

Application de l'inégalité des accroissements finis à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1. (★)

On considère la fonction f définie pour $x \geq 0$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

On considère aussi la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0, 1[$, que l'on notera r_2 . Préciser la valeur de r_2 .

Démonstration.

Notons $P(X) = X^2 + X - 1$.

- P est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 1^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
- Ainsi, P admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

- Or : $4 < 5 < 9$. Donc : $2 < \sqrt{5} < 3$ et $-2 > -\sqrt{5} > -3$. On en déduit :

$$-\frac{3}{2} > \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} > -\frac{4}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{2}{2}$$

et enfin : $r_1 \in \left] -2, -\frac{3}{2} \right[$ et $r_2 \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet $r_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
comme unique solution dans $]0, 1[$. □

2. Montrer que si x est un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.

Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

On a alors $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

donc $\frac{3}{2} \leq x + 1 \leq 2$

et $\frac{2}{3} \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ (par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{+*})

Comme $\frac{2}{3} \leq 1$, on en déduit que $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. □

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1) **Initialisation :**

$u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

L'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ étant stable par f , on en déduit que $f(u_n) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

D'où $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. □

4. Démontrer que : $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

Démonstration.

- La fonction f est C^∞ sur \mathbb{R}^+ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto x+1$, qui est C^∞ sur \mathbb{R}^+ (en tant que fonction polynomiale) et qui ne s'annule pas sur \mathbb{R}^+ .
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

(soit comme dérivée de l'inverse soit en écrivant $f(x) = (1+x)^{-1}$)

$$\text{Ainsi, } |f'(x)| = \left| \frac{-1}{(x+1)^2} \right| = \frac{|-1|}{|(x+1)^2|} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

- Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$$\text{On a alors} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\text{donc} \quad \frac{3}{2} \leq x+1 \leq 2$$

$$\text{et} \quad \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \leq (x+1)^2 \leq 2^2 = 4 \quad \begin{array}{l} \text{(par croissance} \\ \text{de la fonction} \\ \text{carrée sur } \mathbb{R}^+) \end{array}$$

$$\text{ainsi} \quad \frac{4}{9} \geq \frac{1}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{(par décroissance} \\ \text{de la fonction} \\ \text{inverse sur } \mathbb{R}^{+*}) \end{array}$$

$$\text{Pour tout } x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}. \quad \square$$

5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$.

Démonstration.

D'après les questions précédentes :

$$\begin{array}{l} \times f \text{ est dérivable sur } [\frac{1}{2}, 1], \\ \times \forall x \in [\frac{1}{2}, 1], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}. \end{array}$$

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $x = r_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(r_2)| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$$

Or r_2 vérifie $r_2^2 + r_2 - 1 = 0$. Ainsi :

$$r_2^2 + r_2 = 1 \quad \text{et} \quad r_2(r_2 + 1) = 1 \quad \text{d'où} \quad r_2 = \frac{1}{r_2 + 1} = f(r_2)$$

$$\text{On en conclut : } |u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|. \quad \square$$

6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

$$\text{où } \mathcal{P}(n) : |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

1) **Initialisation :**

$$|u_0 - r_2| \leq \frac{1}{2} \leq 1 \text{ car } u_0 \text{ et } r_2 \text{ sont des éléments de } [\frac{1}{2}, 1].$$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

$$(i.e. |u_{n+1} - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}).$$

D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2|$.

Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - r_2| \leq \frac{4}{9} |u_n - r_2| \leq \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

□

7. À partir de quelle valeur de n le terme u_n est-il une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près ?

On choisira la réponse parmi : $n = 9, 18, 24,$ ou 36 .

On donne : $\ln 10 \simeq 2,30$ $\ln 2 \simeq 0,69$ $\ln 3 \simeq 1,10$.

Démonstration.

- Pour que u_n soit une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près, il suffit que : $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-6}$. En effet, si c'est le cas on obtient par transitivité :

$$|u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-6}$$

• Or :

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{4}{9}\right) \leq -6 \ln(10) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-6 \ln(10)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} \quad (\text{car } \ln\left(\frac{4}{9}\right) < 0 \text{ puisque } \frac{4}{9} < 1)$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{-6 \ln(10)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} &= \frac{-6 \ln(10)}{\ln(4) - \ln(9)} = \frac{-6 \ln(10)}{\ln(2^2) - \ln(3^2)} = \frac{-6 \ln(10)}{2 \ln(2) - 2 \ln(3)} \\ &= \frac{-6 \ln(10)}{2(\ln(2) - \ln(3))} = \frac{-3 \ln(10)}{\ln(2) - \ln(3)} = \frac{3 \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\frac{3 \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)} \simeq \frac{3 \times 2,3}{1,1 - 0,7} = \frac{6,9}{0,4} = \frac{6,9}{\frac{4}{10}} = \frac{10 \times 6,9}{4} = \frac{69}{4}$$

Comme $68 < 69 \leq 72$, on a $17 < \frac{69}{4} \leq 18$, le choix de $n = 18$ assure que u_n est une approximation de r_2 à 10^{-6} près.

□

Exercice 2. (★) (d'après EML 96)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

1. a) Démontrer que f est paire sur \mathbb{R} .

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = f(x)$$

Ainsi, la fonction est paire sur \mathbb{R} . □

b) Justifier que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et étudier ses variations.

Démonstration.

- La fonction f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car est le quotient de :
 - × la fonction $x \mapsto e^x$, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ,
 - × la fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et **qui ne s'annule pas sur \mathbb{R}** .

(en fait, on peut démontrer par une argumentation similaire que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R})

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x (e^{2x} + 1) - e^x (2 e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^{3x} + e^x - 2 e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Comme $(e^{2x} + 1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $e^x - e^{3x}$.

- Si $x > 0$, $3x > x$ et donc $e^{3x} > e^x$ par stricte croissance de la fonction exponentielle.
Dans ce cas, $f'(x) < 0$.
L'autre cas se déduit par parité de la fonction f .

- On en déduit le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	0	$\frac{1}{2}$	0

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

$$\times f(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$\times \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x}{e^{2x}} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1}{e^x} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration.

Notons $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} par somme de fonctions \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas :

- Si $x < 0$: comme $f(x) > 0$, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.
- Si $x \geq 0$: tout d'abord, $g'(x) = f'(x) - 1$.
Or $f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.

La fonction g est :

- × continue sur $[0, +\infty[$,
- × strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or :

$$g([0, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0)] =] -\infty, \frac{1}{2}]$$

En effet :

$$\times g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\times \text{comme } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ on obtient : } g(x) = f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Enfin, comme $0 \in]-\infty, \frac{1}{2}]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

On en déduit que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in [0, +\infty[$. □

d) Justifier que : $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près.

Démonstration.

Tout d'abord, remarquons que :

$$\times g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2} \geq 0,$$

$$\times g(\ell) = f(\ell) - \ell = 0,$$

$$\times g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^1 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^{\frac{1}{2}} - e - 1}{2(e+1)} \leq 0.$$

En effet :

$$2e^{\frac{1}{2}} - e - 1 \simeq 2 \times 1,65 - 2,72 - 1 = 3,3 - 3,72 = -0,42 \leq 0$$

(les valeurs étant données au centième près, l'approximation obtenue est exacte au moins au dixième près)

On obtient donc : $g(0) \geq g(\ell) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ces trois éléments sont dans l'ensemble $]-\infty, \frac{1}{2}]$.

En appliquant $g^{-1} :]-\infty, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient : $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

On pouvait aussi tout simplement remarquer que, d'après la question précédente :

$$\bullet \ell \in \mathbb{R}^+$$

$$\bullet \ell = f(\ell)$$

Donc $\ell \in f(\mathbb{R}^+)$. Or $f(\mathbb{R}^+) =]0, \frac{1}{2}]$. Ainsi $\ell \in]0, \frac{1}{2}]$. □

e) Montrer que : $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x)$.

En déduire que : $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Démonstration.

Soit $x \geq 0$.

• D'après la question **1.b.** :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{1 + e^{2x}} \leq 0$$

Donc : $|f'(x)| = -f'(x) = \frac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}}$. Et ainsi :

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{3x} - e^x - e^x \times (e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{\cancel{e^{3x}} - e^x - \cancel{e^{3x}} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x)$.

• Or, l'étude de la fonction f (question **1.b.**) démontre qu'elle atteint son maximum en 0.

On en déduit que : $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}$. □

f) Vérifier que $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Démonstration.

La fonction f est continue et décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On en déduit que :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)\right] = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f .

□

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

1) Initialisation :

$u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) Hérité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

(i.e. $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$).

Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or :

× par hypothèse de récurrence, on sait : $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

× l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f .

On obtient donc : $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

□

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \quad \text{puis que} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Démonstration.

• D'après les questions précédentes :

× f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

× $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $x = \ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

Et ainsi : $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.

• Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

1) Initialisation :

$|u_0 - \ell| \leq \frac{1}{2}$ car u_0 et ℓ sont des éléments de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) Hérité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

(i.e. $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$).

D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.

Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

□

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

• D'après la question précédente : $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

• Or : $\frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $|u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui équivaut à $u_n - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est convergente et de limite ℓ . □

3. Informatique

a) Écrire une fonction **Scilab** **f** qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$.

Démonstration.

```

1  function y = f(x)
2      y = exp(x) / (exp(2 * x) + 1)
3  endfunction

```

□

b) En utilisant la fonction **f** précédente, écrire une fonction **SuiteU** qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n .

Démonstration.

```

1  function v = SuiteU(n)
2      v = 0
3      for i = 1 : n
4          v = f(v)
5      end
6  endfunction

```

Commentaire

Dans ce code, on réalise un appel à la fonction **f**. Il faut aussi savoir coder la fonction **SuiteU** lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction **f**.

```

1  function v = SuiteU(n)
2      v = 0
3      for i = 1 : n
4          v = exp(v) / (exp(2 * v) + 1)
5      end
6  endfunction

```

□

c) En utilisant la fonction **SuiteU** précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Scilab** une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

Démonstration.

D'après la question 2.b., pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6}$, on obtiendra par transitivité : $|u_n - \ell| \leq 10^{-6}$. Or :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 10^6 \Leftrightarrow (n+1) \ln(2) \geq 6 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n+1 \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} - 1$$

Pour $N = \left\lceil \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil$ (et les entiers plus grands) on est donc assuré que :

$$|u_N - \ell| \leq 10^{-6}$$

ce qui signifie que u_N est une approximation de ℓ à 10^{-6} près.

Il suffit alors d'appeler la fonction **SuiteU** avec pour paramètre N .

$\frac{1}{2}$ $N = \text{ceil}(6 \star \log(10) / \log(2) - 1)$
 $\frac{2}{2}$ $u = \text{SuiteU}(N)$

□

Exercice 3. (★) (d'après EML 2009)On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.**1. a)** Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .*Démonstration.*

- La fonction f est continue (et même C^∞) sur $]0, +\infty[$ comme quotient de :
 - × $x \mapsto x$ continue (C^∞) sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
 - × $x \mapsto e^x - 1$ continue (C^∞) sur $]0, +\infty[$ et qui **ne s'annule pas sur cet intervalle**.
- De même, la fonction f est continue (C^∞) sur $] - \infty, 0[$. Elle est donc continue sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0)$.
Ainsi, f est continue en 0.

On en conclut que f est continue sur \mathbb{R} .

□

b) Justifier que f est de classe C^1 sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.*Démonstration.*

- D'après la question précédente, f est C^1 sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- Soit $x \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x) e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x) e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

□

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et que f est C^1 sur \mathbb{R} .

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$u(x) = (1-x)e^x - 1.$$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = -xe^x$$

Comme $e^x > 0$, $u'(x)$ est du signe opposé de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$		+	-
Variations de u		↗ 0 ↘	
	-1		$-\infty$

- b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

Démonstration.

- La fonction u est décroissante sur \mathbb{R}_+ et croissante sur \mathbb{R}_- . Elle admet donc un maximum en 0. Ce maximum vaut $u(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \leq 0$.
- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2} < 0$$

car $(e^x - 1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur \mathbb{R}^* .

- Enfin, $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0.}$$

□

- c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Démonstration.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$. Et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

□

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} &= x \\ \Leftrightarrow e^x - 1 &= 1 \quad (\text{car } x \neq 0) \\ \Leftrightarrow e^x &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= \ln(2) \end{aligned}$$

- D'autre part, $f(0) = 1$ donc 0 n'est pas un point fixe de f .

La fonction f admet pour unique point fixe $\alpha = \ln(2)$.

□

4. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

Démonstration.

- Considérons la fonction $g : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2e^x(e^x - 1 - x)$$

- Comme $e^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1 - x$.
- Or la fonction exp est convexe.
Elle est donc située au-dessus de ses tangentes et en particulier au-dessus de sa tangente en 0.
Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
- On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 0$.
La fonction g est donc croissante.
- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq g(0) = 0$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

□

b) Montrer $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

Démonstration.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2(1-x)e^x - 2 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2e^x - 2xe^x - 2 + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

□

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

- Si $x \neq 0$, d'après la question précédente, $f'(x) + \frac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$ car $2(e^x - 1)^2 > 0$.

Et comme $g(x) \geq 0$ d'après la question 2.a), on a : $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$.

- D'autre part, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que : $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) \geq \frac{1}{2}$.

D'autre part, $f'(x) < 0$ d'après la question 2.a).

$\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$

□

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$,
- $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ donc $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ce qui signifie $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis on a donc :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, |f(y) - f(x)| \leq |y - x|$$

Comme $u_0 = 1 \geq 0$ et que l'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f (d'après la question 2.c) de la première partie), on peut démontrer par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, +\infty[$.

Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $y = u_n$ et $x = \alpha = \ln(2) \geq 0$. On a alors :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite (u_n) et $f(\alpha) = \alpha$ car α est le point fixe de f .

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

□

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

1) **Initialisation** :

$u_0 = 1$, donc $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = |1 - \ln(2)| = 1 - \ln(2)$.

En effet, $1 - \ln(2) \geq 0$ puisque $e^1 \geq 2$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

(i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(1 - \alpha)$).

D'après la question 2.d) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) = \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha). \quad \square$$

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Démonstration.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}(1 - \alpha) = 0$.

• Donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite $(u_n - \alpha)$ est convergente de limite nulle.

Autrement dit, (u_n) est convergente de limite α . □

7. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Démonstration.

```

1  u = 1
2  n = 0
3  while abs(u - log(2)) >= 10 ^ (-9)
4      u = u / (exp(u) - 1)
5      n = n + 1
6  end
7  disp(n)

```

□

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α , comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$?

Écrire l'appel correspondant en **Scilab**.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $\alpha \geq 0$, $1 - \alpha \leq 1$. Ainsi : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha) \leq \frac{1}{2^n}$.
- Or, comme $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$.
- Déterminons le premier $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant cette propriété :

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 10^9 \quad (\text{par décroissance de la fonction inverse})$$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq 9 \ln(10) \quad (\text{car } \ln \text{ est strictement croissante})$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{9 \ln(10)}{\ln(2)} \quad (\text{car } \ln(2) > 0)$$

Ainsi, l'entier n_0 cherché est : $n_0 = \left\lceil \frac{9 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$.

On obtient l'entier cherché par l'appel : `ceil(9*log(10) / log(2))`.

Commentaire

Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

```

1  u = 1
2
3  for i = 1:N
4      u = u / (exp(u)-1)
5  end
6  disp(u)

```

□

Exercice 4. (★)

On considère la fonction $f : x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$.

On définit alors la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

1. Démontrer que l'intervalle $I = [3, 4]$ est stable par f .

Démonstration.

Soit $x \in [3, 4]$.

On a
alors $3 \leq x \leq 4$

donc $\ln(3) \leq \ln(x) \leq \ln(4)$ (par croissance de la fonction \ln)

et $\frac{-1}{4} \ln(3) \geq \frac{-1}{4} \ln(x) \geq \frac{-1}{4} \ln(4)$

ainsi $4 - \frac{1}{4} \ln(3) \geq f(x) \geq 4 - \frac{1}{4} \ln(4) = 4 - \frac{\ln(2)}{2}$

- Comme $\ln(2) \leq 1$, $-\frac{\ln(2)}{2} \geq -\frac{1}{2}$ et donc $4 - \frac{\ln(2)}{2} \geq \frac{7}{2} \geq 3$.
- Comme $\ln(3) \geq 1$, $-\frac{\ln(3)}{4} \leq -\frac{1}{4}$ et donc $4 - \frac{\ln(3)}{4} \leq \frac{15}{4} \leq 4$.

On en déduit que $f(x) \in [3, 4]$.

□

2. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Démonstration.

Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : u_n \in [3, 4]$.

1) **Initialisation** :

$u_0 = 3 \in [3, 4]$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [3, 4]$.

L'intervalle $[3, 4]$ étant stable par f , on en déduit que $f(u_n) \in [3, 4]$.

D'où $u_{n+1} \in [3, 4]$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3, 4]$.

□

3. Démontrer que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

Démonstration.

• La fonction f est C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} car \ln l'est.

• Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{4x}$$

$$\text{Ainsi, } |f'(x)| = \left| \frac{-1}{4x} \right| = \frac{|-1|}{|4x|} = \frac{1}{4x}$$

- Soit $x \in [3, 4]$.

$$\text{On a alors } 3 \leq x \leq 4$$

$$\text{donc } 12 \leq 4x \leq 16$$

$$\text{et } \frac{1}{12} \geq \frac{1}{4x} \geq \frac{1}{16} \quad (\text{par croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}^{+*})$$

$$\text{Pour tout } x \in [3, 4], \text{ on a : } |f'(x)| = \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{12}.$$

□

4. On admet qu'il existe un unique $r \in I$ tel que $f(r) = r$.

$$\text{Démontrer que : } \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{12} |u_n - r|.$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes :

× f est dérivable sur $[3, 4]$,

× $\forall x \in [3, 4], |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in [3, 4]^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [3, 4]$ et $x = r \in [3, 4]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(r)| \leq \frac{1}{9} |u_n - r|$$

Or r est tel que : $f(r) = r$ (r est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$.

$$\text{On en conclut : } |u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{12} |u_n - r|.$$

□

5. Dédurre de ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

$$\text{où } \mathcal{P}(n) : |u_n - r| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n.$$

1) Initialisation :

$|u_0 - r| \leq 1$ car u_0 et r sont des éléments de $[3, 4]$, intervalle de largeur 1.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) Hérité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

$$(i.e. |u_{n+1} - r| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}).$$

D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{12} |u_n - r|$.

Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - r| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{12} |u_n - r| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n.$$

□