Valeurs propres, espaces propres : détermination

Exercice 1. (★★)
On considère les matrices suivantes.

a) $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

b) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $M_5 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour chaque matrice M_i, déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $M_i - \lambda I$ est non inversible.

Pour ce faire, on déterminera les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathrm{rg}(M_i - \lambda I) \neq 3$$

2. Pour chaque matrice M_i exprimer l'ensemble suivant sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille finie à déterminer.

$$E_\lambda(M_i) = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M_i - \lambda I)\ X = 0\}$$

pour tout λ tel que : $\mathrm{rg}(M_i - \lambda I) \neq 3$.