Application de l'inéaglité des accroissements finis à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1. (★)
On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $x^2+x-1=0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera r_2. Préciser la valeur de r_2.

2. Montrer que si x est un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.

4. Démontrer que : $\forall x \in [\frac{1}{2},1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r_2| \leqslant \dfrac{4}{9}\ |u_n - r_2|$.

6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} :\ |u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

7. À partir de quelle valeur de n le terme u_n est-il une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près ?
On choisira la réponse parmi : $n = 9$, 18, 24, ou 36.
On donne : $\ln 10 \simeq 2{,}30$ $\ln 2 \simeq 0{,}69$ $\ln 3 \simeq 1{,}10$.

Exercice 2. (★) *(d'après* `EML 96`*)*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

1. ***a)*** Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

d) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Données numériques : $\mathrm{e}^{1/2} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$ au centième près.

e) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant f(x)$.
En déduire que : $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

f) Vérifier que $f(\left[0,\frac{1}{2}\right]) \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

3. **Informatique**

a) Écrire une fonction **Scilab** `f` qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$.

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n.

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Scilab** une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

Exercice 3. (★★) *(d'après* `EML 2009`*)*
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. ***a)*** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1.$$

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b) Montrer $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

7. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$?
Écrire l'appel correspondant en **Scilab**.

Exercice 4. (☆)
On considère la fonction $f : x \mapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ \ln(x)$.

On définit alors la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

1. Démontrer que l'intervalle $I = [3, 4]$ est stable par f.

2. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

3. Démontrer que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

4. On admet qu'il existe un unique $r \in I$ tel que $f(r) = r$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{12}|u_n - r|$.

5. Déduire de ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.