Réduction : cas d'un endomorphisme possédant deux valeurs propres distinctes

Cas où la matrice est diagonalisable

Exercice 1
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer sans calcul que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.}}$$

□

2. ***a)*** Calculer $(A - 2\,I_3)\ (A - 5\,I_3)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} (A - 2\,I_3)\ (A - 5\,I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{(A - 2\,I_3)\ (A - 5\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A - 2\,I_3)\ (A - 5\,I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A - 2\,I_3)\ (A - 5\,I_3) \quad = \quad A^2 - 5\,A - 2\,A + 10\,I_3$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} & A^2 - 7 \cdot A + 10\,I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} \quad & A^2 - 7 \cdot A = -10\,I_3 \\ \text{donc} \quad & A \times (A - 7 \cdot I_3) = -10\,I_3 \\ \text{donc} \quad & A \times \left(-\frac{1}{10} \cdot (A - 7 \cdot I_3) \right) = I_3 \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-\dfrac{1}{10} \cdot (A - 7 \cdot I_3)$.

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{10}\ (A - 7 \cdot I_3)}$$

Commentaire

- L'écriture $\dfrac{A - 7 \cdot I_3}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\dfrac{1}{10} \cdot (A - 7 \cdot I_3)$ est bien autorisée car on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice A, si elle existe, est notée A^{-1} et pas $\dfrac{1}{A}$. L'écriture $\dfrac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices. □

3. a) Utiliser la question ***2.*** pour déterminer les valeurs propres de f.

Démonstration.

- D'après la question ***2.***, on a : $(A - 2\, I_3)\ (A - 5\, I_3) \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  On en déduit que le polynôme :
  $$Q(X) = (X-2)(X-5)$$
  est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi :
  $$\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \left\{ \begin{array}{l} \text{racines de } Q\text{, polynôme} \\ \text{annulateur de } A \end{array} \right\} = \{2, 5\}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } A \text{ possède deux valeurs propres } \textbf{possibles} : 2 \text{ et } 5.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de f puisque :
  $$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que f possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de f puisque :
  $$R(A) \ = \ (A - 5\, I_n) \circ Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\ Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre de A.

- Il reste à démontrer que les réels 2 et 5 sont bien valeurs propres. Remarquons tout d'abord :
  $$A - 2\, I_3 \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
  La matrice $A - 2\, I_3$ n'est pas inversible car possède deux colonnes égales ($C_1 = C_2$).
  $$\boxed{\text{On en déduit que le réel 2 est valeur propre de } A.}$$

- Par ailleurs :

$$A - 5\,I_3 \ = \ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - 5\,I_3$ n'est pas inversible car il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les colonnes de la matrice $A - 5\,I_3$ ($C_1 = -C_2 - C_3$).

$$\boxed{\text{On en déduit que le réel 5 est valeur propre de } A.}$$

Commentaire

On a trouvé une relation de dépendance linéaire non triviale entre les colonnes de la matrice $A - 5\,I_3$. Si on ne trouve pas directement cette relation, il est possible d'effectuer un calcul de rang. Plus précisément :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A - 5\,I_3) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La réduite obtenue (et donc la matrice initiale $A - 5\,I_3$) est non inversible car possède 2 lignes opposées ($L_2 = -L_3$). On en déduit que le réel 5 est valeur propre de A.

- On a démontré que les deux valeurs propres possibles de A sont bien valeurs propres. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) \ = \ \{2, 5\}$$

De plus, comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a : $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(f) = \{2, 5\}.}$$

□

b) Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de id_E et f.

Démonstration.

- On a démontré en question ***1.b)*** :

$$I_3 \ = \ A \times \left(-\frac{1}{10} \cdot (A - 7 \cdot I_3)\right)$$

- En revenant à la définition de A, cette égalité se réécrit :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \left(-\dfrac{1}{10} \cdot \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - 7 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\big)\right) & \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(-\dfrac{1}{10} \cdot \big(f - 7 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)\right) & \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f \circ \left(-\dfrac{1}{10} \cdot \big(f - 7 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)\right)\right) & \textit{(par propriété de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \end{array}$$

Finalement, par bijectivité de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$, on en déduit :

$$f \circ \left(-\frac{1}{10} \cdot \big(f - 7 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)\right) \;=\; \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$$

On démontre de même :

$$\left(-\frac{1}{10} \cdot \big(f - 7 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)\right) \circ f \;=\; \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$$

On en déduit que l'endomorphisme f est bijectif et de réciproque :
$$f^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \big(f - 7 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big).$$

Commentaire

L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{array}{rcl} f & \longleftrightarrow & A \\ f \circ f & \longleftrightarrow & A \times A \\ f \circ \left(-\dfrac{1}{10} \cdot \big(f - 7 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)\right) & \longleftrightarrow & A \times \left(-\dfrac{1}{10} \cdot \big(A - 7 \cdot I_3\big)\right) \end{array}$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. □

4. a) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de f.

Démonstration.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in E_2(f) & \iff & \big(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff & (A - 2\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_2(f) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\} \\ & = & \{(-y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot (-1,1,0) + z \cdot (-1,0,1) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((-1,1,0), (-1,0,1)\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_2(f) = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0), (-1,0,1)\right).}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$.
Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 2$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Or :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ & = & x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si l'on choisit $x \neq 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut :

× choisir $y = -x$ et donc $z = 0$.
En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

× choisir $z = -x$ et donc $y = 0$.
En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et ainsi :

$$E_2(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On en conclut finalement : $E_2(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) & = & \dim\left(E_2(A)\right) & + & \mathrm{rg}(A - 2\,I_3) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 1 \end{array}$$

(par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

Ainsi : $\dim\left(E_1(A)\right) = 3 - 1 = 2$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

- Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_5(f) & \Longleftrightarrow & \big(f - 5\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Longleftrightarrow & (A - 5\,I_3) \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow 3\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -6\,x & & & = & -6\,z \\ & - & 3\,y & = & -3\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_5(f) & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \ \texttt{ ET } \ y = z\} \\
& = & \{(z,z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{z \cdot (1,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_5(f) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right).}$$

□

b) Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de f. Quelle propriété retrouve-t-on ?

Démonstration.

- La famille $calF_2 = \big((-1,1,0),(-1,0,1)\big)$ est :
  - × génératrice de $E_2(f)$,
  - × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

  On en conclut que $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_2(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_2(f)\big) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}_2\big) = 2.}$$

- La famille $\mathcal{F}_5 = \big((1,1,1)\big)$ est :
  - × génératrice de $E_5(f)$,
  - × libre car constituée d'un vecteur non nul.

  On en conclut que $\mathcal{F}_5$ est une base de $E_5(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_5(f)\big) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}_5\big) = 1.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille $\big((1,1,1)\big)$ contient seulement 1 vecteur. Cette famille est donc finie, de cardinal 1 (ce qu'on note $\text{Card}\big((1,1,1)\big) = 1$).
- L'ensemble $\text{Vect}\,((1,1,1))$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires du vecteur $(1,1,0)$. C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base d'un espace vectoriel, tout vecteur de cet espace vectoriel se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\,\big(\text{Vect}\,((1,1,1))\big)}$ et $\cancel{\text{dim}\,\big((1,1,1)\big)}$ n'ont aucun sens !
- Par ailleurs, il faut faire attention aux objets manipulés.
  On doit déterminer $E_5(f) = \text{Ker}(f - 5\,\text{id}_{\mathbb{R}^3})$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si u et $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même triplet u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3}_{\in \mathbb{R}^3} \;\cancel{=}\; \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

et

$$\underbrace{\text{Vect}\,((1,1,1))}_{= E_5(f)} \;\cancel{=}\; \underbrace{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{= E_5(A)}$$

- Rappelons : $\text{Sp}(f) = \{2, 5\}$. Or :

$$\dim\big(E_2(f)\big) + \dim\big(E_5(f)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Cela démontre que l'endomorphisme f est diagonalisable.

> Comme $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, cela démontre aussi que la matrice A est diagonalisable, ce que l'on avait déja démontré en question ***1***. □

c) Démontrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible tel que :

$$A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On explicitera P et P^{-1}.

Démonstration.

- D'après la question ***1.***, la matrice A est diagonalisable. Il existe donc :
  × une matrice inversible P, obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A,
  × une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  telles que : $A = PDP^{-1}$.
- Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_5(A)$ et $E_2(A)$, on peut choisir :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a bien trouvé } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telles que : } A = P\,D\,P^{-1}.}$$

Commentaire

- Rappelons que cette égalité n'est rien d'autre qu'une illustration de la formule du changement de base. Profitons de cet exercice pour illustrer cette formule.
- Notons $\mathscr{B}' = \big((1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1)\big)$. La famille $\mathscr{B}'$ est :
  × libre car est obtenue par concaténation de $\mathcal{F}_5$ et $\mathcal{F}_2$ qui sont :
  – deux familles libres,
  – deux familles de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

  × telle que : $\text{Card}\left(\mathscr{B}'\right) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.

  C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

  On obtient alors, par la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ A & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

- Notons $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Rappelons que, par définition :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big((1,1,1)\big) \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big((1,-1,0)\big) \quad \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big((1,0,-1)\big)\Big)$$

  (la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est obtenue par concaténation des matrices colonnes représentatives des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$)

- Pour déterminer P^{-1}, on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 2\ L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

- La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P. *(c'est toujours le cas d'une matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$!)*

- On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow 2\ L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}\ L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

□

5. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, comme D est diagonale : $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
- Ensuite, par une récurrence immédiate, on obtient : $A^n = P\, D^n\, P^{-1}$.
- Enfin, d'après tout ce qui précède :

$$\begin{aligned} A^n &= P\, D^n\, P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & 2^n & 2^n \\ 5^n & -2^n & 0 \\ 5^n & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2 \times 2^n & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2 \times 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2 \times 2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \left(5^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2^n \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{3} \left(5^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2^n \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

Afin de faciliter le calcul de A^n, il est vivement conseillé de commencer par le calcul de $P\, D^n$. En effet, dans l'hypothèse où le calcul de P^{-1} s'avérerait faux, commencer par le calcul $D^n\, P^{-1}$ donne un résultat intermédiaire faux, ce qui ne permet pas d'obtenir de point sur la question. En revanche, effectuer d'abord le calcul de $P\, D^n$ peut permettre d'obtenir le point du calcul intermédiaire. □

6. Quelle propriété a A^n ? Pourquoi ?

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned} {}^t(A^n) &= \left({}^tA\right)^n && \textit{(par une récurrence immédiate)} \\ &= A^n && \textit{(car A est symétrique)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la matrice } A^n \text{ est symétrique.}}$$

Commentaire

On pouvait évidemment conclure en utilisant la formule explicite donnée à la question précédente. On a préféré s'en passer ici pour démontrer qu'il est possible de traiter des questions sans avoir fait toutes les précédentes.

□

Cas où la matrice n'est pas diagonalisable

Exercice 2 ($\bigstar$)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. a) Que vaut $A^3 + 2\,A^2$?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- De plus :

$$A^3 = A\ A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$A^3 + 2\,A^2 \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\boxed{A^3 + 2\,A^2 = -A}$$

□

b) En déduire les valeurs propres possibles de l'endomorphisme f.

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a : $A^3 + 2\,A^2 + A \;=\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  On en déduit que le polynôme :

$$Q(X) = X^3 + 2X^2 + X = X\ (X^2 + 2X + 1) = X\ (X+1)^2$$

  est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) \;\subset\; \left\{ \begin{array}{l} \text{racines de } Q\text{, polynôme} \\ \text{annulateur de } A \end{array} \right\} = \{-1, 0\}$$

- De plus, comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a :

$$\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 0\}$$

Ainsi, l'endomorphisme f possède deux valeurs propres **possibles** : -1 et 0.

Commentaire

- Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ défini sur un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus)
- Si Q est un polynôme annulateur de f alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de f puisque :
$$(\alpha\, Q)(f) \ = \ \alpha\, Q(f) \ = \ 0_{\mathscr{L}(E)}$$
Cela suffit à démontrer que f possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de f puisque :
$$R(f) \ = \ (f - 5\,\mathrm{id}) \circ Q(f) \ = \ 0_{\mathscr{L}(E)}$$
Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'un endomorphisme.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de f. Si c'était le cas, f aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\ Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre de f. □

2. a) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
- La matrice A possède deux colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$). Elle n'est donc pas inversible.
- Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on en déduit que l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

$$\boxed{\text{On en conclut que 0 est valeur propre de } f.}$$

Commentaire

- Dans le cas où $f : E \to E$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E **de dimension finie**, on a :
$$\begin{array}{rcl} f \text{ bijectif} & \Leftrightarrow & f \text{ injectif} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \\ & \Leftrightarrow & \text{le réel 0 n'est pas valeur propre de } f \end{array}$$
L'hypothèse de dimension finie est primordiale pour la première équivalence (les autres sont toujours vraies). Autrement dit, il existe des endomorphismes injectifs et non bijectifs si E est de dimension infinie (et seulement dans ce cas).
- Dans le cas où f est un endomorphisme de E, de dimension finie, qui n'admet pas 0 comme valeur propre, on peut rédiger comme suit :
Le réel 0 *n'est pas valeur propre de* f*, donc* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
On en conclut que l'endomorphisme f *est injectif.*
Ainsi, comme E *est* **de dimension finie**, f *est bijectif.*
(l'oubli de cette hypothèse sera sanctionné)

Commentaire

- Par contre, on a toujours (sans hypothèse de dimension finie) : f bijectif $\Rightarrow$ f injectif. Et donc, par contraposée :

$$\boxed{f \text{ n'est pas injectif } \Rightarrow \ f \text{ n'est pas bijectif}}$$

- Et on a toujours aussi :

$$\text{La matrice } A \text{ est inversible } \Leftrightarrow \ \text{ le réel } 0 \text{ n'est pas valeur propre de } A$$

En effet, la notion de matrice sous-entend que l'on se trouve en dimension finie. $\square$

b) Déterminer un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, de premier coefficient 1, tel que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$.

Démonstration.

- Déterminons $E_0(f) = \text{Ker}(f)$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0.

  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = (x, y, z)$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_0(f) & \iff & f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \iff & A \times U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & - & z & = & -y \\ & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & & & = & -y \\ & - & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_0(f) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \quad \text{et} \quad z = 0\} \\
& = & \{(y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{y \cdot (1, 1, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
& = & \text{Vect}\left((1, 1, 0)\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_0(f) = \text{Vect}\left((1, 1, 0)\right).}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.
Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = 0$.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_0(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si l'on choisit $z \neq 0$, on ne pourra obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire.

En effet, on ne pourra compenser à la fois le -1 et le -2 par ajout de vecteurs dont tous les coefficients sont égaux.

Si l'on choisit $z = 0$, pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il suffit de prendre $x = -y$. En prenant par exemple $x = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(A)$ et ainsi :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subset E_0(A)$$

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(E_0(A)\big) & + & \mathrm{rg}(A) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

(par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

Ainsi : $\dim\big(E_0(A)\big) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

- La famille $\mathcal{F}_0 = \big((1,1,0)\big)$ est :
  - × génératrice de $E_0(f)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  On en conclut que $\mathcal{F}_0$ est une base de $E_0(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim\big(E_0(f)\big) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}_0\big) = 1.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille $\big((1,1,0)\big)$ contient seulement 1 vecteur. Cette famille est donc finie, de cardinal 1 (ce qu'on note $\mathrm{Card}\big((1,1,0)\big) = 1$).
- L'ensemble $\mathrm{Vect}\left((1,1,0)\right)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires du vecteur $(1,1,0)$. C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base d'un espace vectoriel, tout vecteur de cet espace vectoriel se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}\big(\mathrm{Vect}\left((1,1,0)\right)\big)}$ et $\cancel{\dim\big((1,1,0)\big)}$ n'ont aucun sens !
- Par ailleurs, il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si u et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont deux représentations différentes du même triplet u, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3}_{\in \mathbb{R}^3} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

et

$$\underbrace{\mathrm{Vect}\left((1,1,0)\right)}_{\subseteq E_0(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\subseteq E_0(A)}$$

□

3. On note $v = e_2 + e_3$.

a) Déterminer $f(v)$. Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, notons $E_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_i)$. Notons aussi $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v)\big) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \\ & = & A \times V \\ & = & A \times (E_2 + E_3) \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ = \ (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v)\big) = (-1)\cdot V & = & (-1)\cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(v\big) \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((-1)\cdot v\big) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, par bijectivité de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$, on en conclut $f(v) = (-1)\cdot v$.

Comme $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit que -1 est une valeur propre de f et que v est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Commentaire

L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{array}{rcl} f & \longleftrightarrow & A \\ f(u) & \longleftrightarrow & A \times U \\ f(v) & \longleftrightarrow & A \times V \end{array}$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. $\square$

b) Calculer $\mathrm{rg}\left(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$. En déduire $\dim\big(\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)\big)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) & = & \mathrm{rg}(A + I) \qquad \textit{(car } F \textit{ et } I \textit{ sont les représentations matricielles dans la base } \mathscr{B} \textit{ des endomorphismes } f \textit{ et } \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\textit{)} \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ = \ 2 \end{array}$$

La dernière égalité est vérifiée car la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre (constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 2.}$$

- Comme $f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, on a, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\left(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\right) & + & \dim\left(\mathrm{Im}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim\left(E_{-1}(f)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\right) = 3 - 2 = 1.}$$

□

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- On a démontré en question ***1.b)*** : $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 0\}$.
  De plus, on a démontré en questions ***2.a)*** et ***3.a)*** que les réels -1 et 0 sont bien valeurs propres.
  Ainsi : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}.}$$

- Or :

$$\dim\left(E_0(f)\right) + \dim\left(E_{-1}(f)\right) = 1 + 1 = 2 \neq \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

5. On note $w = -e_1 + e_2 + e_3$.

a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $-e_1 + e_2 + e_3 = (-1, 1, 1)$.
- Démontrons que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$. $(*)$

$$\begin{array}{lcl} \text{Or : } (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot (1,1,0) + \lambda_2 \cdot (0,1,1) + \lambda_3 \cdot (-1,1,1) = (0,0,0) \\ & \Longleftrightarrow & (\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right. \\ & & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (u, v, w) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est :
  - × libre.
  - × telle que : $\text{Card}\big(\mathscr{B}'\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

b) Déterminer $f(w)$. On exprimera le résultat dans la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.
Notons $W = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(w)\big) & = & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \\
& = & A \times W \\
& = & A \times (-E_1 + E_2 + E_3) \\
& = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcccl}
\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(w)\big) & = & V - W & = & \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(v\big) - \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(w\big) \\
& & & = & \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(v - w\big) \qquad \textit{(par linéarité de } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par bijectivité de } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot), \text{ on en conclut } f(w) = v - w.}$$

Commentaire

- Pour résoudre la question, on se sert ici une nouvelle fois de la correspondance entre le monde des espaces vectoriels et le monde matriciel.
  Ou peut ajouter la correspondance suivante à celle déjà évoquée :

  $$\text{expression de } f(w) \text{ dans } (u, v, w) \quad \longleftrightarrow \quad \text{expression de } AW \text{ dans } (U, V, W)$$

- On a remarqué ici : $AW = V - W$ ce qui nous a permis de conclure sur cette question.
  Il était aussi possible d'obtenir ce résultat par résolution de système linéaire.
  (cf méthode page suivante)

Commentaire

- Plus précisément, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(w) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$. Il s'agit une nouvelle fois de traduire cette relation dans le monde matriciel. On procède comme suit :

$$\begin{array}{cl}
 & f(w) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w \\
\Longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(w)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\alpha \cdot u \beta \cdot v + \gamma \cdot w\big) \\
\Longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) + \gamma \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \quad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\
\Longleftrightarrow & A\,W = \alpha \cdot U + \beta \cdot W + \gamma \cdot W \\
\Longleftrightarrow & \alpha \cdot U + \beta \cdot W + \gamma \cdot W = A\,W \\
\Longleftrightarrow & \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & - & \gamma & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & - & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & -1 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & - & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & -1 \\ & & & - & \gamma & = & 1 \end{array} \right. \\
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & & & = & 0 \\ & & \beta & & & = & 1 \\ & & & - & \gamma & = & 1 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit : $f(w) = v - w$.

$\square$

c) En déduire la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$. On notera $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Démonstration.
D'après les questions précédentes :

× $f(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$ donc $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $f(v) = 0 \cdot u + (-1) \cdot v + 0 \cdot w$ donc $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $f(w) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + (-1) \cdot w$ donc $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } T = \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Dans la question ***4.***, on a démontré que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.
  Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir, notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérons un espace vectoriel E de dimension finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cet exercice. Ici, f a deux valeurs propres : 0 et -1.
  De plus :
  × le sous-espace propre $E_0(f)$ a pour base la famille (u).
  × le sous-espace propre $E_{-1}(f)$ a pour base la famille (v).

  La famille (u, v) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ car elle est constituée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  On complète alors cette famille en une base de $\mathbb{R}^3$ en lui adjoignant le vecteur w. La matrice représentative de f dans la base (u, v, w) obtenue est triangulaire (supérieure). □

d) En déduire qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $A = P\,T\,P^{-1}$.
On explicitera P et P^{-1}. Que représentent ces deux matrices ?

Démonstration.

- Notons $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Par définition :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)\Big)$$

(la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est obtenue par concaténation des matrices colonnes représentatives des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$)

$$\boxed{\text{Ainsi : } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = P\,T\,P^{-1}.}$$

- Pour déterminer P^{-1}, on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\right.$$

- La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P. *(c'est toujours le cas d'une matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$!)*

- On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2\,L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow -L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Profitons-en pour rappeler que P est inversible, d'inverse : $\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
- Cette égalité peut permettre de déterminer $\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1}$. Remarquons :
  - × $e_1 = (1,0,0) \ = \ 0 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (0,1,1) + (-1) \cdot (-1,1,1)$

    Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(e_1) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.
  - × $e_2 = (0,1,0) \ = \ 1 \cdot (1,1,0) + (-1) \cdot (0,1,1) + 1 \cdot (-1,1,1)$

    Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(e_2) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
  - × $e_3 = (0,0,1) \ = \ (-1) \cdot (1,1,0) + 2 \cdot (0,1,1) + (-1) \cdot (-1,1,1)$

    Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(e_3) = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

  On retrouve ainsi : $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix} = \left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1}$.

□

e) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

▶ **Initialisation** :

- D'une part : $A^0 = I_3$.
- D'autre part : $P\,T^0\,P^{-1} = P\,I_3\,P^{-1} = P\ P^{-1} = I_3$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PT^{n+1}\,P^{-1}$).
Alors :

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A \times P\,T^n\,P^{-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & P\,T\,P^{-1} \times P\,T^n\,P^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ & = & P\,T\left(P^{-1}P\right)T^n\,P^{-1} & \\ & = & P\,T\,I_3\,T^n\,P^{-1} & \\ & = & P\,T\,T^n\,P^{-1} & \\ & = & P\,T^{n+1}\,P^{-1} & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}.}$$

□

6. Dans la suite, on note $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'unique matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $T = D + N$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après l'énoncé, } N \ = \ T - D \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
(ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

$$\boxed{\text{En conclusion : } N^0 = I,\ N^1 = N \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n. Le résultat devra dépendre des matrices D et de N.

Démonstration.

- Les matrices D et N commutent. En effet :

$$D \times N \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ = \ N \times D$$

- Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll} T^n & = & (D+N)^n & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k}\, N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\ & = & \dbinom{n}{0} D^n\, N^0 + \dbinom{n}{1} D^{n-1}\, N^1 & \\ & = & D^n + n\, D^{n-1}\, N & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = D^n + n\, D^{n-1}\, N.}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } T^0 = I_3.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \ = \ \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la seconde somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

$\square$

d) En déduire explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice T^n puis la matrice A^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad nD^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1}\, n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1}\, n \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$nD^{n-1}\, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1}\, n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1}\, n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1}\, n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = D^n + n\, D^{n-1}\, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}\, n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} A^n &= P\, T^n\, P^{-1} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.e)}}\textit{)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -n+1 \\ 0 & 1 & -n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ n & -n & n+1 \\ n & -n & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ n & -n & n+1 \\ n & -n & n+1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^0 = I_3.}$$

Commentaire

- Afin de faciliter le calcul de A^n, il est vivement conseillé :
  - × de simplifier au maximum l'écriture de T^n. Ici, il s'agit de mettre en facteur $(-1)^n$.
  - × de commencer par le calcul de $P\,T^n$. En effet, dans l'hypothèse où le calcul de P^{-1} s'avérerait faux, commencer par le calcul $T^n\, P^{-1}$ donne un résultat intermédiaire faux, ce qui ne permet pas d'obtenir de point sur la question. En revanche, effectuer d'abord le calcul de $P\,T^n$ peut permettre d'obtenir le point du calcul intermédiaire.
- Il est à noter que les formules donnant T^n et A^n sont fausses pour $n = 0$. On a souligné que l'utilisation de la formule du binôme de Newton n'était autorisée, en question précédente, que sous l'hypothèse $n \geqslant 1$. Il est donc **primordial** de traiter à part le cas $n = 0$.

□