Thème : probabilités

I. Mise en jambe : lois discrètes usuelles

Exercice 1
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$.

1. Déterminer la valeur, si elles existent, des quantités suivantes.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Rappelons qu'on dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n, p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0, 1[$ si :
  a) $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
  b) $\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k} \ p^k q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$

  Dans la suite, notons $p = \frac{1}{4}$.
- Comme X est une v.a.r. finie alors X admet des moments à tous les ordres.
  En particulier, X admet une espérance et une variance.
- Déterminons $\mathbb{E}(X)$. Par définition :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}(\{X = x\}) \ = \ \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ = \ \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

  Or, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
  (cette relation est vraie pour $k = 0$ si on considère $\binom{n-1}{-1} = 0$)
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k \ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k \ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} p^{k+1} \ q^{n-(k+1)} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \ q^{(n-1)-k} \\
&= np \ (p+q)^{n-1} \ = \ np && \textit{(car } p + q = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

- Déterminons maintenant $\mathbb{V}(X)$. D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Or, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \; \mathbb{P}(\{X = x\}) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \; k^2 \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \; k^2 \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k}$$

On écrit alors : $k^2 = k \; (k-1) + k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} k^2 \binom{n}{k} &= (k \; (k-1) + k) \; \binom{n}{k} \\ &= k \; (k-1) \; \binom{n}{k} + k \; \binom{n}{k} \\ &= (k-1) \; k \binom{n}{k} + k \; \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \; k^2 \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \; (k-1) \; k \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \; k \; \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k}$$

On reconnaît la partie de droite : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \; k \; \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k} \;=\; \mathbb{E}(X)$.
Il reste à déterminer la partie de gauche.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \; (k-1) \; k \binom{n}{k} \; p^k q^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} \; n \; (k-1) \binom{n-1}{k-1} \; p^k q^{n-k} && \textit{(par la relation binomiale précédente)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \; n \; (k-1) \binom{n-1}{k-1} \; p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \; n \; (n-1) \binom{n-2}{k-2} \; p^k q^{n-k} && \textit{(en adaptant la relation binomiale)} \\ &= n \; (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \; \binom{n-2}{k} \; p^{k+2} q^{n-(k+2)} \\ &= n \; (n-1) \; p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \; \binom{n-2}{k} \; p^k q^{(n-2)-k} \\ &= n \; (n-1) \; p^2 \end{aligned}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient que : $\mathbb{E}(X^2) = n \; (n-1) \; p^2 + np$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= n(n-1) \; p^2 + np - (np)^2 \\ &= np \; ((n-1) \; p + 1 - np) \\ &= np \; (\cancel{np} - p + 1 - \cancel{np}) \;=\; np \; (1-p) \;=\; npq \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = npq}$$

$$\boxed{\text{Si } X \sim \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{4}\right) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = \frac{n}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = n \; \frac{1}{4} \; \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}.}$$

Commentaire

- On a refait le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ ici pour rappeler la méthode. Mais il faut connaître la valeur de l'espérance et de la variance des lois classiques. Aux concours, seul le résultat est exigible et il ne faudra donc pas, sauf si c'est explicitement demandé, refaire ces calculs.
- La méthode de calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ se base sur l'écriture sur les éléments $k \in X(\Omega)$:

$$k^2 = k(k-1) + k$$

À l'échelle des variables aléatoires cela correspond à l'écriture :

$$X^2 = X(X-1) + X$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient alors :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$

On retrouve ainsi la partie de gauche et la partie de droite du calcul précédent. □

b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.

Démonstration.
La v.a.r. $X-3$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui admet une variance.

- De plus par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X-3) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(3) \;=\; \mathbb{E}(X) - 3 \;=\; \frac{n}{4} - 3$$

- Et par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X-3) \;=\; \mathbb{V}(X) \;=\; \frac{3n}{16}$$

(on rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X-3) = \frac{n}{4} - 3 \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = \frac{3n}{16}}$$

□

c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration.
Avec les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X) = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X) = 4\,\frac{3n}{16} = \frac{3\,n}{4}}$$

□

d) $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

- On a déjà vu que X, en tant que v.a.r. finie, admet des moments à tous les ordres. En particulier, X^2 admet une espérance.
- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&= npq + (np)^2 \\
&= np(1-p) + n^2p^2 \\
&= np - np^2 + n^2p^2 \;=\; np + n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = np + n(n-1)p^2 = \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{16} = \frac{n(n+3)}{16}}$$

Commentaire

Il faut retenir cette méthode : lorsqu'on connaît la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (il faut les connaître dans le cas des lois classiques), on obtient immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

□

2. Reprendre la question précédente dans le cas où X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Rappelons qu'on dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi géométrique** de paramètre $\dfrac{1}{3}$ si :
  - ***a)*** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
  - ***b)*** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \dfrac{1}{3}$
- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \dfrac{1}{3}$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

- On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $\dfrac{2}{3} \in \,]0,1[$. On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \;=\; \frac{1}{3} \, \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} \;=\; \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} \, \frac{1}{(\frac{1}{3})^{\cancel{2}}} \;=\; 3$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 3}$$

- Démontrons que X admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance).
  Remarquons : $X^2 = X(X-1) + X$. On en déduit :

  $$\boxed{X^2 \text{ admet une espérance } \Leftrightarrow X(X-1) \text{ admet une espérance}}$$

  Notons que $X(X-1)$ est une variable aléatoire discrète dont l'ensemble image est $(X(X-1))(\Omega) = \{n\,(n-1) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
  D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n(n-1)\,\mathbb{P}(\{X=n\})$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
  Soit $N \in \mathbb{N}$. Notons $p = \frac{1}{3}$ et $q = 1-p$ dans la suite. On a :

  $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} n(n-1)\,\mathbb{P}(\{X=n\}) &= \sum_{n=1}^{N} n(n-1)\,p\,q^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\,p\,q^{n-1} \\ &= p\,q \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\,q^{n-2} \end{aligned}$$

  On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée deuxième convergente car de raison $q = \frac{2}{3} \in \,]-1,1[$. Ainsi :

  $$p\,q \sum_{n=2}^{N} n(n-1)\,q^{n-2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} p\,q\,\frac{2}{(1-q)^3} = p\,q\,\frac{2}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

  On en conclut que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n(n-1)\,p\,q^{n-1}$ converge.
  Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance.
  Ce qui démontre que X^2 admet une espérance, donnée par :

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\big(X(X-1)+X\big) \\ &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}(2q+p) \end{aligned}$$

  On en déduit, par la formule de Kœnig-Huygens :

  $$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2\,q+p) - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2\,q+p-1) \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2\,(1-p)+p-1) \\ &= \frac{1}{p^2}\,(2-2\,p+p-1) = \frac{1}{p^2}\,(1-p) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{\cancel{3}}\,3^{\cancel{2}} = 6 \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{Si } X \sim \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{3}\right) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = 3 \text{ et } \mathbb{V}(X) = 6.}$$

Commentaire

- On a refait le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ ici pour rappeler la méthode. Mais il faut connaître la valeur de l'espérance et de la variance des lois classiques. Aux concours, seul le résultat est exigible et il ne faudra donc pas, sauf si c'est explicitement demandé, refaire ces calculs.
- Rappelons que si X une v.a.r. discrète infinie telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$ $(p \in \,]0,1[)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}} = \frac{1-p}{p^2}$$

- On se sert de nouveau ici de la stratégie développée en question ***1***. On se permet toutefois de raisonner directement sur les v.a.r. . Dans un exercice de concours, c'est souvent cette stratégie qui sera adoptée, l'énoncé demandant généralement explicitement de déterminer la valeur de l'espérance de $X(X-1)$ avant de déterminer la variance de la v.a.r. X. □

b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.

Démonstration.
La v.a.r. $X-3$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui admet une variance.

- De plus par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X-3) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(3) \;=\; \mathbb{E}(X) - 3 \;=\; 3-3 \;=\; 0$$

- Et par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X-3) \;=\; \mathbb{V}(X) \;=\; 6$$

(on rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X-3) = 0 \;\text{ et }\; \mathbb{V}(X) = 6}$$

□

c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration.
Avec les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(2X) = 2\,\mathbb{E}(X) = 2 \times 3 = 6 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X) = 4\,\mathbb{V}(X) = 4 \times 6 = 24}$$

□

d) $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance. Elle admet donc un moment d'ordre 2.
- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) \;&=\; \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&=\; \frac{q}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\
&=\; \frac{q}{p^2} + \frac{1}{p^2} \\
&=\; \frac{q+1}{p^2} \;=\; \frac{\frac{2}{3}+1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \;=\; \frac{5}{\cancel{3}}\, 3^{\cancel{2}} = 5 \times 3 = 15
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{q+1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} = 15}$$

Commentaire

En réalité, on a déjà déterminé $\mathbb{E}\big(X^2\big)$ en question ***2.a)***. On préfère présenter ici cette démonstration pour mettre en avant la méthode qu'il convient de retenir : lorsqu'on connaît la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (il faut les connaître dans le cas des lois classiques), on obtient immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

$\square$

II. Méthodologie : Calculs de probabilités

Afin de résoudre un exercice de calcul de probabilités, il faudra penser au schéma suivant.

0) Introduction des événements basiques (le fait d'avoir tiré une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu pile au $i^{\text{ème}}$ tirage, le fait d'avoir obtenu un 6 au $i^{\text{ème}}$ tirage …) liés à l'expérience considérée.
Nommage de l'événement A dont on cherche à déterminer la probabilité.
(ces deux étapes sont parfois directement données dans l'énoncé)

1) Décomposition de l'événement A à l'aide d'événements basiques.

2) Deux cas se présentent alors :

(i) si cette décomposition fait apparaître une union, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{union / incompatibilité / somme}}$$

Dans le cas d'une union finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette union (cas d'une union croissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles.
  - × si c'est le cas, on utilise l'additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la formule du crible.

Dans le cas d'une union infinie d'événements

- On vérifie si les événements sont 2 à 2 incompatibles :
  - × si c'est le cas, on utilise la σ-additivité de $\mathbb{P}$.
  - × si ce n'est pas le cas, on se ramène au cas d'une union finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une intersection d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

(ii) si cette décomposition fait apparaître une intersection, il faut retenir le triptyque :

$$\boxed{\text{intersection / indépendance / produit}}$$

Dans le cas d'une intersection finie d'événements

- Si cela est possible, on simplifie cette intersection (cas d'une intersection décroissante d'événements par exemple).
- Sinon, on vérifie si les événements sont mutuellement indépendants.
  - × si c'est le cas, on utilise la formule associée.
  - × si ce n'est pas le cas, on peut penser à utiliser la Formule des Probabilités Composées (FPC).

Dans le cas d'une intersection infinie d'événements

- On se ramène au cas d'une intersection finie d'événements en utilisant le théorème de la limite monotone.

Si toutes ces tentatives échouent, on peut se ramener au cas d'une union d'événements en considérant la formule liant probabilité d'un événement à la probabilité de l'événement contraire.

Remarque

- L'étape de décomposition des événements est **primordiale**.
  On raisonne `TOUJOURS` sur les événements et `JAMAIS` directement sur les probabilités.

  ~~$\mathbb{P}(A) = 0$ car c'est la probabilité d'obtenir ...~~

  (cf démarche de l'exrcice sur la limite monotone)

- Lorsqu'il s'agit de raisonner sur les événements, on adopte la rédaction suivante :

  ~~L'événement A signifie que ...~~ ~~L'événement A est réalisé $\Leftrightarrow B$~~ ~~$A \Leftrightarrow B$~~

  L'événement A est réalisé $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ L'événement B est réalisé ✓

  Ce qui permet de conclure : $A = B$ et ainsi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

- Afin de déterminer une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(B)$ on pourra rédiger comme suit :

  Si l'événement A est réalisé, **c'est que** ...

  Dans ce cas, l'événement B est réalisé si et seulement si ...

III. Séance 1 : formule des probabilités composées

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

1. a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathbb{P}\big(\{N = n\}\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\begin{array}{rcl} B_k & : & \text{« on obtient une boule bleue au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »} \\ R_k & : & \text{« on obtient une boule rouge au } k^{\text{ème}} \text{ tirage »} \end{array}$$

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } \{N = n\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{Lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient } n \text{ boules} \\ \Leftrightarrow & \text{Lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient } n-1 \text{ boules bleues et 1 boule rouge} \\ \Leftrightarrow & \text{On a pioché } n-2 \text{ boules bleues puis la boule rouge} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{On a obtenu une boule bleue au } 1^{\text{er}} \text{ tirage} \\ \texttt{ET} & \text{on a obtenu une boule bleue au } 2^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ \vdots & \qquad\vdots \\ \texttt{ET} & \text{on a obtenu une boule bleue au } (n-1)^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ \texttt{ET} & \text{on a obtenu une boule rouge au } n^{\text{ème}} \text{ tirage} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1} \text{ est réalisé} \end{array}$$

Ainsi :

$$\{N = n\} \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big(\{N = n\}\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) \\ = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

× $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) = \dfrac{1}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.

Plus précisément, **si** l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}$ est réalisé, **c'est que** les $n-2$ permiers tirages ont donné une boule bleue.

Dans ce cas, l'événement R_{n-1} est réalisé si et seulement si lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage la boule rouge est tirée dans l'urne contenant n boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{N = n\}\big) \ = \ \frac{1}{(n-1)\,n}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \mathbb{P}\big(\{N = n\}\big) \ = \ \frac{1}{n\,(n-1)}.}$$

$\square$

b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}(\{N = n\})$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}(\{N = n\}) & = & \sum\limits_{n=2}^{N} \cancel{n} \dfrac{1}{\cancel{n}(n-1)} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \sum\limits_{n=1}^{N-1} \dfrac{1}{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \end{array}$$

- Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}(\{N = n\})$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } N \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

$\square$

2. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```python
import random as rd

def simuleN() :
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < ..........
        b = b + 1
    N = ..........
    return N
```

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante.

```
1 def simuleN() :
2     b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
3     while rd.random() < b/(b+1)
4         b = b + 1
5     N = b + 1
6     return N
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `simuleN`,
  × elle ne prend pas de paramètre en entrée,
  × elle renvoie la valeur stockée dans la variable `N`.

```
1 def simuleN() :
```

```
6     return N
```

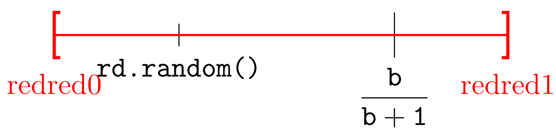
  En ligne 2, la variable `b`, qui contient le nombre de boules bleues dans l'urne à chaque tirage, est initialisée à 1 (initialement l'urne contient une seule boule bleue).

```
2     b = 1
```

- **Structure itérative**
  × Les lignes 3 à 4 consistent, au fur et à mesure des tirages, à mettre à jour la variable `b` (désignant le nombre de boules bleues dans l'urne) jusqu'à l'obtention d'une boule rouge. Autrement dit, on doit effectuer une mise à jour de `b` tant que l'on pioche une boule bleue.
  Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
3     while random.random() < b/(b+1)
```

  × Détaillons l'obtention de la ligne 3.
  On utilise ici la commande `rd.random`. Cette instruction renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.
  × Cette valeur choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir une simulation d'un tirage dans l'urne.



  Deux cas se présentent.
  – Si `rd.random()` $< \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$: alors, on considère qu'on a obtenu une boule bleue.
  Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{U \leqslant \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right\}\right) = \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$$

  ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir une boule bleue dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.

Dans ce cas, on met à jour la variable `b` en l'incrémentant de 1.

```
            b = b + 1
```

– Si `rd.random()` $\geqslant \dfrac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}$: alors, on considère qu'on a obtenu la boule rouge.
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} \leqslant U \leqslant 1\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} \leqslant U\right\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left\{U < \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1}\right\}\right) = 1 - \frac{\mathtt{b}}{\mathtt{b}+1} = \frac{1}{\mathtt{b}+1}$$

ce qui correspond bien à la probabilité d'obtenir la boule rouge dans une urne contenant `b` boule bleues et 1 boule rouge.
Dans ce cas, on ne met pas à jour la variable `b` et on arrête les tirages dans l'urne.

- **Fin de la fonction**
À l'issue de la boucle while, la variable `b` contient le nombre de boules bleues à la fin de l'expérience. Il faut donc lui ajouter 1 pour obtenir le nombre total de boules dans l'urne à la fin de l'expérience. Il ne reste qu'à stocker cette valeur `b + 1` dans la variable de sortie `N`.

```
    N = b + 1
```

□

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

Commentaire

- Formellement, l'événement N_n n'est pas défini dans cet énoncé. Il aurait fallu ajouter :

  on note N_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la boule noire »

- Notons au passage qu'on ne définit pas non plus l'événement B_n : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ». Ce n'est pas primordial ici puisque $B_n = \varnothing$ (comme l'urne ne contient que $n-1$ boules blanches et qu'on procède sans remise, on ne peut piocher une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage).
- On peut enfin remarquer : $N_n \cancel{=} \overline{B_n}$.
  En effet : $\overline{B_n} = \overline{\varnothing} = \Omega$ est toujours réalisé mais ce n'est pas le cas de N_n.
  Par exemple, la boule noire peut être piochée lors du 1^{er} tirage.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

Démonstration.
L'urne contient n boules dont une seule est noire. Le tirage s'effectuant sans remise, la boule noire apparaît au pire lors du $n^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne. Elle peut aussi apparaître lors de n'importe quel autre tirage précédent.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$ □

2. ***a)*** Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$.

Si l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été piochée lors des $i-1$ premiers tirages dans l'urne. À l'issue de ces tirages, l'urne est alors constituée de $(n-\cancel{1})-(i-\cancel{1}) = n-i$ boules blanches et de la boule noire (l'urne contient donc $n-i+1$ boules en tout).

Dans ce cas, l'événement B_i est réalisé si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule blanche. Autrement dit, si l'on obtient l'une des $n-i$ boules non encore piochées. Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.}$$ □

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 1$, alors : $\{X = 1\} = N_1$.
  On rappelle que l'urne contient n boules dont 1 noire.

  $\boxed{\text{Chaque boule étant piochée de manière équiprobable : } \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \dfrac{1}{n}.}$

- Si $k \in [\![2, n]\!]$, alors l'événement $\{X = k\}$ est réalisé si et seulement si on a pioché successivement $(k - 1)$ boules blanches puis une noire. Ainsi :

$$\{X = k\} \; = \; B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

  On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \\
= \; & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k\big) \\
= \; & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k) \\
= \; & \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1}
\end{aligned}$$

  Précisons cette dernière égalité :
  × $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\overline{N_1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$.
  × $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.
  Plus précisément, **si** l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, **c'est que** les $k - 1$ permiers tirages ont donné une boule blanche.
  Dans ce cas, l'événement N_k est réalisé si et seulement si lors du $k^{\text{ème}}$ tirage la boule noire est tirée dans l'urne contenant $n - k + 1$ boules.

  Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \; = \; \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \; = \; \frac{1}{n}.}$$

□

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
  × $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
  × $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \; = \; \dfrac{1}{n}$.

  $\boxed{\text{Ainsi : } X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$

- On en déduit que X admet une espérance et une variance.

  $\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \dfrac{(n-1)(n+1)}{12}.}$

□

IV. Séance 2 : formule des probabilités totales

Commentaire

Il est à noter que la Formule des Probabilités Totales (FPT) rentre dans le schéma décrit dans la partie II. En effet, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, alors tout événement B s'écrit comme une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

$$B \; = \; \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \cap B \; = \; \bigcup_{i\in I} \big(A_i \cap B\big)$$

Exercice 4

1. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile.
Déterminer $\mathbb{P}(\{X = 1\})$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $\{X = 1\} = P_1$.
- La famille (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) & = & \mathbb{P}(P_1) & \\
 & = & \mathbb{P}(A_0 \cap P_1) + \cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap P_1)} + \mathbb{P}(A_2 \cap P_1) & \textit{(car } A_1 \cap P_1 = \varnothing \textit{ puisque} \\
 & & & \textit{la pièce 1 ne donne que Face)} \\
 & = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(P_1) + \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_2}(P_1) & \textit{(car pour tout } i \in [\![0,2]\!], \\
 & & & \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3} \neq 0\textit{)} \\
 & = & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times 1 \; = \; \dfrac{1}{2} & \textit{(par définition des pièces 0 et 2)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\{X=1\}\big) \; = \; \frac{1}{2}}$$

Commentaire

Cette question est une illustration du cadre classique de la formule des probabilités totales : l'expérience aléatoire débute par un choix et ce choix influence le reste de l'expérience aléatoire. On considère ici l'événement P_1, réalisé si Pile est obtenu dès le premier lancer. Il est important de comprendre que la probabilité de cet événement dépend du choix initial de la pièce utilisée pour faire les lancers. L'idée derrière la formule des probabilités totales est de déterminer la probabilité de l'événement P_1 pour tous les choix possibles de pièce.
Ce qui se formalise comme suit :

- × les choix de la pièce sont représentés par la famille d'événements (A_0, A_1, A_2).
Cette famille est un système complet d'événements car deux pièces ne peuvent être choisies à la fois (si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$) et car l'une des pièces est forcément choisie ($A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$).
- × on détermine, pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}\big(A_i \cap P_1\big)$.

□

2. Soient X et Y deux variables aléatoires *de même loi* à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.
On suppose en outre X et Y indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \; = \; \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\mathbb{P}(\{X = Y\}) \; = \; \mathbb{P}(\{X - Y = 0\})$

Commentaire

Remarquons qu'on se ramène ici à un cas particulier de loi d'une somme $X - Y$. Il faut donc se préparer à utiliser les méthodes usuelles pour la détermination de ce type de loi : la formule des probabilités totales.

- La famille $(\ \{X = k\}\ )_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X - Y = 0\}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{X - Y = 0\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\}) \times \mathbb{P}(\{Y = k\}) && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2 && \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(\{X = Y\}) = \sum_{k=0}^{n} \big(\mathbb{P}(\{X = k\})\big)^2.}$$

□

3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières indépendantes.
Démontrer : $\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\, \mathbb{P}(\{Y \geqslant n\})$.

Démonstration.
La famille $(\{X = n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{X \leqslant Y\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{n \leqslant Y\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\ \mathbb{P}(\{n \leqslant Y\}) && \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes, car les lancers du joueur A et ceux du joueur B sont indépendants.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(\{X \leqslant Y\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = n\})\ \mathbb{P}(\{Y \geqslant n\}).}$$

□

Exercice 5
Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.
On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. De plus :

× la probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$.

× la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

On considère l'événement E : « l'objet provient de la chaîne A ».

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que cet objet provienne de la chaîne A ?

Démonstration.

- Définition des événements
  Notons D l'événement : « l'objet est défectueux ».
  Ainsi $\overline{D}$ est l'événement : « l'objet a été correctement monté ».

- Récupération des données de l'énoncé
  D'après l'énoncé :

  × $\mathbb{P}(E) = 0,6$ et donc $\mathbb{P}(\overline{E}) = 0,4$,

  × $\mathbb{P}_E(D) = 0,1$ et donc $\mathbb{P}_E\left(\overline{D}\right) = 0,9$,

  × $\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) = 0,2$ et donc $\mathbb{P}_{\overline{E}}\left(\overline{D}\right) = 0,8$.

- Déterminons la probabilité que l'objet soit défectueux.
  La famille $(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rclcll}
\mathbb{P}(D) & = & \mathbb{P}(E \cap D) & + & \mathbb{P}(\overline{E} \cap D) & \\
& = & \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(D) & + & \mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(D) & \textit{(car } \mathbb{P}(E) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(\overline{E}) \neq 0\textit{)} \\
& = & 0,6 \times 0,1 & + & 0,4 \times 0,2 & \\
& = & \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{10} & + & \dfrac{4}{10} \times \dfrac{2}{10} & = \dfrac{14}{100}
\end{array}$$

- L'objet de la question est de déterminer $\mathbb{P}_D(E)$ (bien défini car $\mathbb{P}(D) \neq 0$).
  D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_D(E) = \frac{\mathbb{P}(E)\ \mathbb{P}_E(D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{6}{10}\ \frac{1}{10}}{\frac{14}{100}} = \frac{6}{\cancel{100}}\ \frac{\cancel{100}}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un objet provienne de la chaîne } A \text{ sachant qu'il est défectueux est } \frac{3}{7}.}$$

□

2. On suppose maintenant que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
On considère alors la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

Démonstration.

- On dit qu'une v.a.r. Y suit **la loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si :
  a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
  b) $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{Y = k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}$
- Si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors :
  × Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \lambda$.
  × Y admet une variance et $\mathbb{V}(Y) = \lambda$.

□

b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\})$.
(on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$)

Démonstration.
Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Deux cas se présentent.

- Si $k > n$ alors $\mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\}) = 0$.
  En effet, **si** l'événement $\{Y = n\}$ est réalisé, **c'est que** la chaîne A produit n objets en une heure.
  Dans ce cas, l'événement $\{X = k\}$ est réalisé si et seulement si la chaîne produit k objets défectueux en une heure. Comme le nombre d'objets défectueux ne peut être strictement supérieur au nombre d'objets produits, la probabilité recherchée est nulle.

$$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors } \mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\}) = 0.}$$

- Si $k \leqslant n$.
  – À chaque production d'objets par la chaîne A, deux issues sont possibles.
  Soit l'objet est défectueux ce qui se réalise avec probabilité $p = 0,1$ (on nomme cette issue le succès de l'expérience aléatoire) soit l'objet est produit correctement ce qui se réalise avec probabilité $1 - p$ (cette issue est nommée échec).
  La production d'une pièce par la chaîne A est donc une illustration d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,1$ dont le succès est la défectuosité de l'objet.
  – **Si** l'événement $\{Y = n\}$ est réalisé, **c'est que** la chaîne A a produit n objets en une heure.
  Dans ce cas, la production successive de ces n objets correspond à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre du succès p.
  On est donc ramené à l'étude d'une loi binomiale de paramètre (n, p).
  L'indépendance provient du fait que la défectuosité d'une pièce n'a pas d'influence sur la défectuosité des autres pièces.

$$\boxed{\text{On en déduit que si } k \leqslant n \text{ alors } \mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\}) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}.}$$

□

c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $\big(\{Y = i\}\big)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
La famille $(\{Y = i\})_{i\in\mathbb{N}}$ constitue le système complet d'événements associé à la v.a.r. Y.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X = k\}) \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = n\} \cap \{X = k\}) \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = n\}) \times \mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\}) && \textit{(car } \mathbb{P}(\{Y = n\}) \neq 0\textit{)} \\
= & \cancel{\sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(\{Y = n\}) \times \mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\})} + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Y = n\}) \times \mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\}) && \textit{(car si } k > n \textit{ alors } \mathbb{P}_{\{Y=n\}}(\{X = k\}) = 0\textit{)} \\
= & \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \ p^k \ (1-p)^{n-k} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^n}{n!} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} \ p^k \ (1-p)^{n} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} && \textit{(par changement d'indice)} \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(n+k)!}}{k! \ n!} \ p^k \ (1-p)^{n} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^{n+k}}{\cancel{(n+k)!}} \\
= & \frac{p^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n \ \lambda^n}{n!} \ = \ \frac{(p\lambda)^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p) \ \lambda)^n}{n!} \\
= & \frac{(p\lambda)^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \mathrm{e}^{(1-p)\lambda} \ = \ \frac{(p\lambda)^k}{k!} \ \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} \ \cancel{\mathrm{e}^{\lambda}} \ \mathrm{e}^{-p\lambda} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique)}
\end{aligned}$$

On remarque enfin que : $p\lambda = \dfrac{1}{10} \ 20 = 2$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit que : } \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{2^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-2}. \\ \text{Ce qui démontre que : } Y \sim \mathcal{P}(2). \end{array}}$$

Commentaire

Il faut noter que cette démonstration est valable lorsque $k = 0$. Dans ce cas, la somme pour n variant de 0 à $+\infty$ se découpe en une somme sur un ensemble vide d'indice ($n \in [\![0, -1]\!]$) et une somme pour n variant de 0 à $+\infty$. Autrement dit, le découpage a un effet neutre.

□

V. Séance 3 : variables discrètes

Commentaire

Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.

1) Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
On note Ω l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Si on considère l'expérience consistant à effectuer trois lancers successifs d'une même pièce, alors : $\Omega = \{P, F\}^3$.
Autrement dit, Ω est l'ensemble des triplets à coefficitents dans l'ensemble $\{P, F\}$.
Ces triplets pouront être nommés des 3-lancers (on s'adapte ainsi au vocabulaire des probabilités).
Par exemple, $\omega = (F, F, P)$ est un 3-lancer qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le 1^{er} lancer fournit $Face$, le $2^{\text{ème}}$ fournit $Face$, le $3^{\text{ème}}$ fournit $Pile$.

2) Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement A n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$ (un événement est un sous-ensemble de l'univers). Par exemple, l'événement P_1 : « obtenir $Pile$ au premier lancer » regroupe tous les 3-lancers dont le premier coefficient vaut P.

$$P_1 = \{ (P, F, F),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P) \}$$

Par exemple, $\omega = (P, F, F) \in P_1$. Lorsque $\omega \in P_1$, on dit que ω **réalise** l'événement P_1.

3) Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :

- elles prennent comme argument **un résultat possible de l'expérience** et renvoient **une valeur réelle**. Consisdérons la v.a.r. X qui donne le nombre de Pile obtenus au cours de l'expérience. Avec le 3-lancer ω précédent, on obtient : $X(\omega) = X\Big((P, F, F)\Big) = 1$.
  Cela démontre que la v.a.r. X peut prendre la valeur 1 (on a exhibé un 3-lancer ω tel que $X(\omega) = 1$).
- elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $\{X = 2\}$ est un événement.
  Il regroupe **tous** les 3-lancers ω tels que : $X(\omega) = 2$.
  Autrement dit : $\{X = 2\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\} = \{ (P, P, F),\ (P, F, P),\ (F, F, P) \}$.

Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est donc essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.

Exercice 6

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1 - p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite).
- La v.a.r. Y_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \sim \mathcal{B}(n, p).}$$

□

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès v (probabilité de l'obtention d'une boule verte).
- La v.a.r. X prend pour valeur le rang d'obtention du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \sim \mathcal{G}\left(v\right).}$$ □

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 10 issues numérotées de 1 à 10.
- La v.a.r. Z correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 10 \rrbracket).}$$ □

Commentaire

Lorsqu'une v.a.r. suit une loi usuelle, il est impératif de respecter la rédaction suivante :
1) description de l'expérience,

2) description de la v.a.r. aléatoire.
On s'attachera toujours à bien détailler ces deux points.

Exercice 7

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X > k\}) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}(\{X > k\}) \; = \; 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\{X > k\}}\right) \; = \; 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\})$$

- Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $\{X \leqslant k\} \; = \; \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{X = i\}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{X = i\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{X = i\}) && \textit{(par incompatibilité de } \{X=1\}, \ldots, \{X=i\}\textit{)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} \; = \; p \sum_{i=0}^{k-1} q^i \\ &= p \, \frac{1 - q^k}{1 - q} && \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ &= 1 - q^k \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{P}(\{X > k\}) \; = \; 1 - \mathbb{P}(\{X \leqslant k\}) \; = \; 1 - (1 - q^k) \; = \; q^k.}$$

□

2. On suppose maintenant que X est une v.a.r. **quelconque** qui vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X > k\}) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\{X = k\}) \; = \; \mathbb{P}(\{X > k - 1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\})$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \{X > k - 1\} &= \{X \geqslant k\} && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ &= \{X = k\} \cup \{X > k\} \end{aligned}$$

Les événements $\{X = k\}$ et $\{X > k\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{X > k - 1\}) = \mathbb{P}(\{X = k\}) + \mathbb{P}(\{X > k\})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathbb{P}(\{X > k - 1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\}).}$$

□

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{X = k\}) & = & \mathbb{P}(\{X > k-1\}) - \mathbb{P}(\{X > k\}) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & q^{k-1} - q^k & \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{1.b)}\textit{)} \\ & = & q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1}p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

3. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $X \sim \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X > k\}) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X > k\}) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \sim \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \sim \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X > k\}) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X \sim \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X > k\}) = (1-p)^k \ \right) \end{array}}$$

□

VI. Séance 5 : Loi du minimum, loi du maximum

Exercice 8
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que les v.a.r. X_1, ..., X_n sont (mutuellement) indépendantes si, pour tous intervalles réels I_1, ..., I_n :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in I_i\}\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \in I_i\})$$
- Par exemple, si $t \in \mathbb{R}$ et que X_1, ..., X_n sont indépendantes, on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant t\}\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \leqslant t\})$$

Ce résultat est obtenu en appliquant la définition à $I_1 = \;\ldots\; = I_n =]-\infty, t]$

Soient X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On définit les variable aléatoires $U_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\{U_n > t\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\} \qquad \text{et} \qquad \{V_n \leqslant t\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant t\}$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Montrons que $\{U_n > t\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i > t\}$.
Soit $\omega \in \Omega$.
$$\begin{array}{rcl}
\omega \in \{U_n > t\} & \Leftrightarrow & \omega \in \{\min(X_1, \ldots, X_n) > t\} \\
& \Leftrightarrow & \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) > t \\
& \Leftrightarrow & X_1(\omega) > t \;\texttt{ET}\; \cdots \;\texttt{ET}\; X_n(\omega) > t \\
& \Leftrightarrow & \omega \in \{X_1 > t\} \;\texttt{ET}\; \cdots \;\texttt{ET}\; \omega \in \{X_n > t\} \\
& \Leftrightarrow & \omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i > t\}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \{U_n > t\} \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > t\}.}$$

- Montrons que $\{V_n \leqslant t\} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant t\}$.
Soit $\omega \in \Omega$.
$$\begin{array}{rcl}
\omega \in \{V_n \leqslant t\} & \Leftrightarrow & \omega \in \{\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant t\} \\
& \Leftrightarrow & \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \leqslant t \\
& \Leftrightarrow & X_1(\omega) \leqslant t \;\texttt{ET}\; \cdots \;\texttt{ET}\; X_n(\omega) \leqslant t \\
& \Leftrightarrow & \omega \in \{X_1 \leqslant t\} \;\texttt{ET}\; \cdots \;\texttt{ET}\; \omega \in \{X_n \leqslant t\} \\
& \Leftrightarrow & \omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant t\}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \{V_n \leqslant t\} \;=\; \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant t\}.}$$

□

2. ***a)*** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}\big(\{U_n > k\} \big)$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{U_n > k\}) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i > k\} \right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i > k\}) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ & = & \Big(\mathbb{P}\big(\{X_1 > k\} \big) \Big)^n & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{X_1 > k\} \big) & = & 1 - \mathbb{P}\big(\{X_1 \leqslant k\} \big) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k} \{X_1 = j\} \right) & \\ & = & 1 - \sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}\big(\{X_1 = j\} \big) & \textit{(car } \{X_1 = 1\}, \ldots, \{X_1 = k\} \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & 1 - \sum\limits_{j=1}^{k} p\,(1-p)^{j-1} & \textit{(car } X_1 \sim \mathcal{G}\,(p)\textit{)} \\ & = & 1 - p \sum\limits_{j=0}^{k-1} (1-p)^j & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & 1 - \cancel{p}\, \dfrac{1-(1-p)^k}{\cancel{1-(1-p)}} & \\ & = & \cancel{1} - \big(\cancel{1} - (1-p)^k \big) & \\ & = & (1-p)^k & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{U_n > k\} \big) = \big((1-p)^k \big)^n = (1-p)^{nk}.}$$

□

b) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\big(\{U_n = k\} \big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{U_n > k-1\} \big) - \mathbb{P}\big(\{U_n > k\} \big)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \{U_n > k-1\} & = & \{U_n \geqslant k\} & \textit{(car } U_n \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & \{U_n = k\} \cup \{U_n > k\} & \end{array}$$

Les événements $\{U_n = k\}$ et $\{U_n > k\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{U_n > k-1\}) = \mathbb{P}(\{U_n = k\}) + \mathbb{P}(\{U_n > k\})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{U_n = k\}) = \mathbb{P}(\{U_n > k-1\}) - \mathbb{P}(\{U_n > k\}).}$$

□

c) En déduire la loi de U_n.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_1, …, X_n suivent la loi $\mathcal{G}(p)$.
  On en déduit : $X_1(\Omega) = \cdots = X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  Ainsi $\min(X_1, \ldots, X_n)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{U_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{U_n = k\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{U_n > k-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{U_n > k\}\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & (1-p)^{n(k-1)} - (1-p)^{nk} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ & = & (1-p)^{n\,(k-1)}\big(1-(1-p)^n\big) & \\ & = & \big((1-p)^n\big)^{k-1}\big(1-(1-p)^n\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } U_n \text{ suit la loi } \mathcal{G}\left(1-(1-p)^n\right).}$$

□

3. Avec un raisonnement similaire, déterminer la loi de V_n.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_1, …, X_n suivent la loi $\mathcal{G}(p)$.
  On en déduit : $X_1(\Omega) = \cdots = X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  Ainsi $\max(X_1, \ldots, X_n)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{V_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Commençons par déterminer $\mathbb{P}\big(\{V_n \leqslant k\}\big)$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(\{V_n \leqslant k\}) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant k\}\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \leqslant k\}) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont mutuellement indépendantes)} \\ & = & \Big(\mathbb{P}\big(\{X_1 \leqslant k\}\big)\Big)^n & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(1-(1-p)^k\big)^n & \textit{(d'après le calcul effectué en } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{V_n \leqslant k\}\big) = \big(1-(1-p)^k\big)^n.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \{V_n \leqslant k\} & = & \{V_n < k\} \cup \{V_n = k\} & \\ & = & \{V_n \leqslant k-1\} \cup \{V_n = k\} & \textit{(car } V_n \textit{ est à valeurs entières)} \end{array}$$

  Les événements $\{V_n = k\}$ et $\{V_n \leqslant k-1\}$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{V_n \leqslant k\}) = \mathbb{P}(\{V_n \leqslant k-1\}) + \mathbb{P}(\{V_n = k\})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{V_n = k\}) = \mathbb{P}(\{V_n \leqslant k\}) - \mathbb{P}(\{V_n \leqslant k-1\}).}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\{V_n = k\}\big) &= \mathbb{P}\big(\{V_n \leqslant k\}\big) - \mathbb{P}\big(\{V_n \leqslant k-1\}\big) \\ &= \big(1-(1-p)^k\big)^n - \big(1-(1-p)^{k-1}\big)^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{V_n = k\}\big) = \big(1-(1-p)^k\big)^n - \big(1-(1-p)^{k-1}\big)^n}$$

□

4. Quelle est l'espérance de U_2 ?

Démonstration.
D'après la question ***2.c)*** : $U_2 \sim \mathcal{G}\left(1-(1-p)^2\right)$. On en déduit que U_2 admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(U_2) = \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{1}{2p+p^2} = \frac{1}{p\,(2+p)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(U_2) = \frac{1}{2+p}.}$$

□

5. Exprimer $U_2 + V_2$ en fonction de X_1 et X_2.
En déduire l'espérance de V_2.

Démonstration.

- On remarque : $X_1 + X_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } U_2 + V_2 = X_1 + X_2.}$$

- Ainsi : $V_2 = X_1 + X_2 - U_2$.
  La v.a.r. V_2 admet une espérance comme combinaison linéaire des variables aléatoires X_1, X_2 et U_2 qui admettent toutes une espérance.
  On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V_2) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 - U_2) \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(U_2) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \frac{1}{p\,(2+p)} && \textit{(d'après la question 4.)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p\,(2+p)} && \textit{(car } X_1 \sim \mathcal{G}(p) \textit{ et } X_2 \sim \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ &= \frac{2}{p} - \frac{1}{p\,(2+p)} \\ &= \frac{2\,(2+p)-1}{p\,(2+p)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(V_2) = \frac{3+2\,p}{p\,(2+p)}.}$$

□