Réduction : exemple 1

Exercice 1 (EDHEC 2016)

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

- Ainsi : $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} - 4I$.

$$\boxed{A^2 - 4A = -4I}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(X) = X^2 - 4X + 4 \text{ est } \textbf{un} \text{ polynôme annulateur de degré 2 de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul P.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, P$ est toujours un polynôme annulateur puisque :
  $$(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A) = 0$$
  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $Q(X) = (X - 5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
  $$Q(A) = (A - 5\,I)\ P(A) = 0$$
- Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.

$\square$

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

Démonstration.

- On remarque que $P(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Ainsi, l'unique racine de P est 2.
  Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{2\}.}$$

Commentaire

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes des valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.
- On dit généralement que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.

- Montrons maintenant que 2 est une valeur propre de A (*i.e.* $\{2\} \subset \mathrm{Sp}(A)$).

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-2I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \dim\left(\ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\ \right) \\
&= \dim\left(\ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\ \right) \ = \ 1 < 3
\end{aligned}$$

La matrice $A - 2I$ n'est pas inversible, ce qui signifie que 2 est valeur propre de A.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{2\}}$$

Commentaire

On peut aussi affimer que $A - 2\,I$ est non inversible en remarquant que cette matrice possède deux vecteurs colonnes (ou lignes) égaux (colinéaires suffirait). □

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, A possède 2 comme unique valeur propre.
- On procède par l'absurde. Supposons que A est diagonalisable.
  Il existe donc :
  × $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale,
  × $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible,
  telles que : $A = PDP^{-1}$.
  De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A. On en déduit :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\ I_3$$

Et :

$$A = PDP^{-1} = P(2\ I_3)P^{-1} = 2\ PP^{-1} = 7\ I_3$$

Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- Montrons que A est inversible.
  On sait que $\text{Sp}(A) = \{2\}$. Donc en particulier, 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ est inversible.}}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de démontrer que A n'est pas diagonalisable en déterminant la dimension de $E_2(A)$, espace propre associé à l'unique valeur propre 2.
  On démontre alors que $\dim(E_2(A)) = 2 \neq 3$ (*cf* question suivante).
- Concernant l'inversibilité de A on utilise :

$$A \text{ non inversible } \Leftrightarrow \text{ 0 est valeur propre de } A$$

  On peut aussi démontrer l'inversibilité de A en déterminant son inverse par la méthode proposée en ***5.b)***.
- Toutes les méthodes donnant le bon résultat sont acceptées. Évidemment, les méthodes les plus longues produisent une perte de temps et sont pénalisantes à terme.

$\square$

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

Démonstration.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_2(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 2\, u \\
& \Longleftrightarrow & (f - 2\, Id)(u) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (A - 2\, I_3)\, U = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \; x - y + z = 0 \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \; x = y - z \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(f) & = & \left\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(u) = 2u\right\} \\
& = & \left\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y - z\right\} \\
& = & \left\{(y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\right\} \\
& = & \left\{y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\right\} \; = \; \text{Vect}\left((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\right)
\end{array}$$

- Notons $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2) est :
  × génératrice de $E_2(f)$.
  × libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.
  C'est donc une base de $E_2(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1, u_2) \text{ est une base de } E_2(f).}$$

Commentaire

- Comme A est la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}$, alors : $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f)$.
- Par contre, comme on le voit ici : $E_2(A) \neq E_2(f)$. En effet :
  × le sous espace-propre $E_2(A)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des matrices de taille 3×1.
  × le sous-espace propre $E_2(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel dont les vecteurs sont des triplets de réels.

  Ce qu'on peut résumer par : $(x, y, z) \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

□

4. a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
- Montrons que la famille $\big((1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (-1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0) \quad (*)$$

Or : $(*)$ $\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$

$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$

$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$

$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$
(par remontées successives)

  La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.
- De plus, $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}(\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3))}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens !

□

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

Démonstration.

Notons $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On a démontré précédemment que $u_1 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- On a démontré précédemment que $u_2 \in E_2(f)$. Ainsi : $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  On en déduit que $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u_3)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = A \times U_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).

  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (**)$

$$\text{Or :} \quad (**) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 4 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 3 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & \beta & & & = & 1 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & & & & & = & 2 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

  On en déduit : $f(u_3) = 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$.

  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'énoncé, $N = T - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- De plus : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
  (on peut aussi noter que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = 0$)
- Les matrices $2I$ et N commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
  On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (2\,I + N)^n & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\,I)^{n-k}\ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^{n-k}\ I^{n-k}\ N^k & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^{n-k}\ I\ N^k \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a :} \\ & & & \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\ 2^{n-k}\ N^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\ 2^{n-k}}\ N^k & \textit{(ce découpage est} \\ & & & \textit{valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\ 2^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a montré :} \\ & & & \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\binom{n}{0}\ 2^n\ N^0 + \binom{n}{1}\ 2^{n-1}\ N^1 \ = \ 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ N &
\end{array}$$

- Enfin : $2^0\ I + 0\ 2^{-1}\ N = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ N.}$$

- De plus, comme $N = T - 2I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ (T - 2I) \ = \ 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ T - n\ 2^n\ I \ = \ n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.

$\square$

5. a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$

- Remarquons tout d'abord, à l'aide de la question précédente :

$$\begin{array}{rcll} T^n & = & n2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I & \\ \text{Ainsi } \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n & = & n2^{n-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) & \textit{(par définition de } T \textit{ et } I\textit{)} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{id}\big) & \textit{(par linéarité de l'application } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)\textit{)} \end{array}$$

  Enfin, comme $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\big)^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n)$, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) \ = \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{id}\big)$$

  L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(.)$ étant bijective, on en conclut :

$$\boxed{f^n \ = \ n2^{n-1}\ f - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{id}}$$

- En appliquant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ de part et d'autre de cette égalité, on obtient, à l'aide des propriétés listées au-dessus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) \ = \ n2^{n-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - (n-1)\ 2^n\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\,2^n\ I}$$

Commentaire

- Il faut comprendre que l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ établit un isomorphisme entre l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
  La base $\mathscr{B}$ étant fixée, cela signifie que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ possède une unique représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ et qu'inversement toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle dans $\mathscr{B}$ d'un unique endomorphisme.
- Le passage du monde des endomorphismes vers le monde matriciel (application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle endomorphisme-matrice ».
  Le passage du monde matriciel vers le monde des endomorphismes (la réciproque de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$) est parfois appelé « passerelle matrice-endomorphisme ».
  On peut donc rédiger comme suit.

  On rappelle :

$$T^n = n2^{n-1}\ T - (n-1)\,2^n\ I$$

  × Comme T est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$, on en déduit, par la passerelle matrice-endomorphisme :

$$f^n = n2^{n-1}\ f - (n-1)\,2^n\ Id$$

  × Comme A est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3), on en déduit, par la passerelle endomorphisme-matrice :

$$A^n = n2^{n-1}\ A - (n-1)\,2^n\ I$$

Commentaire

On pouvait procéder autrement.
Notons $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Alors :

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ &= P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \ = \ P \times T \times P^{-1} \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.
(la récurrence n'est pas explicitement demandée dans le sujet, il n'est donc pas utile de la faire)
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I$. Donc :

$$\begin{aligned} A^n &= P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ (n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I)\ P^{-1} \\ &= n\ 2^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 2^n\ P\ P^{-1} \\ &= n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I \end{aligned}$$

Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I$. □

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

Démonstration.
D'après la question ***1.***, $A^2 - 4A = -4I$.

On en déduit que $-\dfrac{1}{4}\ (A^2 - 4A) = I$. Et ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{4}\ (A - 4I)\right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{4}\ (A - 4I).}$$ □

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5a*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} n\ 2^{n-1}\ A - (n-1)\ 2^n\ I &= (-1)\ 2^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 2^{-1}\ I \\ &= (-1)\ \frac{1}{2^2}\ A - (-2)\ \frac{1}{2}\ I \ = \ -\frac{1}{4}\ A + I \\ &= -\frac{1}{4}(A - 4I) \ = \ A^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textbf{\textit{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$ □