

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Exercices classiques, méthodes usuelles

I. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

I.1. Notion de valeur propre et vecteur propre

1) Cas des endomorphismes

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit f un endomorphisme de E .

- L'élément λ est valeur propre de f
- \Leftrightarrow Il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) = \lambda \cdot u$
 - \Leftrightarrow Il existe $u \neq 0_E$ tel que $(f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0_E$
 - \Leftrightarrow Il existe $u \neq 0_E$ tel que $u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$
 - $\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$
 - \Leftrightarrow L'endomorphisme $f - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif
 - \Leftrightarrow L'endomorphisme $f - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijectif *(sous l'hypothèse que l'espace vectoriel E est de dimension finie)*

De manière générale, rappelons que si E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'équivalence injectivité / surjectivité / bijectivité est vérifiée si :

- × les espaces vectoriels E et F sont de dimensions finies.
- × $\dim(E) = \dim(F)$.

2) Cas des matrices carrées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I_n) \times U = 0\} \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$
- $\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$
- \Leftrightarrow La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

3) Lien entre endomorphisme et matrice représentative

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit \mathcal{B} une base de E . Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ est valeur propre de A	donc	$\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$
---	------	-------------------------------

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ	\Leftrightarrow	Le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ
--	-------------------	--

En particulier, dans le cas de la valeur propre 0, on peut écrire :

<p style="text-align: center;">Le réel 0 est une valeur propre de f</p> <p>$\Leftrightarrow \text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$</p> <p>$\Leftrightarrow$ L'endomorphisme f n'est pas injectif</p> <p>\Leftrightarrow L'endomorphisme f n'est pas bijectif</p>	<p><i>(sous l'hypothèse que l'espace vectoriel E est de dimension finie)</i></p>
---	---

I.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que λ est une **valeur propre** de f (respectivement de A).

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ , l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \{u \in E \mid f(u) = \lambda \cdot u\} \\ &= \{u \in E \mid (f - \lambda \text{id})(u) = 0_E\} = \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}) \end{aligned}$$

$E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$.

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ , l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AU = \lambda \cdot U\} \\ &= \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I_n) \times U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n) \end{aligned}$$

$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de dimension $\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$.

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit \mathcal{B} une base de E , espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$$u \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow f(u) = \lambda \cdot u \Leftrightarrow AU = \lambda \cdot U \Leftrightarrow U \in E_\lambda(A)$$



Attention à la confusion : $E_\lambda(f) \neq \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\}$

La bonne définition est : $E_\lambda(f) = \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \cup \{0_E\}$

II. Détermination pratique des éléments propres

II.1. Détermination des valeurs propres : calcul du polynôme caractéristique

II.1.a) Définition et propriétés du polynôme caractéristique

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **polynôme caractéristique** de f , et on note χ_f , le polynôme défini par :

$$\chi_f(X) = \det(X \text{id}_E - f) = (-1)^n \det(f - X \text{id}_E)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de f sa multiplicité en tant que racine de χ_f .
- Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique χ_f . Plus précisément :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f &\Leftrightarrow \det(f - \lambda \cdot \text{id}_E) = 0 \\ &\Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } \chi_f \end{aligned}$$

$$\text{Sp}(f) = \{\text{racines de } \chi_f\}$$

et (**rappel** : si Q est un polynôme annulateur de f , alors :
 $\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\}$)

- Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que le polynôme caractéristique χ_f de f est un polynôme annulateur de f : $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

- Le polynôme χ_f est unitaire de degré n et $\chi_f(X) = X^n - \text{tr}(f) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **polynôme caractéristique** de A , et on note χ_A , le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A) = (-1)^n \det(A - X I_n)$$

- On appelle **multiplicité** d'une valeur propre de A sa multiplicité en tant que racine de χ_A .
- Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique χ_A . Plus précisément :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } \chi_A \end{aligned}$$

$$\text{Sp}(A) = \{\text{racines de } \chi_A\}$$

et (**rappel** : si Q est un polynôme annulateur de A , alors :
 $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\}$)

- Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

- Le polynôme χ_A est unitaire de degré n et $\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$

Lien entre les deux

Si \mathcal{B} est une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors : $\chi_f(X) = \chi_A(X)$

En particulier, le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie.

Par ailleurs : $\text{Sp}(f) = \{\text{racines de } \chi_f\} = \{\text{racines de } \chi_A\} = \text{Sp}(A)$

Remarque

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $\text{Sp}(f) = \{\text{racines de } \chi_f\}$, on peut en conclure :
 - × l'endomorphisme f admet au plus n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.
 - × si n est impair alors f admet au moins une valeur propre réelle.
 - × si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors f admet au moins une valeur propre. On en conclut que χ_f est scindé dans \mathbb{C} .

II.1.b) Propriétés du polynôme caractéristique pour des matrices particulières

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des matrices triangulaires (et a fortiori des matrices diagonales)

$$A \text{ triangulaire} \Rightarrow \chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$$

Ainsi : La matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) \Rightarrow Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux

2) Cas de matrices semblables

- Rappelons que deux matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Autrement dit, M et N sont semblables s'il existe \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) \quad \text{et} \quad N = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$$

On a alors, par la formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) \times P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}$$

- Le point précédent permet de retrouver la définition usuelle de matrices semblables. Les matrices M et N sont semblables s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$M = PNP^{-1}$$

- Les matrices M et N sont semblables \Rightarrow Les matrices M et N ont même polynôme caractéristique ($\chi_M = \chi_N$)

En particulier, deux matrices semblables **ont mêmes valeurs propres**, même trace, même déterminant (et même rang).

II.1.c) Calcul sur un exemple

On considère un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension 3.

On note \mathcal{B} une base de E .

On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- On détermine le polynôme caractéristique de A .

$$\begin{aligned}
 \det(X I_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -1 \\ -2 & X+3 & -2 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & X \\ -2 & X+3 & -2 \\ X-2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (X-2)L_1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & X \\ 0 & X-1 & -2+2X \\ 0 & 2X-2 & -1-(X-2)X \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \times (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} X-1 & 2(X-1) \\ 2(X-1) & -X^2+2X-1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2(X-1) \\ 2 & -(X-1)^2 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) (X-1) (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -(X-1) \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_1}{=} (-1) (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -X-3 \end{vmatrix} \\
 &= \cancel{(-1)} (X-1)^2 \cancel{(X+3)}
 \end{aligned}$$

II.2. Détermination d'un sous-espace propre

II.2.a) Par résolution d'un système linéaire

On reprend l'exemple précédent.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminons $E_1(A)$ ($= \text{Ker}(A - I_3)$).

$$\begin{aligned}
 U \in E_1(A) &\iff (A - I_3) \times U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \{ x = 2y - z \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On en déduit : } E_1(A) &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid U \in E_1(A) \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 2y - z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \text{ ET } z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \text{ ET } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

II.2.b) Par lecture de données sur les matrices considérées

On reprend l'exemple précédent.

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda I_3$.

Illustrons la méthode avec $\lambda = 1$ et la matrice :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire ceux tels que : $(A - I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\
&= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il s'agit alors de trouver des valeurs x, y et z telles que la combinaison linéaire ci-dessus soit nulle.

- × Comme $C_1 = C_3$, en choisissant $y = 0$ et $x = -z$, la combinaison linéaire est bien annulée.

En particulier, en choisissant $x = 1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$$

- × Comme $C_2 = -2 C_1$, en choisissant $z = 0$ et $x = 2y$, la combinaison linéaire est bien annulée.

En particulier, en choisissant $y = 1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(A)$$

Finalement, on a démontré : $E_1(A) \supset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Cette inclusion est en réalité une égalité. En effet, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) &= \dim(\text{Ker}(A - I_3)) + \dim(\text{Im}(A - I_3)) \\
&= \dim(E_1(A)) + \text{rg}(A - I_3)
\end{aligned}$$

||
2

(par un calcul rapide à l'aide de l'algorithme du pivot)

Ainsi : $\dim(E_1(A)) = 3 - 2 = 1$ et l'égalité annoncée est vérifiée.

III. Théorèmes de réduction

III.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

III.1.a) Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable sur \mathbb{K}** s'il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Autrement dit, $f \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable sur \mathbb{K}** s'il existe une base \mathcal{B}' de E et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D$.

2) Cas des matrices carrées

- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonalisable sur \mathbb{K}** si A est semblable à une matrice diagonale.
- Autrement dit, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **diagonalisable sur \mathbb{K}** s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

III.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit \mathcal{B} une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est diagonalisable sur K	\Leftrightarrow	Il existe une base \mathcal{B}' de E formée de vecteurs propres de f
--	-------------------	--

2) Cas des matrices carrées

La matrice carrée A est diagonalisable sur K	\Leftrightarrow	Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A
--	-------------------	---

3) Lien entre les deux

Si \mathcal{B} est une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors :

L'endomorphisme f est diagonalisable sur K	\Leftrightarrow	La matrice carrée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonalisable sur K
--	-------------------	--

III.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

III.2.a) Critères de diagonalisabilité

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f .

- L'endomorphisme f est diagonalisable sur \mathbb{K}
- \Leftrightarrow Il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale
 - \Leftrightarrow Il existe une base \mathcal{B}' de E constituée DE vecteurs propres de f
 - $\Leftrightarrow E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(f)$
 - $\Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}(f))$
 - $\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \chi_f \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \bullet \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \dim(E_{\lambda_i}(f)) = m_{\lambda_i}(f) \end{cases}$
 - \Leftrightarrow L'endomorphisme f admet un polynôme annulateur scindé (dans \mathbb{K}) à racines simples
 - $\Leftrightarrow \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f

2) Cas des matrices carrées

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A .

- La matrice carrée A est diagonalisable sur \mathbb{K}
- \Leftrightarrow La matrice A est semblable à une matrice diagonale
 - \Leftrightarrow Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée DE vecteurs propres de A
 - $\Leftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A)$
 - $\Leftrightarrow \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^r \dim(E_{\lambda_i}(A))$
 - $\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \bullet \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_{\lambda_i}(A) \end{cases}$
 - \Leftrightarrow La matrice A admet un polynôme annulateur scindé (dans \mathbb{K}) à racines simples
 - $\Leftrightarrow \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de A

Remarque

- Rappelons au passage la propriété suivante.

$$\text{Si } \lambda \in \text{Sp}(f) \text{ alors : } \boxed{\lambda \text{ de multiplicité } m \Rightarrow 1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m}$$

$$\text{En particulier : } \boxed{\lambda \text{ racine simple de } \chi_f \Rightarrow \dim(E_\lambda(f)) = 1}$$

- Comme $E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m}(f) \subset E$ alors on a toujours $\sum_{i=1}^m \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leq \dim(E)$.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme / d'une matrice carrée sont toujours en somme directe.
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme f (resp. de A) sont stables par f (resp. A).
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont deux endomorphismes qui commutent alors les sous-espaces propres de f sont stables par g (et ceux de g sont stables par f).
- Rappelons que la stabilité par f d'un espace F influe sur la matrice représentative de F .
Considérons un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E . On note $p = \dim(F)$.
Il existe alors G sous-espace vectoriel de E tel que :

$$E = F \oplus G \quad (*)$$

(si $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$ est une base de F , c'est une famille libre de E qu'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E ; il suffit alors de noter $G = \text{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$ pour conclure)

- × Alors, dans toute base \mathcal{B} de E adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire dans toute base \mathcal{B} obtenue par concaténation d'une base \mathcal{B}_F de F et d'une base \mathcal{B}_G de G), la matrice représentative de f s'écrit sous la forme :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array} \right)$$

où :

- ▶ $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$,
- ▶ $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$,
- ▶ $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

On peut de plus préciser : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f|_F)$.

- × Si on ajoute l'hypothèse que l'espace vectoriel G est lui aussi stable par f , alors, dans toute base \mathcal{B} adaptée à la décomposition (*):

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline (0) & C \end{array} \right)$$

- Cette décomposition permet de démontrer que $\chi_{f|_F}$ divise χ_f dès que F est un sous-espace vectoriel stable par f . En effet :

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \det(X I_n - M) \\ &= \left| \begin{array}{c|c} X I_p - A & -B \\ \hline (0) & X I_{n-p} - C \end{array} \right| \\ &= \det(X I_p - A) \times \det(X I_{n-p} - C) \\ &= \chi_A(X) \times \det(X I_{n-p} - C) \end{aligned}$$

III.2.b) Conditions suffisantes de diagonalisabilité

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes \Rightarrow L'endomorphisme f est diagonalisable sur \mathbb{K}

Le polynôme caractéristique χ_f est scindé (dans \mathbb{K}) à racines simples \Rightarrow L'endomorphisme f est diagonalisable sur \mathbb{K}

2) Cas des matrices carrées

La matrice A admet n valeurs propres distinctes \Rightarrow La matrice A est diagonalisable sur \mathbb{K}

Le polynôme caractéristique χ_A est scindé (dans \mathbb{K}) à racines simples \Rightarrow La matrice A est diagonalisable sur \mathbb{K}

Remarque

En réalité, ces deux résultats sont les mêmes. En effet :

L'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes \Leftrightarrow Le polynôme χ_f est scindé à racines simples

III.2.c) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est diagonalisable sur \mathbb{K}
L'endomorphisme f n'admet qu'une seule valeur propre λ $\} \Leftrightarrow f = \lambda \text{id}_E$

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est diagonalisable sur \mathbb{K}
La matrice A n'admet qu'une seule valeur propre λ $\} \Leftrightarrow A = \lambda I_n$

III.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques RÉELLES

Exercice

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 (par exemple $E = \mathbb{R}^3$). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Si $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice A est triangulaire supérieure.
Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi : $\text{Sp}(A) = \{7\}$.
- On procède par l'absurde. Supposons que f est diagonalisable.
Alors A est diagonalisable. Il existe donc :
 - × $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale,
 - × $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible,
 telles que : $A = PDP^{-1}$.

De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A .

(comme D est semblable à A , alors : $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(A)$; et comme D est diagonale, les valeurs propres de D sont ses coefficients diagonaux)

On en déduit :

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 I_3$$

Et :

$$A = PDP^{-1} = P(7 I_3)P^{-1} = 7 PP^{-1} = 7 I_3$$

Absurde ! Ainsi, f n'est PAS diagonalisable. □

III.4. Caractère diagonalisable des matrices symétriques RÉELLES

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- La matrice A est dite **symétrique** si ${}^t A = A$.
- Autrement dit, A est **symétrique** si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = a_{j,i}$.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème spectral

1) Cas des endomorphismes

Il existe une base dans laquelle la matrice représentative de f est symétrique RÉELLE \Rightarrow L'endomorphisme f est orthodiagonalisable sur \mathbb{R}

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est symétrique RÉELLE \Rightarrow La matrice A est orthodiagonalisable sur \mathbb{R}

IV. Trigonalisation des endomorphismes et des matrices carrées

IV.1. Définition

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est **trigonalisable sur \mathbb{K}** s'il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice représentative de f est triangulaire.
- Autrement dit, $f \in \mathcal{L}(E)$ est **trigonalisable sur \mathbb{K}** s'il existe une base \mathcal{B}' de E et une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T$.

2) Cas des matrices carrées

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **trigonalisable sur \mathbb{K}** s'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire telles que : $A = PTP^{-1}$.

3) Lien entre les deux

Si \mathcal{B} est une base de E alors :

L'endomorphisme f est trigonalisable sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow$ La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est trigonalisable sur \mathbb{K}

IV.2. Caractérisation de la trigonalisabilité

IV.2.a) Trigonalisabilité des matrices complexes

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est trigonalisable sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow$ Le polynôme χ_f est scindé dans \mathbb{K}

Comme tout polynôme (notamment χ_f) est scindé dans \mathbb{C} :

Tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel est trigonalisable sur \mathbb{C}

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow$ Le polynôme χ_A est scindé sur \mathbb{K}

Comme tout polynôme (notamment χ_A) est scindé sur \mathbb{C} :

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur \mathbb{C}

Remarque

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes et est donc trigonalisable sur \mathbb{C} . Ainsi, il existe :

× $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$,

× $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire,

telles que : $A = PTP^{-1}$.

IV.2.b) Expression du déterminant / de la trace en fonction des valeurs propres complexes

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Cas des endomorphismes

L'endomorphisme f est trigonalisable sur \mathbb{K} \Rightarrow La somme des valeurs propres de f , comptées avec leurs multiplicités, vaut $\text{tr}(f)$

L'endomorphisme f est trigonalisable sur \mathbb{K} \Rightarrow Le produit des valeurs propres de f , comptées avec leurs multiplicités, vaut $\det(f)$

En particulier, comme tout endomorphisme de E est trigonalisable sur \mathbb{C} :

$$\text{tr}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_{\lambda}(f) \times \lambda \quad \text{et} \quad \det(f) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_{\lambda}(f)}$$

2) Cas des matrices carrées

La matrice A est trigonalisable sur \mathbb{K} \Rightarrow La somme des valeurs propres de A , comptées avec leurs multiplicités, vaut $\text{tr}(A)$

La matrice A est trigonalisable sur \mathbb{K} \Rightarrow Le produit des valeurs propres de A , comptées avec leurs multiplicités, vaut $\det(A)$

En particulier, comme toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur \mathbb{C} :

$$\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} m_{\lambda}(A) \times \lambda \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(f)} \lambda^{m_{\lambda}(A)}$$

Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\text{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ où les λ_k sont les valeurs propres de M , comptées avec leur multiplicité.

Démonstration.

- Le polynôme χ_M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il est donc scindé.
On en déduit que la matrice M est trigonalisable sur \mathbb{C} . Ainsi, il existe :
 - × $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$,
 - × $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire et dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres **complexes** de M , telles que : $M = P T P^{-1}$.
- On en déduit : $M^2 = (P T P^{-1})^2 = (P T P^{-1}) \times (P T P^{-1}) = P T^2 P^{-1}$.
Finalement : $\text{tr}(M^2) = \text{tr}(P T^2 P^{-1}) = \text{tr}(T^2) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \lambda^2$. □

Compétences sur le chapitre applications linéaires

Les compétences attendues sur le chapitre applications linéaires sont les suivantes :

- savoir démontrer qu’une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire.
- savoir démontrer qu’une application $f : E \rightarrow E$ est un endomorphisme (ne pas oublier de démontrer que f est à valeurs dans E).
- savoir déterminer le noyau d’une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- savoir déterminer l’image d’une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (notamment si E est de dimension finie). Si E est de dimension finie, savoir déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ (resp. $\text{Im}(f)$) par application du théorème du rang (si E est de dimension finie!) en connaissant la dimension de $\text{Im}(f)$ (resp. $\text{Ker}(f)$).
- savoir démontrer qu’une application $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme / automorphisme dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension.
- savoir appliquer les schémas de démonstration (démontrer une implication, une équivalence, une inclusion d’ensembles, une égalité d’ensembles ...).
 \hookrightarrow la plupart des exercices théoriques de ce chapitre ne sont que des mises en place de ces schémas de démonstration. Ainsi, rien ne peut légitimer ne pas savoir commencer une démonstration d’un exercice théorique.
Typiquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$, savoir démontrer : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- savoir déterminer la matrice colonne associée à un vecteur $x \in E$ dans une base \mathcal{B} de E .
- savoir déterminer la matrice de passage d’une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' et connaître :
 - × la formule de changement de base pour les vecteurs (« $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$ »).
 - × la formule de changement de base pour les endomorphismes (« $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ »).
- savoir déterminer la matrice de passage d’une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' et connaître / savoir appliquer la formule de changement de base (« $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X'$ »).
- savoir déterminer la matrice A représentative d’une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans des bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F . Il faut alors savoir déduire des propriétés de A celles de f .
($\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$ et f bijective $\Leftrightarrow A$ inversible)
- savoir déterminer le rang d’une matrice (respectivement le rang d’un endomorphisme) par application du pivot de Gauss.
- savoir déterminer le déterminant d’une matrice (respectivement le déterminant d’un endomorphisme) par opérations élémentaires sur les lignes / colonnes d’une matrice.

L’esprit du chapitre est que si E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ n’est, **à isomorphisme près**, qu’une matrice. Il est donc essentiel de savoir distinguer ces deux mondes (par exemple, si $E = \mathbb{R}_2[X]$, alors $E \not\cong \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$) tout en sachant utiliser les passerelles permettant le passage de l’un à l’autre. Il faut particulièrement veiller à ne pas commettre de confusions d’objets (elles seront lourdement sanctionnées).

Compétences sur le chapitre réduction

Les compétences attendues sur le chapitre réduction sont les suivantes :

- savoir déterminer les itérées d'une matrice diagonale. Savoir déterminer les itérées d'une matrice semblable à une matrice diagonale.
- savoir **déterminer** les valeurs propres d'une matrice par calcul du polynôme caractéristique.
- savoir **vérifier** qu'un réel est valeur propre d'un endomorphisme f .
- savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base \mathcal{B} .
- savoir ce que signifie que 0 est (respectivement N'est PAS) valeur propre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme donné par sa matrice représentative dans une base \mathcal{B} .

En particulier, il faut être à l'aise sur la détermination d'un sous-espace propre « par lecture matricielle ».

- savoir déterminer un polynôme annulateur à l'aide d'un calcul donné par l'énoncé (« Calculer $A^2 - 2A$. Que peut-on en conclure ? »).
- savoir déduire d'une propriété de l'énoncé un polynôme annulateur (« On considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminer un polynôme annulateur de f »).
- savoir démontrer qu'une matrice est inversible / non inversible connaissant un polynôme annulateur :
 - × si $A^2 + 2A - 3I = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ alors $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$.
 - × si $A^2 + 2A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ alors, si A était inversible, on aurait : $A + 2I = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
(dans une démonstration par l'absurde, si on suppose A inversible, on pense systématiquement à introduire A^{-1} et à multiplier les égalités matricielles par A^{-1})
- savoir que les racines du polynôme caractéristique de f sont les valeurs propres de f .
- savoir que les racines d'un polynôme annulateur de f sont les valeurs propres POSSIBLES de f .
- savoir démontrer qu'une valeur propre possible est une valeur propre (on renvoie à l'item « savoir vérifier qu'un réel est une valeur propre »).
- savoir démontrer par l'absurde qu'un endomorphisme f n'ayant qu'une valeur propre N'est PAS diagonalisable.
- savoir que si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et que $f \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes (ce qui revient à dire que χ_f est scindé à racines simples), alors f est diagonalisable.
- savoir déterminer les sous-espaces propres d'un endomorphisme f .
- savoir démontrer que f est diagonalisable à l'aide d'une des caractérisations de la diagonalisabilité.
- savoir démontrer que f est trigonalisable.
- savoir que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables.