Réduction : exemple 3

Exercice (adapté de EML 2016)

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Calculer A^2.

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

3. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.

b) La matrice A est-elle inversible ?

c) Déterminer les sous-espaces propres de la matrice A.

d) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

e) Quel autre argument peut-on avancer pour démontrer, sans calcul, que A est diagonalisable ?

4. ***a)*** Montrer : $A^3 = 2A$.

b) Commenter le résultat obtenu à la question ***3.a)***.