

Couples de v.a.r. discrètes : exercices classiques

Connaître la formule des probabilités totales

Exercice 1 (☆)

On considère ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ un ensemble d'indices.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements (en particulier : $\forall i \in I, A_i \in \mathcal{A}$).

Soit $B \in \mathcal{A}$.

1. a) Rappeler ce que signifie que $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

Démonstration.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1) $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
(les événements sont deux à deux incompatibles)

2) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

□

b) En déduire la valeur de $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Démonstration.

• D'après la propriété 2), on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

• Par ailleurs :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad (\text{car les événements de la famille } (A_i)_{i \in I} \text{ sont deux à deux incompatibles})$$

On en conclut, en combinant ces deux égalités : $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

□

2. À l'aide du système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$, écrire $\mathbb{P}(B)$ sous forme d'une somme.

Démonstration.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ forme un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

□

3. On considère maintenant une v.a.r. X discrète.

a) Rappeler ce qu'est le système complet d'événements associé à la v.a.r. X dans le cas où :

- × $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où n est un entier positif non nul.
- × $X(\Omega) = \llbracket 0, r \rrbracket$ où r est un entier positif non nul.
- × $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Dans chacun de ces cas, écrire $\mathbb{P}(B)$ à l'aide du système complet d'événements décrit.

Démonstration.

- De manière générale, on appelle système complet d'événements associé à la v.a.r. X la famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap B)$$

- Détaillons maintenant chacun des cas.

- × Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors le système complet d'événements associé à X est :

$$([X = x_i])_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}([X = x_i] \cap B)$$

- × Si $X(\Omega) = \llbracket 0, r \rrbracket$ alors le système complet d'événements associé à X est :

$$([X = i])_{i \in \llbracket 0, r \rrbracket}$$

On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^r \mathbb{P}([X = i] \cap B)$$

- × Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors le système complet d'événements associé à X est :

$$([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$$

On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap B)$$

□

b) On considère maintenant une v.a.r. Y à valeurs entières.

Écrire $\mathbb{P}([Y = 1])$ sous forme d'une somme à l'aide des systèmes complets d'événements décrits dans la question 2.a).

De manière générale, écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$, la quantité $\mathbb{P}([Y = k])$ sous forme d'une somme à l'aide des systèmes complets d'événements décrits dans la question 2.a).

(c'est ainsi que l'on détermine la loi de Y si l'on connaît la loi du couple (X, Y))

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On reprend les éléments de la question précédente en remplaçant B par $[Y = k]$.

× Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors la famille $([X = x_i])_{i \in [1, n]}$ est un système complet d'événements. On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = k])$$

× Si $X(\Omega) = [0, r]$ alors la famille $([X = i])_{i \in [0, r]}$ est un système complet d'événements. On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{i=0}^r \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k])$$

× Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors la famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = k])$$

□

4. Reprendre la question 3. en remplaçant les rôles de X et de Y .

(il s'agit de vérifier que l'on sait déterminer la loi de X si l'on connaît la loi du couple (X, Y))

Démonstration.

On considère dans cette question que X prend des valeurs entières ($X(\Omega) \subset \mathbb{N}$).

On reprend les éléments de la question précédente en remplaçant les rôles de X et Y .

× Si $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ alors la famille $([Y = y_j])_{j \in [1, n]}$ est un système complet d'événements. On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([Y = y_j] \cap [X = k]) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = y_j])$$

× Si $Y(\Omega) = [0, r]$ alors la famille $([Y = j])_{j \in [0, r]}$ est un système complet d'événements. On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \sum_{j=0}^r \mathbb{P}([Y = j] \cap [X = k]) = \sum_{j=0}^r \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j])$$

- × Si $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors la famille $([Y = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = j] \cap [X = k]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j])$$

□

À RETENIR

- Si l'on connaît la loi du couple (X, Y) , la loi de X est déterminée à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ (c'est le SCE associé à Y).
- Si l'on connaît la loi du couple (X, Y) , la loi de X est déterminé à l'aide de la FPT appliquée sur le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ (c'est le SCE associé à X).
- Le système complet d'événements $([X = x] \cap [Y = y])_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ n'est **JAMAIS** utilisé dans la formule des probabilités totales. La seule utilisation que l'on peut faire de ce SCE est qu'il permet de conclure :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \right) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \right) = 1 \end{aligned}$$

Utilisation du SCE associé à un couple de v.a.r. discrètes

Exercice 2 (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que : $X(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

Calculer la valeur de λ .

Démonstration.

- La famille $([X = i] \cap [Y = j])_{\substack{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$

- Or :
$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda \binom{n}{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda \binom{n}{i-1} 2^n \right) \quad (*) \\ &= \lambda 2^n \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} = \lambda 2^n \times 2^n \quad (*) \end{aligned}$$

- Il reste à démontrer (*) :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} && \text{(par décalage d'indice)} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^j \times 1^{n-j} \\
 &= (1+1)^n && \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\
 &= 2^n
 \end{aligned}$$

- On conclut de ce qui précède :

$$\lambda 2^n \times 2^n = 1$$

$$\text{Ainsi : } \lambda = \frac{1}{4^n}.$$

□

Savoir déterminer une loi marginale à l'aide d'une loi de couple

Exercice 3 (★)

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = c \frac{i+j}{i!j!}$$

2. a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X = i]) = c \frac{(i+1)}{i!} e$.

En déduire la valeur de c .

Démonstration.

Soit $i \in \mathbb{N}$.

- La famille $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On a alors, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = j] \cap [X = i]) \\
 &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
 &= \sum_{j=0}^{+\infty} c \frac{i+j}{i!j!} \\
 &= \frac{c}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{j!} \\
 &= \frac{c}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{j!} + \frac{j}{j!} \right) \\
 &= \frac{c}{i!} \left(i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} \right) \quad (*)
 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est valide sous réserve de convergence de toutes les séries en présence.

- Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \frac{j}{j!} &= \sum_{j=1}^N \frac{j}{j!} && \text{(car le premier terme} \\ &&& \text{de la somme est nul)} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{(j-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre $N - 1$ de la série exponentielle de paramètre 1. Cette série est convergente et de plus :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e^1$$

- En reprenant l'égalité (*), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = i]) &= \frac{c}{i!} \left(i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} \right) \\ &= \frac{c}{i!} (i e^1 + e^1) \\ &= c \frac{(i+1)}{i!} e \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = i]) = c \frac{(i+1)}{i!} e}$$

- La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) = 1$$

- Or :
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} c \frac{(i+1)}{i!} e \\ &= c e \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(i+1)}{i!} \\ &= c e \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \\ &= c e \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{i!} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i!} \right) && \text{(car il y a convergence} \\ &&& \text{des séries en présence)} \\ &= c e (e + e) \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue à l'aide des calculs effectués au point précédent.

- On conclut de ce qui précède :

$$2 c e^2 = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } c = \frac{1}{2e^2}.}$$

□

- b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
- c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. a) Déterminer la loi de $X + Y - 1$.
- b) En déduire la variance de $X + Y$.
- c) Calculer la covariance de X et de $X + 5Y$.
Les variables aléatoires X et $X + 5Y$ sont-elles indépendantes ?
4. On pose : $Z = \frac{1}{X + 1}$.
- a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
- b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.

Exercice 4 (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que :

× $X(\Omega) = \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

× la loi du couple est fournie par : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2, \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y .

Démonstration.

- La famille $([Y = i])_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

On a alors, par la formule des probabilités totales, pour tout $j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = j]) &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}([Y = i] \cap [X = j]) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{j-1} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{j-1} 2^n \quad \text{(d'après les calculs faits en exercice 2)} \end{aligned}$$

On en conclut : $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1} \end{cases}$.

- La famille $([X = j])_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est un système complet d'événements.
On a alors, par la formule des probabilités totales, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = i]) &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} 2^n \quad \text{(d'après les calculs faits en exercice 2)} \end{aligned}$$

On en conclut :
$$\begin{cases} Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Y = i]) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \end{cases} .$$

Commentaire

La loi de la v.a.r. Y est la même que celle de X . La loi de Y a d'ailleurs été déterminée à l'aide des mêmes calculs que ceux faits pour déterminer la loi de X . Cela provient du fait que les v.a.r. X et Y jouent des rôles symétriques. En effet, on a :

× $X(\Omega) = Y(\Omega)$

× pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$:

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = i]) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = \frac{1}{4^n} \binom{n}{j-1} \binom{n}{i-1} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

□

2. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.
3. Soit $Z = X - 1$. Reconnaître dans la loi de Z une loi usuelle.
En déduire l'espérance et la variance de X .

Savoir déterminer la loi du couple (X, Y) en fonction des lois conditionnelles

Exercice 5 (★)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $q = 1 - p$.

On suppose que :

× X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;

× $Y(\Omega) = \mathbb{N}$;

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p . Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = \mathbb{P}([V = k])$ où V est une v.a.r. telle que : $V \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(il est vivement conseillé de traduire correctement cette information, c'est-à-dire en prenant garde aux valeurs de k et n)

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après l'énoncé, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p . Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k]) &= \mathbb{P}([X = n]) \times \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

□

2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Démonstration.

- La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
 On a alors, par la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ k \in \llbracket 0, n \rrbracket}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = j]) + \sum_{\substack{n=0 \\ k \notin \llbracket 0, n \rrbracket}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k]) \end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\begin{cases} k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ n \in \llbracket 0, +\infty \llbracket \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \{ k \leq n \}$$

(la variable de sommation reste n et ne devient en aucun cas k !)

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} \lambda^n (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\cancel{n}!}{k! (n-k)! \cancel{n}!} \frac{1}{\cancel{n}!} \lambda^n (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} \lambda^n (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

- On obtient alors (suite du précédent calcul) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = k]) &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n+k} (1-p)^n && \text{(par décalage d'indice)} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n (1-p)^n \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} && \text{(en reconnaissant la somme de la série exponentielle de paramètre } \lambda(1-p)\text{)} \\
 &= \cancel{e^{-\lambda}} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cancel{e^{\lambda}} e^{-\lambda p}
 \end{aligned}$$

On a alors : $\begin{cases} Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Y = k]) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{cases}$. On en conclut : $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. □

- Déterminer la loi de $X - Y$.
- a) Établir l'indépendance des variables aléatoires Y et $X - Y$.
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y .

Savoir déterminer la loi d'un couple (X, Y)

Exercice 6 (★)

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile. Les lancers sont considérés indépendants.

- Déterminer la loi de X .

Démonstration.

- L'expérience consiste ici en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (lancer de pièce) indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. X est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

□

- Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
En effet, le premier Pile peut apparaître dès le premier tirage; le deuxième apparaît au mieux lors du deuxième tirage.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

- Déterminons la loi du couple (X, Y) .
Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

L'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X = i]$ est réalisé et l'événement $[Y = j]$ est réalisé

\Leftrightarrow Le 1^{er} Pile est obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage et le 2^{ème} Pile est obtenu au $j^{\text{ème}}$ tirage

- Deux cas se présentent.

× Si $i \geq j$, alors :

$$[X = i] \cap [Y = j] = \emptyset$$

En effet, le premier Pile ne peut apparaître après le deuxième.

Ainsi : $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

× Si $i < j$, alors :

$$[X = i] \cap [Y = j] = F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{j-1} \cap P_j$$

On a alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ = & \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_{i-1}) \times \mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(F_{i+1}) \times \dots \times \mathbb{P}(F_{j-1}) \times \mathbb{P}(P_j) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \\ = & q^{i-1} p q^{j-i-1} p \\ = & q^{j-2} p^2 \end{aligned}$$

En conclusion :
$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \\ \forall i \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} p^2 (1-p)^{j-2} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad \square$$

3. En déduire la loi de Y .

Démonstration.

- La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = j]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) + \sum_{\substack{i=1 \\ i > j}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\begin{cases} i \in \llbracket 1, +\infty \llbracket \\ i < j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq i \\ i < j \end{cases} \Leftrightarrow \{ 1 \leq i < j \} \Leftrightarrow \{ 1 \leq i \leq j-1 \}$$

(la variable de sommation reste i et ne devient en aucun cas j !)

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\mathbb{P}([Y = j]) = \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2} p^2 = (j-1) q^{j-2} p^2$$

En conclusion : $\begin{cases} Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \\ \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}([Y = j]) = (j-1) p^2 (1-p)^{j-2} \end{cases}$

□

4. Que vaut $\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \right)$? Retrouver ce résultat par calcul.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \right) &= \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}} [X = i] \cap [Y = j] \right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \end{aligned}$$

car la famille $([X = i] \cap [Y = j])_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}}$ forme un système complet d'événements.

- On peut retrouver ce résultat par calcul.

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \right) &= \sum_{j=2}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = j]) && \text{(par la formule des} \\ &&& \text{probabilités totales)} \\ &= \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1) q^{j-2} p^2 \\ &= p^2 \sum_{j=2}^{+\infty} (j-1) q^{j-2} \\ &= p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j q^{j-1} \\ &= p^2 \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1 \end{aligned}$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison q .

$\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \right) = 1$

□

Exercice 7 (★)

On considère un dé équilibré à 3 faces numérotées 1, 2 et 3. On effectue n lancers de ce dé (où $n \in \mathbb{N}^*$). On introduit les v.a.r. X et Y suivantes :

- × X prend pour valeur le nombre de faces 1 obtenues au cours de l'expérience,
- × Y prend pour valeur le nombre de faces 2 obtenues au cours de l'expérience.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Démonstration.

- À l'issue de l'expérience, on a pu obtenir au minimum 0 fois la face 1 et au maximum n fois. Tous les résultats intermédiaires étant possible, on obtient : $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.
De même : $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$$

- Déterminons la loi du couple (X, Y) .
Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

L'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ est réalisé
 \Leftrightarrow L'événement $[X = i]$ est réalisé et l'événement $[Y = j]$ est réalisé
 \Leftrightarrow On a obtenu i faces 1 et on a obtenu j faces 2
à l'issue de l'expérience (c'est-à-dire lors des n lancers)

- Deux cas se présentent alors :

- × Si $i + j > n$ alors $[X = i] \cap [Y = j] = \emptyset$. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$$

- × Si $i + j \leq n$ alors l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ est réalisés par tous les n -lancers (c'est-à-dire les n -uplets d'éléments de $\{1, 2, 3\}$) du dé qui contiennent exactement i faces 1 et j faces 2 (et donc $n - (i + j)$ faces 3).

Un tel n -lancer est entièrement déterminé par :

- la position des 1 dans ce n -uplet : $\binom{n}{i}$ possibilités.
- la position des 2 dans les positions restantes : $\binom{n-i}{j}$ possibilités.
- la position des 3 dans les positions restantes : $\binom{n-i-j}{n-i-j}$ possibilités.

Il y a donc : $\binom{n}{i} \binom{n-i}{j}$ tels n -lancers.

Tous les n -lancers ayant la même probabilité d'apparaître, on en conclut :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\text{Card}([X = i] \cap [Y = j])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{i} \binom{n-i}{j}}{3^n}$$

En conclusion :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{i} \binom{n-i}{j}}{3^n} & \text{si } i + j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad \square$$

2. Déterminer la loi de X à l'aide de la question précédente.
 Quelle loi usuelle reconnaît-on ? Commenter.

Démonstration.

- La famille $([Y = j])_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.
 On a alors, par la formule des probabilités totales, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{j=0}^n \mathbb{P}([Y = j] \cap [X = i]) \\
 &= \sum_{j=0}^n \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
 &= \sum_{\substack{j=0 \\ i+j \leq n}}^n \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) + \sum_{\substack{j=0 \\ i+j > n}}^n \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-i} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])
 \end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\begin{cases} j \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ i + j \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq j \leq n \\ j \leq n - i \end{cases} \Leftrightarrow \{ 0 \leq j \leq n - i \}$$

(la variable de sommation reste j et ne devient en aucun cas i !)

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{3^n} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \\
 &= \frac{1}{3^n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \\
 &= \frac{1}{3^n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} 1^j \times 1^{(n-i)-j} \\
 &= \frac{1}{3^n} \binom{n}{i} (1+1)^{n-i} && \text{(d'après la formule du binôme de Newton)} \\
 &= \binom{n}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} 2^{n-i}
 \end{aligned}$$

En conclusion : $\begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = i]) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i} . \end{cases}$

- Ainsi : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$. On pouvait obtenir ce résultat directement. En effet :
 - × L'expérience consiste en une succession de n épreuves de Bernoulli (lancer du dé) indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{3}$ (probabilité d'obtenir 1).
 - × La v.a.r. X est le nombre de succès de cette expérience.

On en conclut : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.

□

À RETENIR

- La loi du couple (X, Y) n'est **JAMAIS** obtenue à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Pour obtenir la loi du couple (X, Y) on opère **TOUJOURS** comme suit.
 - a) Détermination de $X(\Omega)$ et de $Y(\Omega)$.
On pourra se contenter dans cet ensemble de déterminer un sur-ensemble de ces deux ensembles image ($X(\Omega) \subset I$ et $Y(\Omega) \subset J$).

b) On rédige alors comme suit.

Soit $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ (ou plutôt $(x, y) \in I \times J$).

L'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ est réalisé

\Leftrightarrow L'événement $[X = x]$ est réalisé et l'événement $[Y = y]$ est réalisé

\Leftrightarrow ... et ...

Cette rédaction ne permet pas de conclure quant à la loi du couple (X, Y) .

Elle sert simplement à s'assurer de la bonne compréhension de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé. Elle permet aussi de s'interroger sur les valeurs de x et y pour lesquelles l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ n'est pas l'événement impossible \emptyset .

c) On procède alors à une disjonction de cas.

× Si x et y sont tels que $[X = x] \cap [Y = y] = \emptyset$ alors :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0$$

× Si non on rédige comme présenté en d).

d) Il y a alors deux grandes manières de procéder.

(i) Décomposition de l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$

On utilise en priorité cette méthode. Pour ce faire, on pensera à introduire des événements basiques liés à l'expérience :

- ▶ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k : « on obtient Pile lors du $k^{\text{ème}}$ lancer »
- ▶ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k : « on obtient une boule blanche lors du $k^{\text{ème}}$ tirage »
- ▶ ...

Il est à noter que l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ peut aussi être décomposé à l'aide d'événements dépendant d'autres v.a.r.

(ii) Méthode par dénombrement

Cette méthode peut être utilisée lorsque :

- ▶ l'expérience consiste à effectuer un nombre fini n d'épreuves.
(en réalité, on peut aussi étendre cette méthode aux expériences qui procèdent à un nombre infini d'épreuves pour peu que la réalisation de l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ ne dépende que d'un nombre fini (notons-le n) d'épreuves de l'expérience, les résultats des épreuves ultérieures étant libres.)
- ▶ il y a équiprobabilité de toutes les issues de l'expérience (tous les n -tirages ou n -lancers ont même probabilité d'apparaître).

On rédige alors comme suit.

L'événement $[X = x] \cap [Y = y]$ est réalisé par tous les n -tirages (ou n -lancers suivant l'expérience) qui contiennent ...

Un tel n -lancer est entièrement déterminé par :

- le(s) numéro(s) apparaissant en position ... : ... possibilités.
- le(s) numéro(s) apparaissant en position ... : ... possibilités.
- ...

Le contexte oriente naturellement vers l'une ou l'autre de ces deux méthodes.

- Il est enfin à noter que la loi d'un couple (X, Y) peut aussi être obtenue à l'aide :
 - × de la loi de X et des lois conditionnelles de Y sachant l'événement $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
Il suffit alors simplement d'écrire que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \quad (*)$$

- × de la loi de Y et des lois conditionnelles de X sachant l'événement $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.
Il suffit alors simplement d'écrire que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x]) = \mathbb{P}([Y = y]) \times \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \quad (**)$$

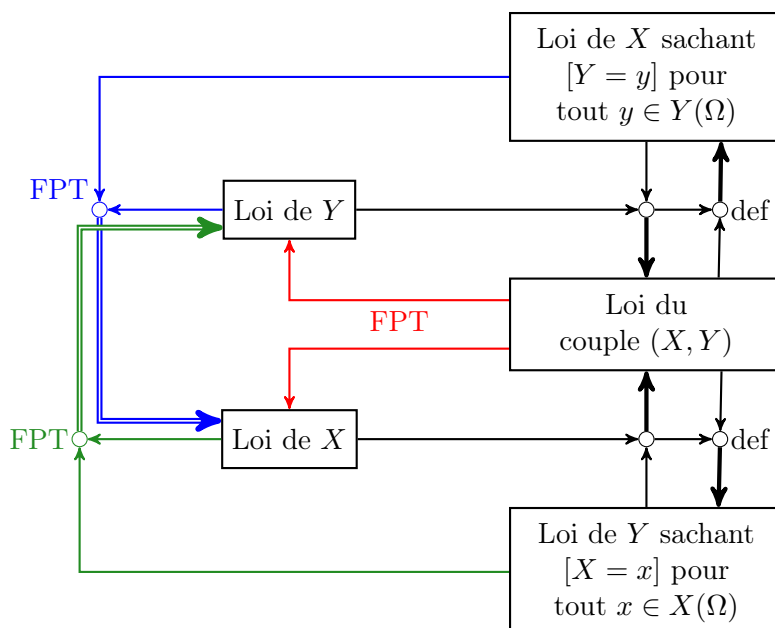
Il y a peu de chance que cette méthode permette de déterminer la loi du couple (X, Y) si l'énoncé n'est pas écrit dans un contexte de probabilités conditionnelles. Les égalités (*) et (**) ont un intérêt limité : déterminer une loi conditionnelle est aussi difficile que déterminer une loi de couple. Écrire (*) ou (**) n'a donc d'intérêt que si l'énoncé amène naturellement à travailler sur les lois conditionnelles.

Bilan : liens entre les différentes lois

Il faut savoir :

- × faire le lien entre la loi de couples et les lois conditionnelles.
- × déterminer les lois marginales si on connaît la loi du couple,
- × déterminer les lois marginales si on connaît les lois conditionnelles.

Les liens en ces différentes notions sont rappelés dans le schéma suivant.



On retiendra que la formule des probabilités totales est la clé pour déterminer les lois marginales. Si la détermination de la loi du couple / les lois conditionnelles constitue généralement la plus grande difficulté d'un exercice sur les couples, la détermination des lois marginales se résume simplement à une application de la formule des probabilités totales. Des difficultés calculatoires peuvent apparaître mais il n'y a aucune difficulté méthodologique.