Réduction : cas d'un endomorphisme possédant deux valeurs propres distinctes

Cas de deux valeurs propres distinctes : un exemple d'exercice

Cas où la matrice est diagonalisable

Exercice 1 (★)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer sans calcul que l'endomorphisme f est diagonalisable.

2. ***a)*** Calculer $(A - 2\,I_3)\ (A - 5\,I_3)$.

b) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

3. ***a)*** Utiliser la question ***2.*** pour déterminer les valeurs propres de f.

b) Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de id_E et f.

4. ***a)*** Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f.

b) Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de f. Quelle propriété retrouve-t-on ?

c) Démontrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible tel que : $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On explicitera P et P^{-1}.

5. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Quelle propriété a A^n ? Pourquoi ?

Cas où la matrice n'est pas diagonalisable

Exercice 2 (★)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. ***a)*** Que vaut $A^3 + 2\,A^2$?

b) En déduire les valeurs propres possible de l'endomorphisme f.

2. ***a)*** L'endomorphisme f est-il bijectif ? Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, de premier coefficient 1, tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.
En déduire $\dim\,(\mathrm{Ker}(f))$.

3. On note $v = e_2 + e_3$.

a) Déterminer $f(v)$. Que peut-on en déduire ?

b) Calculer $\mathrm{rg}\,\big(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)$. En déduire $\dim\,\big(\mathrm{Ker}\,\big(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)\big)$.

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. On note $w = -e_1 + e_2 + e_3$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer $f(w)$. On exprimera le résultat dans la base $\mathscr{B}'$.

c) En déduire la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$. On notera $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

d) En déduire qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $A = P\,T\,P^{-1}$.
On explicitera P et P^{-1}. Que représentent ces deux matrices ?

e) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

6. Dans la suite, on note $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'unique matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $T = D + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n. Le résultat devra dépendre des matrices D et de N.

d) En déduire explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice T^n puis la matrice A^n.