Suites implicites

Exercice 1. (★★)
On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln(x)$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

Démonstration.

- La quantité $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$.
  Ainsi, $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$.
- De plus, $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Ainsi, f est dérivable sur cet ensemble. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) \ = \ 1 + \frac{1}{x} > 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
f	$\|\|$	$-\infty \nearrow +\infty$

□

b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
On la note u_n.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur :

$$f(]0, +\infty[) \ =]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=] - \infty, +\infty[$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $n \in] - \infty, +\infty[$, n admet un unique antécédent $x \in]0, +\infty[$ par la fonction f. On note alors u_n ($\in]0, +\infty[$) cet antécédent.
  (on a donc $f(u_n) = n$)

□

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$.
  On en déduit que : $n = f(u_n) < f(u_{n+1}) = n + 1$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction :

$$f^{-1} :] - \infty, +\infty[\mapsto]0, +\infty[$$

  est strictement croissante.
- En appliquant f^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$f^{-1}(f(u_n)) = u_n < u_{n+1} = f^{-1}(f(u_{n+1}))$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante. □

Exercice 2. (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x) - 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme de :
  - × $x \mapsto x\ln(x)$ continue sur $]0, +\infty[$ comme produit des fonctions :
    - ***(i)*** $x \mapsto x$ polynomiale donc continue sur $]0, +\infty[$,
    - ***(ii)*** $x \mapsto \ln(x)$ continue sur $]0, +\infty[$.
  - × $x \mapsto -1$ constante donc continue sur $]0, +\infty[$.
- D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) - 1 = 0 - 1 = -1 = f(0)$.
  On en déduit que f est continue en 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+.}$$

□

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ on a } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme de :
  - × $x \mapsto x\ln(x)$ dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit des fonctions :
    - ***(i)*** $x \mapsto x$ polynomiale donc dérivable sur $]0, +\infty[$,
    - ***(ii)*** $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
  - × $x \mapsto -1$ constante donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

*(on pouvait montrer dès la question **1.** que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$)*

- Soit $x \in]0, +\infty[$. On a alors : $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

$$\boxed{\forall x > 0, \ f'(x) = \ln(x) + 1}$$

□

4. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Soit $x > 0$. On a :

$$f'(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(x) + 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ \ln(x) > -1 \ \Leftrightarrow \ x > e^{-1}$$

On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	↘	$-1 - e^{-1}$	↗	$+\infty$

Avec $f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) - 1 = -e^{-1} - 1$

□

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
On note u_n cette solution. Justifier que $u_n > 1$.

Démonstration.

- La fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est :
  - × continue sur $[e^{-1}, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[e^{-1}, +\infty[$ sur $f([e^{-1}, +\infty[)$ avec :

$$f([e^{-1}, +\infty[) = [f(e^{-1}), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1 - e^{-1}, +\infty[$$

- Comme $n \geqslant 0$, $n \in [-1 - e^{-1}, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } f(x) = n \text{ possède une unique solution dans } [e^{-1}, +\infty[.}$$

- Enfin, $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = -1$ donc $f(u_n) = n > -1 = f(1)$.
  On applique alors, de part et d'autre de cette inégalité, la fonction f^{-1} strictement croissante.

$$\boxed{\text{On obtient ainsi : } u_n > 1.}$$

□

6. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

Démonstration.

- La fonction $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est injective car restriction de f qui est elle-même injective.
- D'autre part, $g : [1, +\infty[\to J$ est surjective si l'on choisit $J = \text{Im}(g) = g([1, +\infty[)$. Or :

$$g([1, +\infty[) \ = \ [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[\ = \ [-1, +\infty[$$

$$\boxed{g \text{ réalise une bijection de } [1, +\infty[\text{ sur } [-1, +\infty[.}$$

(ou par application du théorème de la bijection) □

b) Donner le tableau de variation complet de la réciproque g^{-1} sur J.

Démonstration.
D'après le théorème de la bijection, la fonction g^{-1} est **continue** sur $[-1, +\infty[$ et de même monotonie que g.
Or $[1, +\infty[\subset [e^{-1}, +\infty[$, et f est strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.

On en déduit donc le tableau de variations suivant.

x	-1	$+\infty$
Variations de g^{-1}	1 ↗	$+\infty$

□

c) Exprimez u_n à l'aide de g^{-1}.
En déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition, on a : $f(u_n) = n$.
  De plus, comme $u_n > 1$, on a $f(u_n) = g(u_n)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } g(u_n) = n \text{ et donc que } u_n = g^{-1}(n).}$$

- Comme g^{-1} est strictement croissante et $n < n + 1$, on obtient :

$$u_n = g^{-1}(n) < g^{-1}(n + 1) = u_{n+1}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc (strictement) croissante.}}$$

- Pour ce dernier point, on pouvait raisonner de deux manières différentes.

  La manière adaptée à l'énoncé, à privilégier ici
  D'après le théorème de composition des limites :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \ = \ \lim_{n \to +\infty} g^{-1}(n) \ = \ \lim_{x \to +\infty} g^{-1}(x) \ = \ +\infty$$

Ou alors à l'aide du théorème de convergence monotone (peu adapté à l'énoncé mais raisonnement classique qu'il est important de comprendre)

Rappelons que, par définition de la suite (u_n), on a $f(u_n) = n$.
Comme $u_n > 1 > 0$, cela s'écrit :

$$u_n \ln(u_n) - 1 \ = \ n \quad \text{ou encore} \quad u_n \ln(u_n) \ = \ n+1$$

Deux cas se présentent alors.

1) Soit (u_n) est majorée
Étant croissante, elle est convergente vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.
En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient alors : $\ell \ \ln(\ell) = +\infty$.
Ceci étant impossible, ce cas est à écarter.

2) Soit (u_n) n'est pas majorée
Étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

□

Exercice 3. (★★)
On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est une fonction polynomiale.
  Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f_n'(x) \ = \ n \ x^{n-1} + 1$.
  Si $x > 0$, $n \ x^{n-1} + 1 > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0		1
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0
f	-1	$\nearrow$	1

- La fonction f_n est :
  × continue sur $]0, 1[$,
  × strictement croissante sur $]0, 1[$.
  Elle réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $f(]0, 1[) \ = \ ]-1, 1[$.
  Comme $0 \in \ ]-1, 1[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

  Remarque
  - On peut aussi rédiger comme suit.
    Comme $0 \in \ ]-1, 1[$, 0 admet un unique antécédent $x_n \in]0, 1[$ par la fonction f_n.
  - Quelle que soit la rédaction, il faut comprendre que l'on vient de définir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
    (à chaque valeur de n correspond un unique x_n)
  - Cette suite est définie de manière **implicite** (non explicite).
    Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique élément tel que :
    × $x_n \in]0, 1[$,
    × $f_n(x_n) = 0$ *i.e.* $x_n{}^n + x_n + 1 = 0$ *(déterminant pour la suite)* □

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0, \ x_n < x_{n+1}$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \ f_m(x_m) = 0$.
(pour bien comprendre qu'on peut écrire cette égalité en $m = n$ mais aussi en $m = n + 1$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition de la fonction f_{n+1}, on a : $f_{n+1}(x_n) \ = \ {x_n}^{n+1} + x_n - 1$.
  Or, d'après la question précédente, on a : $f_n(x_n) \ = \ 0$.
  Or $f_n(x_n) \ = \ {x_n}^n + x_n - 1 = 0$. Ainsi, on a : ${x_n}^n = 1 - x_n$.
  On en conclut que :
  $$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= {x_n}^{n+1} + x_n - 1 \\ &= x_n \times {x_n}^n + x_n - 1 \\ &= x_n \times (1 - x_n) + x_n - 1 \\ &= -{x_n}^2 + 2x_n - 1 \\ &= -({x_n}^2 - 2x_n + 1) \ = \ -(x_n - 1)^2 < 0 \quad \text{car } x_n < 1 \end{aligned}$$
- Par la question précédente, $f_{n+1}(x_{n+1}) \ = \ 0$.

On a donc bien : $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.

- D'après le théorème de la bijection, la fonction ${f_{n+1}}^{-1} :]-1,1[\to]0,1[$ est de même monotonie que f_{n+1}, à savoir strictement croissante.
  On en déduit que :
  $$x_n \ = \ {f_{n+1}}^{-1}(f_{n+1}(x_n)) < {f_{n+1}}^{-1}(f_{n+1}(x_{n+1})) \ = \ x_{n+1}$$
  □

c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

Démonstration.

- La suite (x_n) est croissante et majorée par 1.
  Elle converge donc vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
- Par passage à la limite dans l'inégalité : $0 < x_n < 1$, on en déduit que ℓ est telle que : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
- La suite (x_n) étant croissante, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n \geqslant x_1$.
  Et donc, par passage à la limite, on a : $\ell \geqslant x_1$.
- Par définition, x_1 est l'unique élément de $]0,1[$ qui vérifie :
  $f_1(x_1) = x_1 + x_1 - 1 = 0$ *i.e.* $2x_1 = 1$ et donc $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

On en conclut que : $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$. □

d. Démontrer que : $\forall n > 0, \ x_n \leqslant \ell$.

Démonstration.

- *Attention : démonstration hors programme !*
  Le théorème de convergence monotone stipule que $\ell = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$.
  Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} x_n = \ell$.
- *Démonstration attendue.*
  Supposons par l'absurde qu'il existe un rang $n_0 > 0$ tel que : $x_{n_0} > \ell$.
  La suite (x_n) étant croissante, on a : $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \geqslant x_{n_0}$.
  Par passage à la limite, on en déduit que : $\ell \geqslant x_{n_0}$.
  Et donc que : $\ell \geqslant x_{n_0} > \ell$, ce qui est impossible ! □

e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que $\ell \neq 1$.
D'après les questions précédentes, on a :

- $0 < \ell < 1$,
- $0 < x_n \leqslant \ell$ et donc, par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $]0,+\infty[$, on en déduit que : $0 \leqslant {x_n}^n \leqslant \ell^n$. Or :
  × $\ell^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < \ell < 1$,
  × $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par le théorème d'encadrement, on a : ${x_n}^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or : ${x_n}^n = 1 - x_n$. Par passage à la limite dans cette égalité, on en déduit que : $0 \ = \ 1 - \ell$ et ainsi que $\ell = 1$.
Ceci contredit l'hypothèse $\ell \neq 1$. □

Exercice 4 (★★)*(d'après* `EDHEC 2008`*)*

Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x} + nx$. On appelle $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a. Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ car $1 + e^x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 1 > 0$).
- f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, car somme de :
  × $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction $x \mapsto 1+e^x$ qui est elle-même C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
  × $x \mapsto nx$ C^∞ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

$$\boxed{f_n'(x) = -(1+e^x)^{-2} \times e^x + n}$$

$$\boxed{f_n''(x) = \left(2(1+e^x)^{-3} \times e^x - (1+e^x)^{-2}\right) e^x}$$

□

b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Afin de déterminer le signe de f_n', on dresse son tableau de variations. Pour ce faire, on doit au préalable déterminer le signe de sa dérivée, f_n''.

$$\begin{aligned} & f_n''(x) \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2(1+e^x)^{-3} \times e^x - (1+e^x)^{-2} \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2(1+e^x)^{-3} \times e^x \geqslant (1+e^x)^{-2} \\ \Leftrightarrow\ & 2e^x \geqslant (1+e^x) \\ \Leftrightarrow\ & e^x \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
f_n'	n	↘	$-\frac{1}{4}+n$	↗	n
$f_n'(x)$			$+$		

La fonction f_n' admet un minimum en 0 valant $-\frac{1}{4}+n > 0$ (car $n \geqslant 1$).

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_n' > 0 \text{ et donc que } f_n \text{ est strictement croissante.}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n'(x) = n$.
Or : $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{(e^x)^2} = e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet :

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}} \ \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}} + \frac{2}{e^x} + 1} = e^{-x} \ \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}} + \frac{2}{e^x} + 1}$$

(on fait apparaître le terme dominant mais on peut aussi former le quotient ...)
et $\dfrac{1}{e^{2x}} + \dfrac{2}{e^x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 + 1 = 1$
Donc $f_n'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -0 \times 1 + n = n$. □

2) a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

Démonstration.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$$

□

b. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de $(\mathscr{C}_n)$.

Démonstration.
D'après le tableau de variations précédent, f_n'' s'annule en changeant de signe seulement au point d'abscisse 0. De plus, $f_n(0) = \frac{1}{2}$.

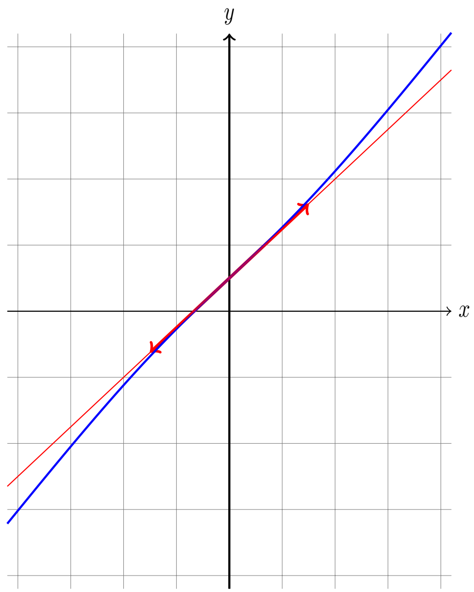
$$\boxed{A_n = (0, \tfrac{1}{2}) \text{ est le seul point d'inflexion de } (\mathcal{C}_n).}$$

□

c. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

Démonstration.
La tangente de $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 a pour équation : $\quad y = f_n(0)+f_n'(0)(x-0)$.
Or $f_n'(0) = n - \frac{1}{4}$. D'où $f_1'(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{(T_1) \text{ a pour équation } y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\, x.}$$



□

3) ***a.*** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

Démonstration.
La fonction f_n est

- × continue sur $]-\infty, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur :

$$f_n(]-\infty, +\infty[) \;=\;]\lim_{x\to-\infty} f_n(x), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[\;=\;]-\infty, +\infty[$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } 0 \in\,]-\infty, +\infty[\text{ l'équation } f_n(x) = 0 \\ \text{admet une unique solution } u_n \in\,]-\infty, +\infty[.\end{array}}$$

□

b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $f_n(-\frac{1}{n}) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} - 1 = \dfrac{-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} < 0$,
- $f_n(u_n) = 0$,
- $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$.

Ainsi : $f_n(-\frac{1}{n}) < f_n(u_n) < f_n(0)$.
Par le théorème de la bijection, f_n^{-1} est de même monotonie que f_n.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par application de } f_n^{-1}\text{, strictement croissante, à} \\ \text{l'inégalité précédente, on en déduit : } \dfrac{-1}{n} < u_n < 0.\end{array}}$$

□

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme, } \frac{-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\text{, par le théorème} \\ \text{d'encadrement, on a : } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{array}}$$

□

d. En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Démonstration.
Par définition, u_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.
On en déduit que : $\dfrac{1}{1+e^{u_n}} + n\, u_n = 0$ et donc que : $n\, u_n = -\dfrac{1}{1+e^{u_n}}$.
Ainsi :

$$\frac{u_n}{-\frac{1}{2n}} = -2\, n\, u_n = 2\,\frac{1}{1+e^{u_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,\frac{1}{1+e^0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.}$$

□

e. En déduire la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = -\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{n\, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}}$$

□

Exercice 5. (★★)
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

a. Faire l'étude de la fonction f_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction f_n est polynomiale. Elle est donc C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 5x^4 + n > 0 \text{ si } n \geqslant 1$$

On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(en toute rigueur, il faudrait ajouter que f' s'annule en 0 si $n = 0$ mais cela ne change pas l'allure du tableau de variations)

□

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.

Démonstration.

- La fonction f_n est :
  - × continue sur $]-\infty, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur :

$$f(]-\infty,+\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty,+\infty[$$

- Comme $0 \in]-\infty, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in]-\infty, +\infty[$.
  (on a donc $f_n(u_n) = 0$)

□

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $f_n(0) = -1 < 0 < \dfrac{1}{n^5} = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f_n^{-1} :]-\infty,+\infty[\mapsto]-\infty,+\infty[$ est strictement croissante.

- En appliquant ${f_n}^{-1}$ de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} {f_n}^{-1}(f_n(0)) & < & {f_n}^{-1}(0) & < & {f_n}^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & < & u_n & < & \frac{1}{n} \end{array}$$

□

Exercice 6. (★★★)
Pour tout entier n positif, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1. a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition. Dresser son tableau de variations.

Démonstration.
La fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = e^x + 2nx > 0$$

x	0 $\quad$ $+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	$+$
Variations de f_n	$-2 \nearrow +\infty$

□

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

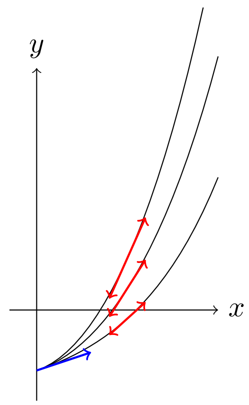
Démonstration.
La tangente de f_n en 1 a pour équation $y = f_n(1) + f_n'(1)\,(x-1)$.
Or : $f_n(1) = e^1 + n - 3$ et $f_n'(1) = e^1 + 2n$. Ainsi :
$f_n(1) + f_n'(1)\,(x-1) = e^1 + n - 3 + (e^1 + 2n)\,(x-1) = -n - 3 + (e^1 + 2n)\,x$

$$\boxed{\text{La tangente de } f_n \text{ en 1 a pour équation } y = -(n+3) + (e^1 + 2n)\,x.}$$

□

c) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.

Démonstration.
Il était important ici de tracer les tangentes en 1 *de* f_0, f_1, f_2.
Afin d'avoir une idée plus précise du tracé, déterminons l'équation de la tangente de f_n en 0. On a : $f_n(0) = -2$ et $f_n'(0) = 1$.
Ainsi, l'équation de la tangente de f_n en 0 est $y = -2 + x$.



□

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

Démonstration.
La fonction f_n est :

× continue sur $[0,+\infty[$,

× strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[) = [-2,+\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } 0 \in [-2,+\infty[\text{ admet un unique antécédent} \\ u_n \in [0,+\infty[\text{ par la fonction } f_n.\end{array}}$$

□

e) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La fonction } f_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x - 3 \text{ s'annule en } u_0 = \ln 3.}$$

$\square$

f) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $f_n(u_n) = 0$ par définition,
- $f_n(0) = -2 < 0$,
- $f_n(1) = \mathrm{e}^1 + n - 3 > 0$ car $n \geqslant 1$ et $\mathrm{e}^1 > 2,71$.

Ainsi : $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)$. On applique alors la fonction f_n^{-1}, strictement croissante (car de même monotonie que f_n d'après le théorème de la bijection) à chaque membre de cette inégalité.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } 0 < u_n < 1.}$$

$\square$

2. Écrire une fonction Scilab qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à $0,001$ près par la méthode de dichotomie.

Démonstration.
(même si ce n'était pas explicitement demandé par l'énoncé, on avait tout intérêt à commencer par coder les fonctions f_n)

```
function y = fn(n,x)
  y = exp(x) + n * x ^2-3
endfunction
```

On code maintenant la méthode de dichotomie sur l'intervalle $]0,1[$ (on a $f_n(0) < 0$ et $f_n(1) > 0$).

```
function approx = dichoto(n)
  g = 0
  d = 1
  m = (g+d)/2
  while fn(n,d)-fn(n,g) > 0.001
    if fn(n,m) > 0 then
      d = m
    else
      g = m
    end
  m = (g+d)/2
  end
  approx = g
endfunction
```

$\square$

3. a) Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

Démonstration.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (\cancel{e^x} + (n+1)\,x^2 - \cancel{3}) - (\cancel{e^x} + n\,x^2 - \cancel{3}) = x^2 > 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in]0,1[, \text{ on a : } f_{n+1}(x) > f_n(x).}$$

$\square$

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

Démonstration.
Comme $u_{n+1} \in]0,1[$, on peut appliquer le résultat de la question précédente.
On obtient : $f_n(u_{n+1}) < f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_n(u_{n+1}) < 0.}$$

On peut écrire cette inéglité sous la forme : $f_n(u_{n+1}) \ < \ 0 = f_n(u_n)$.
En appliquant f_n^{-1}, strictement croissante, à chaque membre de l'inégalité, on obtient : $u_{n+1} < u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

□

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée par 1. Elle} \\ \text{converge donc vers une limite } \ell \text{ qui vérifie } 0 \leqslant \ell \leqslant 1.\end{array}}$$

□

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

Démonstration.
Supposons que $\ell > 0$. Alors :

- $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell}$,
- $n\,{u_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\ell^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que $f_n(u_n) = \mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Or, par définition de } u_n\text{, on a : } f_n(u_n) = 0\text{, ce qui} \\ \text{contredit le calcul précédent.}\end{array}}$$

□

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question précédente, } \ell \leqslant 0\text{. Comme de} \\ \text{plus } 0 \leqslant \ell \leqslant 1\text{, on a : } \ell = 0\end{array}}$$

□

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\,u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
On a : $f_n(u_n) = 0 = \mathrm{e}^{u_n} + n\,u_n^2 - 3$. Ainsi : $n\,u_n^2 = 3 - \mathrm{e}^{u_n}$.

D'où : $\dfrac{n}{2}\,u_n^2 = \dfrac{3-\mathrm{e}^{u_n}}{2}$ et $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\,\sqrt{u_n^2} = \sqrt{\dfrac{3-\mathrm{e}^{u_n}}{2}}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sqrt{\frac{n}{2}}\,u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{3-\mathrm{e}^{0}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1}$$

Ceci signifie que les suites (u_n) et $\left(\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right)$ ont même comportement asymptotique.

Autrement dit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

□