big) = \log_2(1) = 0$$

Démonstration.

- La v.a.r. $g(X)$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (car X est une v.a.r. finie).

  Commentaire

  Rappelons que par définition de la v.a.r. $g(X)$, on a :
  $$\begin{array}{rcl} \big(g(X)\big)(\Omega) & = & g\big(X(\Omega)\big) \\ & = & \{g(x) \mid x \in X(\omega)\} \ = \ \{g(k) \mid k \in [\![0, n]\!]\} \end{array}$$
  Ainsi, si $k \in [\![0, n]\!]$, $g(k)$ peut prendre **au plus** $n + 1$ valeurs distinctes. L'ensmble $\big(g(X)\big)(\Omega)$ est donc bien un ensemble fini.

- Par théorème de transfert :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\big(g(X)\big) & = & \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)\,\mathbb{P}(\{X = x\}) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} g(k)\,\mathbb{P}(\{X = k\}) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \log_2\big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)\,\mathbb{P}(\{X = k\}) & \textit{(par définition de } g\textit{)} \end{array}$$
  $$\boxed{\text{Par définition de } H : H(X) = -\mathbb{E}\big(g(X)\big).}$$

$\square$

b) Montrer : $H(X) \geqslant 0$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
  Tout d'abord, comme le support de X est $[\![0, n]\!]$:

	$0 < \mathbb{P}(\{X = k\}) \leqslant 1$	
donc	$\ln\big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \leqslant 0$	*(par croissance de ln sur* $]0, +\infty[$*)*
d'où	$\dfrac{\ln\big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)}{\ln(2)} \leqslant 0$	*(si* $\ln(2) > 0$*)*
ainsi	$\log_2\big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \leqslant 0$	
puis	$\mathbb{P}(\{X = k\})\ \log_2\big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \leqslant 0$	*(car* $\mathbb{P}(\{X = k\}) \geqslant 0$*)*

- On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \log_2\big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \ \leqslant\ 0$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } H(X) = -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \log_2\big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \geqslant 0.}$$

□

c) Soit p un réel tel que $0 < p < 1$.
On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

(i) Calculer $H(X)$ en fonction de p. On note ψ la fonction qui, à p, associie $H(X)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est une v.a.r. finie. L'entropie $H(X)$ est donc bien définie.
- On obtient :

$$\begin{aligned} H(X) &= -\Big(\mathbb{P}(\{X = 0\})\ \log_2\big(\mathbb{P}(\{X = 0\})\big) + \mathbb{P}(\{X = 1\})\ \log_2\big(\mathbb{P}(\{X = 1\})\big)\Big) \\ &= -(1-p)\ \log_2(1-p) - p\ \log_2(p) \qquad \textit{(car } X \sim \mathcal{B}(p)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \psi : p \mapsto -(1-p)\ \log_2(1-p) - p\ \log_2(p).}$$

□

(ii) Montrer que ψ est concave sur $]0, 1[$.

Démonstration.

- La fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[$.

Commentaire

Détaillons l'obtention de la régularité de la fonction $g : p \mapsto \log_2(1-p)$.
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[$ car elle est la composée $g = h_2 \circ h_1$ où :

× $h_1 : p \mapsto 1 - p$ est :
  - de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[$ en tant que fonction affine,
  - telle que : $h_1(]0, 1[) \subset\ ]0, +\infty[$.

× $h_2 : x \mapsto \log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

- Soit $p \in \,]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\psi'(p) &= -\left((-1) \times \log_2(1-p) + \cancel{(1-p)} \times \left(-\frac{1}{\cancel{(1-p)}\ln(2)} \right) + \log_2(p) + \cancel{p} \times \frac{1}{\cancel{p}\ln(2)} \right) \\
&= \log_2(1-p) - \log_2(p) + \cancel{\frac{1}{\ln(2)}} - \cancel{\frac{1}{\ln(2)}} \\
&= \log_2(1-p) - \log_2(p)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\psi''(p) = -\frac{1}{(1-p)\ln(2)} - \frac{1}{p\ln(2)} = -\frac{1}{\ln(2)}\left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} \right)$$

Or, comme $0 < p < 1$: $\dfrac{1}{1-p} > 0$ et $\dfrac{1}{p} > 0$. D'où : $\psi''(p) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \psi \text{ est concave sur }]0,1[.}$$

□

(iii) Déterminer la valeur p_0 où ψ est maximale.

Démonstration.

- Soit $p \in \,]0,1[$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\psi'(p) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \log_2(1-p) - \log_2(p) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(1-p)}{\ln(2)} \geqslant \frac{\ln(p)}{\ln(2)} \\
&\Leftrightarrow \ln(1-p) \geqslant \ln(p) && \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow 1-p \geqslant p && \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
&\Leftrightarrow 1 \geqslant 2\,p \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant p
\end{aligned}$$

- On note $p_0 = \dfrac{1}{2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

p	0		p_0		1
Signe de $\psi'(p)$		$+$	0	$-$	
Variations de ψ	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - × Tout d'abord :

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1 \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)}$$

× De plus, pour tout $p \in \,]0,1[$:

$$\psi(p) \;=\; -\frac{1}{\ln(2)}\big((1-p)\,\ln(1-p) + p\,\ln(p)\big)$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{p\to 0} p\,\ln(p) = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{p\to 0} \psi(p) = 0$.

× Enfin, avec le changement de variable $u = 1-p$:

$$\lim_{p\to 1} (1-p)\,\ln(1-p) \;=\; \lim_{u\to 0} u\,\ln(u) \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

On en déduit : $\lim\limits_{p\to 1} \psi(p) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, sur }]0,1[\text{, la fonction } \psi \text{ admet un maximum en } p_0 = \frac{1}{2}.}$$

□

d) On suppose dans cette question que la loi de X est à support $\{0,1,2,3\}$ avec les probabilités :

$$\mathbb{P}(\{X=0\}) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(\{X=1\}) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(\{X=2\}) = \mathbb{P}(\{X=3\}) = \frac{1}{8}$$

Calculer $H(X)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est une v.a.r. finie. L'entropie $H(X)$ est donc bien définie.
- On obtient :

$$\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(\{X=k\})\,\log_2\big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big) \\
&= -\left(\frac{1}{2}\,\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\,\log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\,\log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8}\,\log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\log_2(2) + \frac{1}{4}\,\log_2(4) + \frac{1}{4}\,\log_2(8) \\
&= \frac{1}{2}\,\log_2(2^1) + \frac{1}{4}\,\log_2(2^2) + \frac{1}{4}\,\log_2(2^3) \\
&= \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 3 && \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{H(X) = \frac{7}{4}}$$

□

7. On commence par une inégalité générale, appelée **Inégalité de Jensen**.

a) Soit $N \geqslant 2$. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ où les x_i sont des éléments distincts de $\mathbb{R}_+$. On pose $\mathbb{P}(\{X = x_i\}) = p_i$.
Montrer que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, on a : $p_i < 1$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,N]\!]$.

- Comme le support de X est $\{x_1, \ldots, x_N\}$, alors $(\ \{X = x_k\}\ )_{k\in[\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événement. On obtient alors :
$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(\{X = x_k\}) \ = \ 1$$
On en déduit : $p_i \ = \ 1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} p_k$.
- Or, toujours comme le support de X est $\{x_1, \ldots, x_N\}$, on en déduit : $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $p_k > 0$.
D'où : $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} p_k > 0$.

Et ainsi : $p_i \ = \ 1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} p_k \ < \ 1$.
$$\boxed{\forall i \in [\![1, N]\!],\ p_i < 1}$$
□

On désire démontrer par récurrence la propriété suivante :

$\mathcal{P}(N)$: **Pour toute fonction φ convexe sur $\mathbb{R}_+$, si X est une variable aléatoire de loi à support $A \subset \mathbb{R}_+$ avec $\mathrm{Card}(A) = N$, on a :** $\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \geqslant \varphi\big(\mathbb{E}(X)\big)$

b) Montrer que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Démonstration.
Soient φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ et X une v.a.r. de loi à support $A \subset \mathbb{R}_+$ avec $\mathrm{Card}(A) = 2$. On note alors : $A = \{x_1, x_2\}$.
- Les v.a.r. X et $\varphi(X)$ admettent des espérances car ce sont des v.a.r. finies.
- D'une part, par théorème de transfert :
$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ = \ \varphi(x_1)\, \mathbb{P}(\{X = x_1\}) + \varphi(x_2)\, \mathbb{P}(\{X = x_2\})$$
Or, comme le support de X est $\{x_1, x_2\}$: $\mathbb{P}(\{X = x_1\}) + \mathbb{P}(\{X = x_2\}) = 1$. Ainsi :
$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ = \ \varphi(x_1)\, \mathbb{P}(\{X = x_1\}) + \varphi(x_2) \big(1 - \mathbb{P}(\{X = x_1\})\big)$$
ou encore, en notant $\lambda = \mathbb{P}(\{X = x_1\})$:
$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ = \ \lambda\, \varphi(x_1) + (1 - \lambda)\, \varphi(x_2)$$
- D'autre part :
$$\begin{aligned} \varphi\big(\mathbb{E}(X)\big) \ &= \ \varphi\big(x_1\, \mathbb{P}(\{X = x_1\}) + x_2\, \mathbb{P}(\{X = x_2\})\big) \\ &= \ \varphi\big(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2\big) \end{aligned}$$
- Par définition de λ : $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Enfin, par définition de la convexité de φ :
$$\varphi\big(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2\big) \ \leqslant \ \lambda\, \varphi(x_1) + (1 - \lambda)\, \varphi(x_2)$$

On en déduit : $\varphi\big(\mathbb{E}(X)\big) \leqslant \mathbb{E}\big(\varphi(X)\big)$.

$$\boxed{\text{D'où } \mathcal{P}(2).}$$

□

c) Soit $N \geqslant 3$. On suppose que $\mathcal{P}(N-1)$ est vérifiée. Soit X une variable aléatoire de loi à support $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ où les x_i sont des éléments distincts de $\mathbb{R}_+$. On pose : $\mathbb{P}(\{X = x_i\}) = p_i$. Pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant N-1$, on pose : $p'_i = \dfrac{p_i}{1-p_N}$.

Commentaire

- Comme annoncé en début de question ***8.***, on souhaite démontrer un propriété par récurrence. Plus précisément, il s'agit de démontrer : $\forall N \geqslant 2$, $\mathcal{P}(N)$. En question ***8.b)***, on a procédé à l'étape d'initialisation en démontrant $\mathcal{P}(2)$. Il s'agit maintenant de procéder à l'étape d'hérédité. On considère donc $N \geqslant 3$, on suppose $\mathcal{P}(N-1)$ et on souhaite démontrer $\mathcal{P}(N)$ (de manière équivalent, on aurait pu considérer $N \geqslant 2$, supposer $\mathcal{P}(N)$ et démontrer $\mathcal{P}(N+1)$).
- La propriété $\mathcal{P}(N)$ est doublement quantifiée universellement. Pour la démontrer il s'agit tout d'abord d'introduire une fonction φ convexe sur $\mathbb{R}_+$ (ce que l'énoncé oublie de faire) et une v.a.r. de loi à support A où A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$ de cardinal N.
- La grande question qui se pose lors de l'étape d'hérédité est de savoir comment passer de la propriété au rang $N-1$ à celle au rang N. Ici, le support de la v.a.r. est de cardinal N. Or on ne peut utiliser la propriété $\mathcal{P}(N-1)$ que pour une v.a.r. de support de cardinal $N-1$. C'est tout le but de cette question ***8.c)*** : on introduit une v.a.r. Y, construite à partir de la v.a.r. X, dont le support est de cardinal $N-1$. La construction est habile et permet, malgré la suppression d'un élément du support, de transporter suffisamment d'informations sur X pour que l'inégalité obtenue sur la v.a.r. Y fournisse l'inégalité attendue sur la v.a.r. X.

(i) Montrer : $\sum\limits_{i=1}^{N-1} p'_i = 1$ et $\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $0 < p'_i < 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\sum_{i=1}^{N-1} p'_i \;=\; \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i}{1-p_N} \;=\; \frac{1}{1-p_N} \sum_{i=1}^{N-1} p_i$$
Or $(\ \{X = x_i\}\ )_{i \in [\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements. D'où :
$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\{X = x_i\}) \;=\; 1$$
Ainsi : $\sum\limits_{i=1}^{N-1} p_i = 1 - p_N$. On en déduit :
$$\sum_{i=1}^{N-1} p'_i \;=\; \frac{1}{\cancel{1-p_N}} \cancel{(1-p_N)} \;=\; 1$$
$$\boxed{\sum_{i=1}^{N-1} p'_i = 1}$$
- Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.

× Comme le support de X est $\{x_1, \ldots, x_N\}$, on en déduit : $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $p_k > 0$.
Ainsi : $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $p'_k = \dfrac{p_k}{1 - p_N} > 0$.

× On vient également de démontrer : $p'_i = 1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N-1} p'_k$.

× De plus : $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $p'_k > 0$. D'où : $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N-1} p'_k > 0$.

Ainsi : $p'_i = 1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N-1} p'_k \ < \ 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall i \in [\![1, N]\!],\ 0 < p'_i < 1.}$$

□

(ii) Soit Y une variable aléatoire de loi à support $\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ telle que $\mathbb{P}(\{Y = x_i\}) = p'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant N - 1$. Montrer : $\sum\limits_{i=1}^{N-1} p'_i\, \varphi(x_i) \ \geqslant \ \varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{N-1} p'_i\, x_i\right)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que, d'après la question précédente, la v.a.r. Y est bien définie.
- On obtient alors :
  × la v.a.r. Y est une v.a.r. de loi à support $A = \{x_1, \ldots, x_{N-1}\} \subset \mathbb{R}_+$ avec $\text{Card}(A) = N - 1$,
  × la fonction φ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
  D'après $\mathcal{P}(N - 1)$: $\mathbb{E}\big(\varphi(Y)\big) \geqslant \varphi\big(\mathbb{E}(Y)\big)$.
- Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\big(\varphi(Y)\big) \ = \ \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(x_i)\, \mathbb{P}(\{Y = x_i\}) \ = \ \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(x_i)\, p'_i$$

De plus :

$$\varphi\big(\mathbb{E}(Y)\big) \ = \ \varphi\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\, \mathbb{P}(\{Y = x_i\})\right) \ = \ \varphi\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\, p'_i\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{i=1}^{N-1} p'_i\, \varphi(x_i) \geqslant \varphi\left(\sum_{i=1}^{N-1} p'_i\, x_i\right).}$$

□

(iii) Montrer : $\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ \geqslant \ \varphi\big(\mathbb{E}(X)\big)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. X et $\varphi(X)$ admettent une espérance car ce sont des v.a.r. finies.
- Par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ = \ \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i)\, \mathbb{P}(\{X = x_i\}) \ = \ \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i)\, p_i$$

De plus :

$$\varphi\big(\mathbb{E}(X)\big) \ = \ \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\, \mathbb{P}(\{X = x_i\})\right) \ = \ \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\, p_i\right)$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) &= \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i)\, p_i \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(x_i)\, p_i + \varphi(x_N)\, p_N \\
&= (1-p_N) \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(x_i)\, \frac{p_i}{1-p_N} + \varphi(x_N)\, p_N \\
&= (1-p_N) \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(x_i)\, p_i' + \varphi(x_N)\, p_N \\
&\geqslant (1-p_N)\, \varphi\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\, p_i'\right) + p_N\, \varphi(x_N) \qquad \textit{(d'après la question précédente, car : } 1-p_N \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

- Comme la fonction φ est convexe sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,,\ \forall \lambda \in [0,1],\quad \lambda\, \varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \geqslant \varphi\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big)$$

On applique cette propriété à $\lambda = 1 - p_N$, $x = \sum\limits_{i=1}^{N-1} x_i\, p_i'$ et $y = x_N$, on obtient :

$$(1-p_N)\, \varphi\left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i\, p_i'\right) + p_N\, \varphi(x_n) \ \geqslant\ \varphi\left((1-p_N) \sum_{i=1}^{N-1} x_i\, p_i' + p_N\, x_N\right)$$

Or :

$$(1-p_N) \sum_{i=1}^{N-1} x_i\, p_i' + p_N\, x_N \ =\ \cancel{(1-p_N)} \sum_{i=1}^{N-1} x_i\, \frac{p_i}{\cancel{1-p_N}} + p_N\, x_N \ =\ \sum_{i=1}^{N} x_i\, p_i$$

- On a ainsi démontré, par transitivité :

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ \geqslant\ \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\, p_i\right) = \varphi\big(\mathbb{E}(X)\big)$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \geqslant \varphi\big(\mathbb{E}(X)\big)}$$

□

d) Montrer que, si φ est *concave* sur $\mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ \leqslant\ \varphi\big(\mathbb{E}(X)\big)$.

Démonstration.
Si la fonction φ est concave sur $\mathbb{R}_+$, alors la fonction $\psi = -\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, d'après la récurrence précédente :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{E}\big(\psi(X)\big) & \geqslant & \psi\big(\mathbb{E}(X)\big) \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\mathbb{E}\big(-\varphi(X)\big) & & -\varphi\big(\mathbb{E}(X)\big)
\end{array}$$

Par linéarité de l'espérance : $-\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \geqslant -\varphi\big(\mathbb{E}(X)\big)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) \ \leqslant\ \varphi\big(\mathbb{E}(X)\big).}$$

Commentaire

Démontrons que, si φ est concave sur $\mathbb{R}_+$, alors $\psi = -\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Soit $\lambda \in [0, 1]$.
  Comme φ est concave sur $\mathbb{R}_+$:
  $$\varphi\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \ \geqslant\ \lambda\, \varphi(x) + (1-\lambda)\, \varphi(y)$$
  On en déduit :
  $$-\varphi\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \ \geqslant\ -\big(\lambda\, \varphi(x) + (1-\lambda)\, \varphi(y)\big)$$
  Ainsi :
  $$\psi\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y\big) \ \leqslant\ \lambda\, \psi(x) + (1-\lambda)\, \psi(y)$$
  On en déduit que $\psi = -\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
- Si on sait que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ (resp. $\mathscr{C}^2$) sur $\mathbb{R}_+$, on aurait également pu utiliser la caractérisation de la convexité portant sur φ' (resp. φ''). $\square$

8. Soit X une variable aléatoire de loi à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On pose, pour k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $p_k = \mathbb{P}(\{X = k\})$.

a) Montrer : $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k \log_2 \left(\dfrac{1}{(n+1)\, p_k}\right) \ \leqslant\ \log_2 \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p_k}{(n+1)\, p_k}\right) \ =\ 0.$

Démonstration.

- L'inégalité présentée dans l'énoncé compare une somme de $\log_2$ au $\log_2$ d'une somme. Il semble donc que l'on souhaite appliquer l'inégalité de Jensen avec la fonction $\varphi = \log_2$ qui est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après ***1.b)***).
- Pour cela, on doit introduire une v.a.r. Y à support de cardinal $n+1$ (car les sommes possèdent $n+1$ éléments). Une telle v.a.r. Y possède un ensemble image qui se note, de manière générique :
  $$Y(\Omega) \ =\ \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$$
  Pour pouvoir appliquer l'inégalité de Jensen, il faudra vérifier que tous ces éléments y_i sont des réels positifs distincts.
- De manière générale, l'inégalité de Jensen appliquée à $\log_2$ et Y permet d'obtenir :
  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}\big(\log_2(Y)\big) & \leqslant & \log_2\big(\mathbb{E}(Y)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \log_2(y_k)\ \mathbb{P}\big(\{Y = y_k\}\big) & & \log_2\left(\sum\limits_{k=0}^{n} y_k\ \mathbb{P}\big(\{Y = y_k\}\big)\right) \end{array}$$
  Cette inégalité doit permettre d'obtenir celle de l'énoncé à savoir :
  $$\sum_{k=0}^{n} p_k \log_2\left(\frac{1}{(n+1)\, p_k}\right) \ \leqslant\ \log_2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n+1)\, p_k}\right)$$
  Plus précisément, on veut exprimer :
  × la quantité $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k \log_2\left(\dfrac{1}{(n+1)\, p_k}\right)$ sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n} \log_2(y_k)\ \mathbb{P}\big(\{Y = y_k\}\big)$. Pour que ces deux quantités coïncident, on n'a guère le choix que de trouver une v.a.r. Y telle que :
  $$\forall k \in [\![0, n]\!],\ y_k = \frac{1}{(n+1)\, p_k} \quad \text{ et } \quad p_k = \mathbb{P}\big(\{Y = y_k\}\big)$$

× la quantité $\log_2\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p_k}{(n+1)\,p_k}\right)$ sous la forme $\log_2\left(\sum\limits_{k=0}^{n} y_k\ \mathbb{P}\big(\{Y = y_k\}\big)\right)$.

Ces deux quantités coïncident bien si on trouve une v.a.r. Y vérifiant les contraintes évoquées dans le point précédent.

Commentaire

On détaille ici longuement la manière de trouver la v.a.r. Y qui va permettre de résoudre la question. Ce travail doit plutôt se réaliser au brouillon. On l'a présenté ici afin de permettre une bonne compréhension de cette résolution et que l'introduction qui va suivre de la v.a.r. Y ne paraisse pas sortie du chapeau.

- Pour cela, on introduit la v.a.r. Y définie par :

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)\,p_0} & \text{si } X(\omega) = 0 \\ \quad\vdots & \\ \dfrac{1}{(n+1)\,p_n} & \text{si } X(\omega) = n \end{cases}$$

On a en particulier, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\left\{Y = \frac{1}{(n+1)\,p_k}\right\} = \{X = k\}$$

- Ainsi :

× la fonction $\log_2$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après ***1.c)***),

× la loi de Y est à support $A = \{\frac{1}{(n+1)\,p_0}, \ldots, \frac{1}{(n+1)\,p_n}\} \subset \mathbb{R}_+$ avec $\mathrm{Card}(A) = n+1$.

D'après l'inégalité de Jensen (question ***8.d)***) :

$$\mathbb{E}\big(\log_2(Y)\big) \leqslant \log_2\big(\mathbb{E}(Y)\big)$$

- De plus :

× d'une part :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)\,p_k}\ \mathbb{P}\left(\left\{Y = \frac{1}{(n+1)\,p_k}\right\}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)\,p_k}\ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n+1)\,p_k}$$

× d'autre part, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(\log_2(Y)\big) &= \sum_{k=0}^{n} \log_2\left(\frac{1}{(n+1)\,p_k}\right)\ \mathbb{P}\left(\left\{Y = \frac{1}{(n+1)\,p_k}\right\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \log_2\left(\frac{1}{(n+1)\,p_k}\right)\ \mathbb{P}(\{X = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \log_2\left(\frac{1}{(n+1)\,p_k}\right)\ p_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=0}^{n} p_k \log_2\left(\frac{1}{(n+1)\,p_k}\right) \leqslant \log_2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n+1)\,p_k}\right).}$$

Commentaire

- La v.a.r. Y est définie par cas. Elle peut donc s'exprimer naturellement à l'aide de variables aléatoires indicatrices :
$$Y \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)\,p_k} \cdot \mathbb{1}_{\{X=k\}}$$
(l'égalité précédente est une égalité entre variables aléatoires)
- Les variables aléatoires indicatrices ne font pas partie du programme d'ECE. Donnons néanmoins certaines de leurs propriétés.
Soit A un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la v.a.r. telle que :
$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
  × Loi de $\mathbb{1}_A$.
    - Par définition de $\mathbb{1}_A$, cette v.a.r. ne prend comme valeur que 0 et 1.
    Donc $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
    - Soit $\omega \in \Omega$.
    $$\omega \in \{\mathbb{1}_A = 1\} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in A$$
    D'où : $\{\mathbb{1}_A = 1\} = A$. Ainsi : $\mathbb{P}(\{\mathbb{1}_A = 1\}) = \mathbb{P}(A)$.

  On en déduit : $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(A)\right)$.
  × En particulier :
  $$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)\,\big(1 - \mathbb{P}(A)\big)$$
- Il peut aussi être utilise de savoir démontrer les propriétés suivantes.
Soient B et C deux événements.
  × $\mathbb{1}_{B\cap C} = \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C$
  × $\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_{\overline{B}} = 1$

  Pour la démonstration de ces deux propriétés, on pourra, par exemple, se référer au sujet `ESSEC-II 2018`.

- Enfin :
$$\log_2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{p_k}}{(n+1)\,\cancel{p_k}}\right) \;=\; \log_2\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1\right) \;=\; \log_2\left(\frac{1}{\cancel{n+1}} \times \cancel{(n+1)}\right) \;=\; \frac{\ln(1)}{\ln(2)} \;=\; 0$$
$$\boxed{\log_2\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n+1)\,p_k}\right) = 0}$$
□

b) Montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \log_2\big((n+1)\,p_k\big) \;=\; \log_2(n+1) - H(X)$.

Démonstration.

On remarque :

$$\begin{array}{cll} & \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \log_2\left((n+1)\,p_k\right) & \\ = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \left(\log_2(n+1) + \log_2(p_k)\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\ = & \log_2(n+1) \sum\limits_{k=0}^{n} p_k + \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \log_2(p_k) & \\ = & \log_2(n+1) \times 1 - \left(-\sum\limits_{k=0}^{n} p_k \log_2(p_k)\right) & \textit{(car } (\{X=k\})_{k\in[\![0,n]\!]} \textit{ forme un système complet d'événements)} \\ = & \log_2(n+1) - H(X) & \textit{(par définition de } H\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} p_k \log_2\left((n+1)\,p_k\right) = \log_2(n+1) - H(X)}$$

□

c) Montrer : $H(X) \leqslant \log_2(n+1)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} H(X) & = & \log_2(n+1) - \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \log_2\left((n+1)\,p_k\right) \\ & = & \log_2(n+1) + \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \log_2\left(\dfrac{1}{(n+1)\,p_k}\right) \end{array}$$

- Or, d'après ***9.a)*** :

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \log_2\left(\frac{1}{(n+1)\,p_k}\right) \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{D'où : } H(X) \leqslant \log_2(n+1).}$$

□

d) On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{0,1,\dots,N\}$. Calculer $H(X)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X est une v.a.r. finie. L'entropie $H(X)$ est donc bien définie.
- De plus :

$$\begin{array}{rcl} H(X) & = & -\sum\limits_{k=0}^{N} \mathbb{P}(\{X=k\}) \log_2\left(\mathbb{P}(\{X=k\})\right) \\ & = & -\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{N+1} \log_2\left(\dfrac{1}{N+1}\right) \\ & = & \dfrac{1}{N+1} \log_2(N+1) \sum\limits_{k=0}^{N} 1 \\ & = & \dfrac{1}{\cancel{N+1}} \log_2(N+1)\ \cancel{(N+1)} \end{array}$$

$$\boxed{H(X) = \log_2(N+1)}$$

Commentaire

- Remarquons qu'on a démontré plus tôt (en question ***9.c)***) :

$$H(X) \leqslant \log_2(n+1)$$

L'entropie $H(X)$ est donc majorée par la quantité $\log_2(n+1)$.

- Dans cette question ***9.d)***, on démontre que ce majorant est atteint lorsque la v.a.r. X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$. Notons que cela signifie que :
  - × la majoration obtenue en question précédente est *optimale* : il est impossible de trouver un meilleur majorant de l'entropie que $\log_2(n+1)$.
  - × la loi uniforme est une loi d'entropie maximale.
- Si l'on revient au contexte fourni en début d'énoncé, on vient de démontrer que l'intensité du désordre est maximale pour la loi uniforme. On peut comprendre ce résultat en se rappelant que les valeurs prises par la v.a.r. X de loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ le sont avec même probabilité :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{n+1}$$

Il n'y a donc aucune valeur parmi les entiers de 0 à n qui est « privilégiée » (au sens où aucune n'est prise avec une probabilité plus grande que les autres). Le désordre intervenant dans une expérience modélisée par une v.a.r. de loi uniforme est donc plus important que pour toute autre loi. □

9. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à support $\{0, 1, \ldots, n\}$. On suppose en outre X et Y indépendantes.

a) Montrer : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) = \mathbb{P}(\{X - Y = 0\})$

Commentaire

Remarquons qu'on se ramène ici à un cas particulier de loi d'une somme $X - Y$. Il faut donc se préparer à utiliser les méthodes usuelles pour la détermination de ce type de loi : la formule des probabilités totales.

- La famille $(\ \{X = k\}\ )_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X - Y = 0\}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X - Y = 0\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) \times \mathbb{P}(\{Y = k\}) && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2 && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{X = Y\}) = \sum_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2.}$$

□

b) On pose $v(k) = \mathbb{P}(\{X = k\})$ pour tout k élément de $\{0, 1, \dots, n\}$. Montrer :

$$2^{\mathbb{E}\left(\log_2\left(v(X)\right)\right)} \ \leqslant \ \mathbb{E}\left(2^{\log_2\left(v(X)\right)}\right) \ = \ \mathbb{E}\big(v(X)\big)$$

Démonstration.

- Démontrons que la fonction $\varphi : x \mapsto 2^{-x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
  - × La fonction $\varphi : x \mapsto 2^{-x} = \mathrm{e}^{-x \ln(2)}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur les intervalles adéquats.

Commentaire

- Détaillons la démonstration de la régularité de φ.
  La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ car elle est la composée $\varphi = h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto -x \ln(2)$ est :
    - – de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale,
    - – telle que : $h_1([0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- Il serait plus naturel d'introduire la fonction $\psi : x \mapsto 2^x$.
  En considérant la v.a.r. $Z = \log_2\big(v(X)\big)$ on aurait alors, pour peu que toutes les contraintes de l'inégalité de Jensen soient vérifiées :

  $$2^{\mathbb{E}(Z)} \ \leqslant \ \mathbb{E}\left(2^Z\right)$$

  Cette fonction ψ est bien convexe sur $\mathbb{R}_+$. Par contre, la v.a.r. Z ainsi définie est à valeurs négatives. Pour se conformer aux contraintes de l'énoncé, on va donc introduire $Z = -\log_2\big(v(V)\big)$ et considérer la fonction φ plutôt que ψ.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
  - × Tout d'abord : $\varphi'(x) = -\ln(2)\, \mathrm{e}^{-x \ln(2)}$.
  - × Et ensuite : $\varphi''(x) = \big(\ln(2)\big)^2\, \mathrm{e}^{-x \ln(2)} \geqslant 0$.

  $$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est donc convexe sur } \mathbb{R}_+.}$$

- On note de plus : $Z = -\log_2\big(v(X)\big)$.
  Démontrons que Z est une v.a.r. finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
  - × Tout d'abord, Z est une v.a.r. finie car X l'est. On a même :

    $$Z(\Omega) \ = \ \{-\log_2\big(v(x)\big) \mid x \in X(\omega)\} \ = \ \{-\log_2\big(v(k)\big) \mid k \in [\![0, n]\!]\}$$

  - × Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Comme la loi de X est à support $[\![0, n]\!]$:

    $$0 < \mathbb{P}(\{X = k\}) \leqslant 1$$

donc	$0 < v(k) \leqslant 1$	
d'où	$\ln\big(v(k)\big) \leqslant 0$	*(par croissance de* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$*)*
puis	$\dfrac{\ln\big(v(k)\big)}{\ln(2)} \leqslant 0$	*(car* $\ln(2) > 0$*)*
ainsi	$-\log_2\big(v(k)\big) \geqslant 0$	

    On en déduit : $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{On a ainsi démontré que la v.a.r. } Z \text{ est une v.a.r. finie et de loi à support } A \subset \mathbb{R}_+.}$$

- On obtient alors :
  - × la fonction φ est convexe sur $\mathbb{R}_+$,
  - × la v.a.r. Z est une v.a.r. finie de loi à support $A \subset \mathbb{R}_+$.

  Par inégalité de Jensen :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{E}(\varphi(Z)) & \geqslant & \varphi(\mathbb{E}(Z)) \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{E}\left(2^{\log_2\left(v(X)\right)}\right) & = & \mathbb{E}\left(2^{-\left(-\log_2\left(v(X)\right)\right)}\right) & & 2^{-\mathbb{E}\left(-\log_2\left(v(X)\right)\right)} \end{array}$$

- Enfin :
  - × par linéarité de l'espérance :

$$2^{-\mathbb{E}\left(-\log_2\left(v(X)\right)\right)} = 2^{-\left(-\mathbb{E}\left(\log_2\left(v(X)\right)\right)\right)} = 2^{\mathbb{E}\left(\log_2\left(v(X)\right)\right)}$$

$$\boxed{\text{Alors : } 2^{\mathbb{E}\left(\log_2\left(v(X)\right)\right)} \leqslant \mathbb{E}\left(2^{\log_2\left(v(X)\right)}\right).}$$

  - × par ailleurs :

$$2^{\log_2\left(v(X)\right)} = \exp\Big(\log_2\left(v(X)\right)\ \ln(2)\Big) = \exp\left(\frac{\ln\left(v(X)\right)}{\cancel{\ln(2)}}\ \cancel{\ln(2)}\right) = \exp\Big(\ln\left(v(X)\right)\Big) = v(X)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}\left(2^{\log_2\left(v(X)\right)}\right) = \mathbb{E}\big(v(X)\big).}$$

□

c) En déduire : $2^{-H(X)} \leqslant \mathbb{P}(\{X = Y\})$.

Démonstration.

- D'après la question ***6.a)*** :

$$H(X) = -\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$

  où $g : \begin{array}{ccl} [\![0, n]\!] & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \log_2\left(\mathbb{P}(\{X = k\})\right) = \log_2\left(v(k)\right) \end{array}$

  D'où : $H(X) = -\mathbb{E}\Big(\log_2\left(v(X)\right)\Big)$. Ainsi :

$$2^{\mathbb{E}\left(\log_2\left(v(X)\right)\right)} = 2^{-H(X)}$$

- De plus, par théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}\big(v(X)\big) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} v(k)\, \mathbb{P}(\{X = k\}) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\mathbb{P}(\{X = k\})\right)^2 & \textit{(par définition de } v\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(\{X = Y\}) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente : } 2^{-H(X)} \leqslant \mathbb{P}(\{X = Y\}).}$$

□

d) Donner un exemple de loi où l'inégalité précédente est une égalité.

Démonstration.
On note X et Y deux v.a.r. aléatoires de même loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, indépendantes.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
2^{-H(X)} &= \exp\big(-H(X)\ln(2)\big) \\
&= \exp\big(-\log_2(n+1)\ln(2)\big) \qquad \textit{(d'après \textbf{9.d)})} \\
&= \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{\cancel{\ln(2)}}\ \cancel{\ln(2)}\right) \\
&= \frac{1}{\exp\big(\ln(n+1)\big)} = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

- D'autre part, d'après ***10.a)*** :

$$\mathbb{P}(\{X=Y\}) = \sum_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big)^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1}{(n+1)^{\cancel{2}}}\times\cancel{(n+1)}$$

Ainsi : $2^{-H(X)} = \dfrac{1}{n+1} = \mathbb{P}(\{X=Y\})$.

> Pour X et Y deux v.a.r. de loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, indépendantes, l'inégalité de ***10.c)*** est une égalité.

Commentaire

Comme pour la question ***9.***, on démontre dans cette question ***10.*** que :
- × la majoration obtenue en ***10.c)*** est optimale : il est impossible de trouver un meilleur majorant de $2^{-H(X)}$ que $\mathbb{P}(\{X=Y\})$,
- × la loi uniforme est une loi pour lequel ce maximum est atteint.

□

Troisième partie : Entropie jointe et information mutuelle de deux variables discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On appelle **entropie jointe** de X et Y le réel :

$$H(X,Y) = -\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\log_2\big(\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\big)$$

avec la convention : $0 \times \log_2(0) = 0$.

11. a) On définit la fonction $g : \{0,1,\dots,n\}^2 \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ en posant pour $(k,j) \in \{0,1,\dots,n\}^2$:

$$g(k,j) = \log_2\big(\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\big)$$

Montrer : $H(X,Y) = -\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. X et Y sont finies, donc la v.a.r. $g(X,Y)$ l'est. Elle admet donc une espérance.

- Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} g(x,y)\, \mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} g(k,j)\, \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\}) && \textit{(car } X(\Omega)\subset [\![0,n]\!] \textit{ et } Y(\Omega)\subset [\![0,n]\!]\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \log_2\big(\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\big)\, \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\}) \\
&= -H(X,Y) && \textit{(par définition de } H(X,Y)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{H(X,Y) = -\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big)}$$

□

b) Montrer : $H(X,Y) = H(Y,X)$.

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \log_2\big(\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\big)\, \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\}) \right) \\
&= -\sum_{0\leqslant k,j\leqslant n} \log_2\big(\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\big)\, \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\}) \\
&= -\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \log_2\big(\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\big)\, \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\}) \right) && \textit{(en sommant suivant les colonnes)} \\
&= -\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \log_2\big(\mathbb{P}(\{Y=j\}\cap\{X=k\})\big)\, \mathbb{P}(\{Y=j\}\cap\{X=k\}) \right) && \textit{(car l'intersection est commutative)} \\
&= H(Y,X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{H(X,Y) = H(Y,X)}$$

□

c) Pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose :

$$H(Y \mid X=k) \ = \ -\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=j\})\, \log_2\big(\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=j\})\big)$$

On appelle **entropie conditionnelle** de Y sachant X le réel :

$$H(Y \mid X) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\})\, H(Y \mid X=k)$$

Montrer : $H(X,Y) \ = \ H(X) + H(Y \mid X)$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& H(Y \mid X = k) \\
= \quad & -\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = j\}) \log_2 \big(\mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y = j\})\big) \\
= \quad & -\sum_{j=0}^{n} \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})} \ \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})}\right) \\
= \quad & -\sum_{j=0}^{n} \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})} \ \Big(\log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})\big) - \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)\Big) \\
= \quad & -\frac{1}{\mathbb{P}(\{X = k\})} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \ \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})\big)\right. \\
- \quad & \left.\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \ \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)\right) \\
= \quad & -\frac{1}{\mathbb{P}(\{X = k\})} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \ \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})\big)\right. \\
- \quad & \left.\log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \ \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})\right)
\end{aligned}$$

- Or, la famille $(\ \{Y = j\} \ )_{j \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& H(Y \mid X = k) \\
= \quad & -\frac{1}{\mathbb{P}(\{X = k\})} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \ \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})\big)\right. \\
- \quad & \left.\log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \ \mathbb{P}(\{X = k\})\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X = k\}) \ H(Y \mid X = k) \\
= \quad & -\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \ \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})\big)\right. \\
- \quad & \left.\log_2 \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big) \ \mathbb{P}(\{X = k\})\right)
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
& H(Y \mid X) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\})\ H(Y \mid X=k) \\
= \quad & -\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})\ \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})\big) \right. \\
- \quad & \left. \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big)\ \mathbb{P}(\{X=k\}) \right) \\
= \quad & -\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})\ \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})\big) \right) \\
+ \quad & \sum_{k=0}^{n} \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big)\ \mathbb{P}(\{X=k\}) \\
= \quad & H(X,Y) - H(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } H(X,Y) = H(X) + H(Y \mid X).}$$

□

d) Montrer que pour tout couple de variables aléatoires X et Y de lois à support $\{0,1,\dots,n\}$, on a :

$$H(X) - H(X \mid Y) \ = \ H(Y) - H(Y \mid X)$$

Démonstration.
D'après la question ***11.b)*** :

$$H(X,Y) \ = \ H(Y,X)$$

D'où, d'après la question ***11.c)*** :

$$H(X) + H(Y \mid X) \ = \ H(Y) + H(X \mid Y)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } H(X) - H(X \mid Y) \ = \ H(Y) - H(Y \mid X).}$$

□

12. On considère dans cette question deux variables aléatoires de lois à support $\{0,1,2,3\}$. On suppose que la loi conjointe de (X,Y) est donnée par le tableau suivant :

j \ k	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{4}$	0	0	0

(on lit dans la $k^{\text{ème}}$ colonne et la $j^{\text{ème}}$ ligne la valeur de $\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})$)

a) Déterminer la loi de X et montrer : $H(X) = \dfrac{7}{4}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) \subset [\![0,3]\!]$.
- Soit $k \in [\![0,3]\!]$.
  La famille $(\,\{Y = j\}\,)_{j \in [\![0,3]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) \ = \ \sum_{j=0}^{3} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})$$

  On en déduit :

  $\times$ $\mathbb{P}(\{X = 0\}) \ = \ \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4} \ = \ \dfrac{1}{2}$

  $\times$ $\mathbb{P}(\{X = 1\}) \ = \ \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} \ = \ \dfrac{1}{4}$

  $\times$ $\mathbb{P}(\{X = 2\}) \ = \ \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{16} \ = \ \dfrac{1}{8}$

  $\times$ $\mathbb{P}(\{X = 3\}) \ = \ \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{16} \ = \ \dfrac{1}{8}$

  On peut récapituler ces résultats dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(\{X = k\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Commentaire

- On peut vérifier :

$$\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(\{X = k\}) \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \ = \ 1$$

  Cette propriété est vérifiée car la famille $(\,\{X = k\}\,)_{k \in [\![0,3]\!]}$ forme un système complet d'événements.
- On pourra s'en servir pour vérifier que les probabilités $(\,\mathbb{P}(\{X = k\})\,)_{k \in [\![0,3]\!]}$ obtenues définissent bien une loi de probabilité pour X.

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{6.d)}},\ H(X) = \frac{7}{4}}$$

□

b) Déterminer la loi de Y et calculer $H(Y)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset [\![0,3]\!]$.

- Soit $j \in [\![0,3]\!]$.
  La famille $(\{X = k\})_{k \in [\![0,3]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{Y = j\}) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})$$

  On en déduit le tableau suivant :

j	0	1	2	3
$\mathbb{P}(\{Y = j\})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \sim \mathcal{U}([\![0,3]\!]).}$$

- D'après ***9.d)*** : $H(Y) = \log_2(3+1) = \log_2(2^2) = 2$.
  La dernière égalité est vraie d'après la question ***1.b)***.

$$\boxed{H(Y) = 2}$$

□

c) Montrer : $H(X \mid Y) = \dfrac{11}{8}$.

Démonstration.

- Soit $k \in [\![0,3]\!]$.

$$\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X = k\}) = \frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{Y = j\})}$$

  Avec le tableau fourni par l'énoncé et le tableau de la question précédente, on obtient le tableau suivant :

j \ k	0	1	2	3
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	1	0	0	0

  (on lit dans la $k^{\text{ème}}$ colonne et la $j^{\text{ème}}$ ligne la valeur de $\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X = k\})$)

- On en déduit :

$$\begin{aligned} H(X \mid Y = 0) &= -\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}_{\{Y=0\}}(\{X = k\}) \log_2\left(\mathbb{P}_{\{Y=0\}}(\{X = k\})\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2} \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) \\ &= \frac{7}{4} \quad \textit{(calcul déjà effectué en } \textbf{\textit{6.d)}}\textit{)} \end{aligned}$$

Avec le même calcul : $H(X \,|\, Y=1) = \dfrac{7}{4}$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} H(X \,|\, Y=2) &= -\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}_{\{Y=2\}}(\{X=k\}) \log_2\left(\mathbb{P}_{\{Y=2\}}(\{X=k\})\right) \\ &= -\left(\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\ &= \log_2(4) \ = \ \log_2(2^2) \ = \ 2 \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} H(X \,|\, Y=3) &= -\sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}_{\{Y=3\}}(\{X=k\}) \log_2\left(\mathbb{P}_{\{Y=3\}}(\{X=k\})\right) \\ &= -\big(1\times\log_2(1) + 0\times\log_2(0) + 0\times\log_2(0) + 0\times\log_2(0)\big) \\ &= \log_2(1) \qquad \textit{(par convention, d'après l'énoncé)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} H(X \,|\, Y) &= \sum_{j=0}^{3} \mathbb{P}(\{Y=j\})\, H(X \,|\, Y=j) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 0 \\ &= \frac{22}{16} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } H(X \,|\, Y) = \frac{11}{8}.}$$

□

d) Que vaut $H(Y \,|\, X)$?

Démonstration.
D'après la question ***11.d)*** :

$$\begin{aligned} H(Y \,|\, X) &= H(Y) - \big(H(X) - H(X \,|\, Y)\big) \\ &= 2 - \frac{7}{4} + \frac{11}{8} \qquad \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{12.a), b)}} \textit{ et } \textbf{\textit{c)}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } H(Y \,|\, X) = \frac{13}{8}.}$$

□

e) Calculer $H(X, Y)$.

Démonstration.
D'après la question ***11.c)*** :

$$H(X,Y) \ = \ H(X) + H(Y \,|\, X) \ = \ \frac{7}{4} + \frac{13}{8}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } H(X,Y) = \frac{27}{8}.}$$

Commentaire

- Dans cette question ***12.***, l'objectif est de calculer $H(X,Y)$ à l'aide des entropies conditionnelles et des formules déterminées en question ***11.***.
- Cet objectif est un peu *ad hoc* puisque, les v.a.r. X et Y pouvant prendre peu de valeurs, il aurait été plus rapide de commencer par la détermination de $H(X,Y)$ pour en déduire les valeurs des entropies conditionnelles $H(X \mid Y)$ et $H(Y \mid X)$ à l'aide de $H(X)$, $H(Y)$ et des formules de la question ***11.***.
  Il n'est cependant pas conseillé de traiter les questions de l'énoncé dans un autre sens : on passera à coup sûr à côté de nombreux points de barème.

□

13. Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0, 1, \dots, n\}$. On appelle **information mutuelle** de X et de Y le réel :

$$I(X,Y) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y = j\})} \right)$$

a) Montrer : $I(X,Y) = I(Y,X)$.

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned}
I(X,Y) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y = j\})} \right) \right) \\
&= \sum_{0 \leqslant k,j \leqslant n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y = j\})} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\}) \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y = j\})} \right) \right) && \textit{(en sommant suivant les colonnes)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y = j\} \cap \{X = k\}) \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{Y = j\} \cap \{X = k\})}{\mathbb{P}(\{Y = j\})\, \mathbb{P}(\{X = k\})} \right) \right) && \textit{(par commutativité de l'intersection et du produit)} \\
&= I(Y,X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I(X,Y) = I(Y,X)}$$

□

b) Montrer : $I(X,Y) = H(X) - H(X \mid Y)$.

Démonstration.
- Soit $(k,j) \in [\![0,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
& \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y = j\})} \right) \\
= \ & \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{Y = j\})} \right) - \log_2 \left(\mathbb{P}(\{X = k\}) \right) \\
= \ & \log_2 \left(\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X = k\}) \right) - \log_2 \left(\mathbb{P}(\{X = k\}) \right)
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
& I(X,Y) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\,\mathbb{P}(\{Y=j\})} \right) \right) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \Big(\log_2 \big(\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=k\})\big) - \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big) \Big) \right) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \log_2 \big(\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=k\})\big) \right) \qquad (*) \\
- \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(\log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big) \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \right) \qquad (**)
\end{aligned}$$

- Commençons par simplifier $(*)$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \log_2 \big(\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=k\})\big) \right) \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y=j\})\, \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=j\}) \log_2 \big(\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=k\})\big) \right) \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y=j\})\, \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=j\}) \log_2 \big(\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=k\})\big) \right) \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \left(\mathbb{P}(\{Y=j\}) \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{\{X=k\}}(\{Y=j\}) \log_2 \big(\mathbb{P}_{\{Y=j\}}(\{X=k\})\big) \right) \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y=j\}) \big(-H(X \,|\, Y=j) \big) \\
= \quad & -H(X \,|\, Y)
\end{aligned}$$

- Simplifions ensuite $(**)$.
  La famille $(\,\{Y=j\}\,)_{j \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{X=k\}) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& -\sum_{k=0}^{n} \left(\log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big) \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \right) \\
= \quad & -\sum_{k=0}^{n} \log_2 \big(\mathbb{P}(\{X=k\})\big)\, \mathbb{P}(\{X=k\}) \\
= \quad & H(X)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } I(X,Y) = H(X) - H(X \,|\, Y).}$$

$\square$

c) Montrer : $I(X,X) = H(X)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$I(X,X) \; = \; \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=j\})} \right) \right)$$

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=j\})} \right) \\
= \; & \cancel{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=j\})} \right)} \\
& + \sum_{\substack{j=0 \\ j = k}}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=j\})} \right)
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $j \neq k$:

$$\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$

Or, par convention : $0 \times \log_2(0) = 0$. Ainsi :

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=j\})} \right) \; = \; 0$$

De plus :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=j\})} \right) \\
= \; & \sum_{\substack{j=0 \\ j = k}}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=j\})} \right) \\
= \; & \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=k\}) \, \log_2 \left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{X=k\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \mathbb{P}(\{X=k\})} \right) \\
= \; & \mathbb{P}(\{X=k\}) \, \log_2 \left(\frac{\cancel{\mathbb{P}(\{X=k\})}}{\cancel{\mathbb{P}(\{X=k\})} \, \mathbb{P}(\{X=k\})} \right) \\
= \; & -\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \log_2 \left(\mathbb{P}(\{X=k\}) \right)
\end{aligned}$$

- On en conclut :

$$I(X,X) \; = \; \sum_{k=0}^{n} \Big(-\mathbb{P}(\{X=k\}) \, \log_2 \left(\mathbb{P}(\{X=k\}) \right) \Big) \; = \; H(X)$$

$$\boxed{I(X,X) = H(X)}$$

□

d) Que vaut $I(X,Y)$ si X et Y sont indépendantes ?

Démonstration.
Supposons que X et Y sont indépendantes.

- Soit $(k,j) \in [\![0,n]\!]^2$.
  Comme X et Y sont indépendantes :
  $$\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \;=\; \mathbb{P}(\{X=k\})\,\mathbb{P}(\{Y=j\})$$
  On en déduit :
  $$\log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=k\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})}\right) \;=\; \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=k\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})}\right) \;=\; \log_2(1) \;=\; 0$$
- Ainsi :
  $$\begin{aligned} I(X,Y) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})\ \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\,\mathbb{P}(\{Y=j\})}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \times 0\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes, alors : } I(X,Y) = 0.}$$

□

14. Soient X et Y deux variables aléatoires de lois à support $\{0,1,\dots,n\}$. On fixe $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour $0 \leqslant j \leqslant n$, on pose : $p_j = \dfrac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})}$. On suppose que $p_j > 0$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$ et on pose : $x_j = \dfrac{\mathbb{P}(\{X=k\})\,\mathbb{P}(\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}$.

a) Montrer : $\sum\limits_{j=0}^{n} p_j = 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  $$\sum_{j=0}^{n} p_j \;=\; \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})} \;=\; \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})}$$
- Or, on a déjà démontré (en question ***11.c)*** par exemple) :
  $$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=j\}) \;=\; \mathbb{P}(\{X=k\})$$
  On en déduit :
  $$\sum_{j=0}^{n} p_j \;=\; \frac{\mathbb{P}(\{X=k\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})} \;=\; 1$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} p_j = 1}$$

□

b) Soit Z_k une variable aléatoire de loi à support $\{x_0, \dots, x_n\}$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(\{Z_k = x_j\}) = p_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$. Montrer :

$$\mathbb{E}\big(\log_2(Z_k)\big) \leqslant 0$$

Démonstration.

- La v.a.r. Z_k est bien définie car :
  - × $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $p_j \geqslant 0$,
  - × $\sum\limits_{j=0}^{n} p_j = 1$.
- Démontrons : $Z_k(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
  - × Tout d'abord, d'après l'énoncé : $Z_k(\Omega) \subset \{x_0, \dots, x_n\}$.
  - × Or, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$: $x_j = \dfrac{\mathbb{P}(\{X = k\})\, \mathbb{P}(\{Y = j\})}{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})} \geqslant 0$.

$$\boxed{Z_k(\Omega) \subset \mathbb{R}_+}$$

- On remarque alors que :
  - × la fonction $\log_2$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après ***1.c)***),
  - × la v.a.r. Z_k est de loi à support $A = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$, avec $\text{Card}(A) = n + 1$.

  Par inégalité de Jensen (question ***8.d)***) :

$$\mathbb{E}\big(\log_2(Z_k)\big) \leqslant \log_2\big(\mathbb{E}(Z_k)\big)$$

- Or, par définition de Z_k :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_k) &= \sum_{j=0}^{n} x_j\, \mathbb{P}(\{Z_k = x_j\}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} x_j\, p_j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{\cancel{\mathbb{P}(\{X = k\})}\, \mathbb{P}(\{Y = j\})}{\cancel{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}}\ \frac{\cancel{\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = j\})}}{\cancel{\mathbb{P}(\{X = k\})}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{Y = j\}) \\
&= 1 \qquad \textit{(car } \big(\{Y = j\}\big)_{j \in [\![0,n]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)}
\end{aligned}$$

  D'où : $\log_2\big(\mathbb{E}(Z_k)\big) = \log_2(1) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}\big(\log_2(Z_k)\big) \leqslant 0.}$$

□

c) En déduire : $I(X, Y) \geqslant 0$.

Démonstration.

- Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\log_2(Z_k)\big) \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \log_2(x_j)\, \mathbb{P}(\{Z_k = x_j\}) \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \log_2(x_j)\, p_j \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})}\right)\ \frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})} \\
= \quad & -\frac{1}{\mathbb{P}(\{X=k\})}\ \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\ \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})}\right)
\end{aligned}$$

- De plus, d'après la question précédente :

$$\mathbb{E}\big(\log_2(Z_k)\big) \ \leqslant\ 0$$

D'où :

$$-\frac{1}{\mathbb{P}(\{X=k\})}\ \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\ \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})}\right) \ \leqslant\ 0$$

Comme $\mathbb{P}(\{X=k\}) \geqslant 0$:

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\ \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})}\right) \ \geqslant\ 0$$

- En sommant ces inégalités pour k variant de 0 à n :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\ \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})\ \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(\{X=k\}\cap\{Y=j\})}{\mathbb{P}(\{X=k\})\ \mathbb{P}(\{Y=j\})}\right)}_{=\ I(X,Y)} \ \geqslant\ 0$$

$$\boxed{I(X,Y) \geqslant 0}$$

Commentaire

- On a donc démontré dans cette question que l'information mutuelle de X et de Y, $I(X,Y)$ est minorée par 0.
- Remarquons qu'on a démontré plus tôt (en question ***13.d)***) :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad I(X,Y) = 0$$

  Le minorant trouvé dans cette question ***14.c)*** est donc atteint si X et Y sont indépendantes. Cela signifie en particulier que la minoration trouvée est optimale : il est impossible de trouver un meilleur minorant de l'information mutuelle que 0.
- Il n'est pas si surprenant de trouver que l'information mutuelle est minimale dans le cas de 2 v.a.r. X et Y indépendantes puisque l'énoncé nous introduit en toute première page l'information mutuelle $I(X,Y)$ comme une mesure de l'information apportée par les v.a.r. X et Y l'une sur l'autre.
- Dans tout ce problème, on introduit et étudie quelques notions de statistiques, plus particulièrement de la théorie de l'information développée par Fisher et Shannon. Pour d'autres exemples d'utilisation de cette théorie, on pourra se référer au sujet `ESSEC-II 2009`.

$\square$