Réduction : exemple 3

Exercice (adapté de EML 2016)

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Calculer A^2.

Démonstration.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. $(*)$

$$\text{Or :} \quad (*) \iff \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est donc libre.}}$$

□

3. a) Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que A est diagonalisable.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons tout d'abord :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \quad \Leftrightarrow \quad A - \lambda \cdot I \text{ n'est pas inversible}$$

Or, on a :
$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda \cdot I) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 + \lambda L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda^2) L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda + \lambda(1-\lambda^2) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- La réduite obtenue est triangulaire (supérieure). Elle (et donc $A - \lambda I$) est non inversible si et seulement si l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } A &\Leftrightarrow A - \lambda \cdot I \text{ n'est pas inversible} \\
&\Leftrightarrow 1 = 0 \;\; \texttt{OU} \;\; 1 = 0 \;\; \texttt{OU} \;\; \lambda + \lambda(1-\lambda^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\,(2 - \lambda^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda(\sqrt{2} - \lambda)(\sqrt{2} + \lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } -\sqrt{2},\ 0 \text{ et } \sqrt{2}.}$$

La matrice A est une matrice carrée d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.

Commentaire

Généralement, la détermination des valeurs propres se fait en trois étapes :

× on exhibe tout d'abord **un** polynôme annulateur (cet énoncé aurait pu commencer par la question ***4.***),

× on obtient les valeurs propres possibles,

× on détermine alors si elles sont vraiment des valeurs propres.

Il est relativement rare que soit demandé un calcul direct des valeurs propres de la matrice considérée. Pour autant, il faut savoir le faire si le cas se présente.

□

b) La matrice A est-elle inversible ?

Démonstration.
D'après la question précédente, le réel 0 est valeur propre de A.

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ n'est pas inversible.}}$$ □

c) Déterminer les sous-espaces propres de la matrice A.

Démonstration.

- Déterminons une base de $E_{\sqrt{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

  Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{\sqrt{2}}(A) & \iff & \left(A - \sqrt{2}\, I\right) X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow \sqrt{2}\, L_2 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & y & - & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\sqrt{2}\, x & + & y & = & 0 \\ & - & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\sqrt{2}\, x & & & = & -\sqrt{2}\, z \\ & - & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{\sqrt{2}}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \sqrt{2}\, X\} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = \sqrt{2}\, z\} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{2}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_{\sqrt{2}}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est donc une base de } E_{\sqrt{2}}(A).}$$

- Déterminons une base de $E_0(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

  Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_0(A) & \iff & AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & -z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_0(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\
& = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \quad \texttt{ET} \quad y = 0\} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \\
& = & \{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \\
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_0(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_0(A).}$$

- Déterminons une base de $E_{-\sqrt{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

  Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-\sqrt{2}}(A) & \iff & (A + \sqrt{2}\, I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & \sqrt{2}\, y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array}\right. \\[4mm]
& \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\, L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \end{array}\right. \\[4mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & \sqrt{2}\, z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\[4mm]
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} \sqrt{2}\, x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array}\right. \\[4mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcl} \sqrt{2}\, x & = & \sqrt{2}\, z \\ y & = & -\sqrt{2}\, z \end{array}\right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-\sqrt{2}}(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -\sqrt{2}\, X\} \\[2mm]
& = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = -\sqrt{2}\, z\} \\[4mm]
& = & \{\begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} = \{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\[4mm]
& = & \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_{-\sqrt{2}}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{-\sqrt{2}}(A).}$$

☐

d) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)***, la matrice A est diagonalisable. Il existe donc :
  × une matrice P inversible (P est obtenue par concaténation des vecteurs des bases des sous-espaces propres de A),
  × une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, rangées dans le même ordre que les vecteurs propres apparaissant dans P,

  telles que : $A = PDP^{-1}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient donc l'égalité suivante :} \\ A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.\end{array}}$$

☐

e) Quel autre argument peut-on avancer pour démontrer, sans calcul, que A est diagonalisable ?

Démonstration.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.}}$$

☐

4. a) Montrer : $A^3 = 2A$.

Démonstration.

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A$$

$$\boxed{A^3 = 2A}$$

☐

b) Commenter le résultat obtenu à la question ***3.a)***.

Démonstration.
D'après la question précédente, on a : $A^3 - 2A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
On en déduit que le polynôme :

$$Q(X) = X^3 - 2X = X\ (X^2 - 2) = X\ (X-2)\,(X+2)$$

est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) \ \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{racines de } Q\text{, polynôme} \\ \text{annulateur de } A \end{array} \right\} = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$$

On en déduit que $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$ sont des valeurs propres **possibles** de A. C'est en accord avec la question ***3.a)*** où l'on démontre que ces trois réels sont les valeurs propres de A.

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de f puisque :
  $$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que f possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur de f puisque :
  $$R(A) \ = \ (A - 5\, I_n) \circ Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\ Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre de A.

□