Formule du binôme

Exercice 1. (★) *(d'après* `EDHEC 2008`*)*
On considère les matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose $T = D + N$.

a. Déterminer N^2.

b. Utiliser la formule du binôme pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ T^n = D^n + nD^{n-1}N$$

c. Donner explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice T^n en fonction de n.

Exercice 2. (★) *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et de N puis de I et de T.

Exercice 3. (★) *(d'après* `ESSEC III - 2007`*)*
À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 4. (★) *(d'après* `ESC 2006`*)*
À tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$

On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Calculer les matrices J^2, J^3. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$[M(1, 1, 1)]^n = I_3 + n\, J + \frac{n(n-1)}{2}\, J^2$$

c. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1, 1, 1)]^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 2)$

On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

b. Montrer que R a pour matrice inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Démontrer que $M(1, 1, 2) = R\, T\, Q$.

d. Sans l'expliciter, écrire $[M(1, 1, 2)]^n$ en fonction de n, Q, R, T.