Réduction : cas d'un endomorphisme possédant une unique valeur propre

Cas d'une unique valeur propre : un exemple d'exercice

Exercice 1 (★)(EDHEC 2016)
On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

4. ***a)*** On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$.

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.