Modes de convergence d'une série de fonctions

Méthodes usuelles

I. Notion de série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On appelle **série de terme général** f_n et on note $\sum f_n$ la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

- La suite de fonctions (S_n) est appelée **suite des sommes partielles** associée à la série de fonctions $\sum f_n$. Le terme général S_n de la suite de fonctions (S_n) est appelé **somme partielle d'ordre** n associée à la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque
Une série de fonctions est une suite de fonctions particulière (une suite de sommes partielles de fonctions). Comme on va le voir, les notions de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$ (convergence simple et convergence uniforme) se définissent tout naturellement comme la convergence de la suite $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$, suite des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$.

II. Convergence simple d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
- La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est alors appelée somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

  On la note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

La série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction S

$\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente (de somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x_0)$)

Remarque
Dans la première partie sur les suites, on précisait systématiquement que la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) se faisait sur un intervalle I vers une fonction f. Dans le cas d'une série de fonctions $\sum f_n$, si la convergence a lieu, la limite simple est la fonction : $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

III. Convergence uniforme d'une série de fonctions

III.1. Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- En appliquant la définition de convergence uniforme à la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)$, on obtient :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \text{ Il existe un rang } n_0 \text{ tel que, pour tout } n \geqslant n_0, \text{ la fonction } S_n - S \text{ est bornée} \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \left\| S - S_n \right\|_{\infty,I} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \bullet \text{ Il existe un rang } n_0 \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0, \text{ la fonction } R_n \text{ est bornée} \\ \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} \left\| R_n \right\|_{\infty,I} = 0 \end{cases}$$

(où l'on a noté, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$)

$\Leftrightarrow$ La suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle

Remarque
Dans le chapitre sur les séries numériques, on établit :

× une condition nécessaire de convergence.

× une caractérisation de la convergence dans le cas d'une série télescopique.

On peut aussi établir ce genre de résultats dans le cas d'une série de fonctions.

- Une condition nécessaire de convergence uniforme

  Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n = R_{n-1} - R_n$. Notons $h : x \mapsto 0$.
  Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle $h : x \mapsto 0$. Il en est de même de la suite $(R_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$. On en déduit alors, par stabilité par combinaison linéaire de la convergence uniforme des suites de fonctions, que la suite (f_n) converge vers la fonction $h - h = 0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{K})}$. On retiendra :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I	$\Rightarrow$	La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle

III.2. La convergence uniforme implique la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$ une fonction.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I $\Rightarrow$ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I

La réciproque est fausse en général.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I $\cancel{\Rightarrow}$ La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

III.3. Critère spécial des séries alternées : cas des séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles.

1. Énoncé du critère spécial des séries alternées

- Pour tout $x_0 \in I$, la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est une série alternée *(s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n\, a_n(x_0)$ où $\left(a_n(x_0)\right)$ est une suite numérique de signe constant)*
- Pour tout $x_0 \in I$, $\left(\,|\,f_n(x_0)\,|\,\right)$ est décroissante,
- $\forall x_0 \in I,\ |\,f_n(x_0)\,| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

$\Rightarrow$ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I

2. De plus, si la série de fonctions $\sum f_n$ est une série vérifiant les critères ci-dessus, alors :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in I,\ \ R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_{n+1}(x)$.

($R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série numérique $\sum f_n(x)$)

b) $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N},\ |\,R_n(x)\,| \ = \ |\,S(x) - S_n(x)\,| \ = \ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \ \leqslant \ |\,f_{n+1}(x)\,|.$

Remarque

- Les fonctions considérées dans ce théorème sont à valeurs réelles. Cette hypothèse est nécessaire afin de pouvoir parler de série alternée : on ne peut parler de signe d'un nombre complexe !
- Le point ***2.b)*** stipule : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in I,\ \ |\,R_n(x)\,| \ \leqslant \ |\,f_{n+1}(x)\,|$.
- Les propriétés ***2.a)*** et ***2.b)*** sont vérifiées pour $n = 0$ et « $n = -1$ ». Plus précisément, pour tout $x \in I$:

  Le réel $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_1(x)$ et $\left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right| \ \leqslant \ |\,f_1(x)\,|$

  On peut aussi démontrer :

  Le réel $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est du signe de $f_0(x)$ et $\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right| \ \leqslant \ |\,f_0(x)\,|$

- Cette dernière remarque peut être intéressante pour l'étude d'une série de fonction de la forme $\sum f_k{}'$.
Pour peu que cette série vérifie les conditions d'application du critère spécial des séries alternées, on peut alors conclure que, pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k{}'(x)$ est du signe de $f_0{}'(x)$.
Connaissant le signe de la dérivée de la fonction S, on peut alors déterminer la monotonie de S !

IV. Convergence normale d'une série de fonctions

IV.1. Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur I.

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente.

IV.2. La convergence normale implique la convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I	$\Rightarrow$	La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

Remarque

- Ce théorème stipule que la convergence normale est plus exigeante que la convergence uniforme.
- Cependant, établir la convergence normale est généralement plus simple, **en terme de manipulation**, qu'établir la convergence uniforme. Plus précisément :
  - × dans le cas d'une série de fonctions qui vérifie le critère spécial des séries alternées, l'hypothèse de convergence uniforme est généralement aisée à obtenir grâce à la propriété ***2.b)***.
  - × dans tous les autres cas, on tentera avant tout d'établir la convergence normale (ce qui démontrera la convergence uniforme).
- La réciproque est fausse en général. Autrement dit, il existe des séries de fonctions $\sum f_n$ telles que :
  - × la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I,
  - × la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I.

V. Un mode de convergence plus faible qui s'avère utile

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I.

Alors, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Remarque

- Évidemment, si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I, alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge aussi uniformément sur tout segment de I.
- Évidemment, la convergence normale sur tout segment de I est implique aussi la convergence uniforme sur tout segment de I.

VI. Théorème d'interversion de symboles

VI.1. Interversion des symboles $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\lim_{x \to x_0}$ (la continuité est transmise par convergence uniforme)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n continue sur I
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur `TOUT SEGMENT` de I

$\Rightarrow$ La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I

Remarque

- Ce théorème doit être compris comme une machine à intervertir les symboles $\lim_{x \to x_0}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$.
  En effet, pour tout $x_0 \in I$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) &= \lim_{x \to x_0} S(x) \\
&= S(x_0) && \textit{(car } S \textit{ est continue en } x_0 \in I\textit{)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) && \textit{(car } f_n \textit{ est continue en } x_0 \in I\textit{)}
\end{aligned}$$

  Ainsi, on peut conclure : $\boxed{\forall x_0 \in I,\ \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)}$

- Pour les théorèmes de régularité (et seulement les théorèmes de régularité), la convergence uniforme peut être démontrée sur tout segment de l'intervalle I. Il est aisé de s'en convaincre. En effet, pour tout $x_0 \in I$, il est possible de trouver $[a, b] \subset I$ qui contient x_0. L'hypothèse de convergence uniforme sur $[a, b]$ démontre alors la continuité de la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $[a, b]$ et donc en particulier en x_0.
- Comme déjà vu, l'hypothèse de convergence uniforme est généralement démontré par convergence normale (sauf si la série de fonctions vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées).

VI.2. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to\alpha}$ (théorème de la double limite)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

On note $I = |\,\alpha, \beta\,|$ où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons :

× il existe une suite $(\ell_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x) = \ell_n$.

× la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et :

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to\alpha} f_n(x) \right)}$$

Remarque

- On est ici dans un cadre différent du théorème précédent : on ne démontre pas la continuité de la fonction $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ en un point x_0 de l'intervalle I mais l'existence d'une limite finie en une borne non incluse dans I (éventuellement en $-\infty$ ou en $+\infty$ si ces valeurs sont des bornes de I).
- Cela n'a pas de sens de démontrer de la convegence sur tout segment de l'intervalle I si l'on souhaite obtenir un résultat à proximité d'une borne. Typiquement, si $\alpha = -\infty$, la convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$ ne fournit évidemment pas d'information sur le comportement de S en $-\infty$.

VI.3. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_a^b$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons que :

× Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$,

× la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ dt \right)\ dt}$$

Remarque

- Dans ce résultat, les intégrales considérées sont des intégrales de fonctions continues sur un `SEGMENT`. Ce résultat ne peut en aucun cas être utilisé lors de l'étude d'intégrales impropres en (au moins) l'une des bornes.
- Dans le chapitre sur les intégrales à paramètre, on a vu un autre résultat permettant d'intervertir les symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int$. Il s'agit du théorème d'intégration terme à terme :

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
>
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
>
> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.
>
> ***(i)*** Existence d'une limite finie - étude « en n »
>
> ▸ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
> ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$)
>
> ▸ La fonction S est continue par morceaux sur I.
>
> ***(ii)*** Intégrabilité - étude « en t »
>
> - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.
>
> ***(iii)*** Hypothèse spécifique
>
> - La série numérique $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t)\, |\ dt$ converge.
>
> Alors :
>
> × la fonction S est intégrable sur I.
>
> × la suite $\left(\displaystyle\int_I S_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie.
>
> De plus :
>
> $$\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)}$$
>
> ou encore :
>
> $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right)\ dt \ = \ \int_I S(t)\ dt \ = \ \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ dt}$$

- La question est alors de savoir quel résultat privilégier pour une telle interversion de symboles :
  × dans le cas d'une intégrale généralisée, il n'y aucune question à se poser car seul le théorème d'intégration terme à terme peut s'appliquer.
  × dans le cas d'une intégrale sur un segment, les deux résultats peuvent être envisagés. Tout dépend alors du contexte.
    ▸ si les questions précédentes ont permis de démontrer de la convergence uniforme, on s'oriente évidemment vers le théorème d'interversion via convergence uniforme.
    ▸ si on a démontré qu'il n'y a pas convergence uniforme, on s'oriente évidemment vers le théorème d'intégration terme à terme.

- En réalité, il existe un autre résultat permettat d'effectuer une telle interversion de symboles. Dans le cas où la série numérique $\sum \int_I |f_n(t)|\, dt$ diverge, on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et on devra alors s'orienter vers le théorème de convergence dominée appliqué à la suite (S_n) des sommes partielles associée à la série de fonctions $\sum f_n$. Rappelons ce résultat.

Théorème de convergence dominée appliqué à (S_n)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$.

(i) $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } n \text{ »}}$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = S(t)$).
- La fonction S est continue par morceaux sur I.

(ii) $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.
- Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |S_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors :

× la fonction S est intégrable sur I.

× la suite $\left(\int_I S_n(t)\, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_I S_n(t)\, dt &= \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t)\right) dt \\ &= \int_I S(t)\, dt \\ &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt \end{aligned}}$$

ou encore : $\boxed{\int_I \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\, dt\right)}$

Ce résultat est celui qui possède les hypothèses les plus faibles et a donc le plus de chance de fonctionner. Mais encore une fois, le contexte peut nous amener à nous orienter vers un des deux autres théorèmes.

VI.4. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et dérivée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons :

a) Caractère $\mathscr{C}^1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

b) Convergences successives

(0) La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I

(1) La série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur `TOUT SEGMENT` de I.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}'}$$

VI.5. Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et dérivée $k^{\text{ème}}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons :

(i) Caractère $\mathscr{C}^k$

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I

(ii) Convergences successives

(0) La série de fonctions $\sum {f_n}^{(0)}$ converge simplement sur I

(...) ...

(k-1) La série de fonctions $\sum f_n^{(k-1)}$ converge simplement sur I

(k) La série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ **converge uniformément** sur `TOUT SEGMENT` de I.

Alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!], \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} {f_n}^{(j)}}$$

Remarque

- Comme déjà précisé, pour ces théorèmes de régularité sur l'intervalle I, la convergence uniforme peut se démontrer sur tout segment de l'intervalle I.
- Il est conseillé (sauf dans le cas de l'étude d'une série qui vérifie le critère spécial des séries alternées) de démontre la convergence uniforme en démontrant plutôt la convergence normale.

VII. Les bons réflexes pour une étude de série de fonctions

MÉTHODO **Plan d'étude d'une série de fonctions**

Pour étudier une série de fonctions $\sum f_n$ sur I, on procèdera (sauf mention contraire de l'énoncé) dans l'ordre suivant.

1) Convergence simple

Pour démontrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer un élement x_0 de I : « Soit $x_0 \in I$ ».

(ii) on démontre ensuite la convergence de la série numérique $\sum f_n(x_0)$ selon les valeurs de x_0.

La convergence simple est généralement utilisée pour trouver le domaine de définition de la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$. Plus précisément, on cherche pour quelles valeurs de x_0 la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est bien définie.

2) Convergence normale

Pour démontrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche on cherche δ_n tel que :

× $\left|f_n(x)\right| \leqslant u_n$,

× u_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\sum u_n$ est convergente.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\|f_n\|_{\infty,I} \leqslant u_n$.

Le dernier point permet alors de conclure que la série de fonctions $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ est convergente (par théorème de comparaison des séries à termes positifs).

La quantité u_n est un majorant (pas forcément le plus petit) de $\left\{\left|f_n(x)\right| \mid x \in I\right\}$.
Quand on peut s'en passer (c'est-à-dire lorsque la recherche de majorant ne nécessite pas d'étude précise), on ne cherche pas le plus petit des majorants.
Si les techniques de majoration habituelles n'aboutissent pas, on peut chercher la valeur exacte de $\sup\limits_{x\in I}\left(\left|f_n(x)\right|\right)$ (en étudiant les variations de la fonction f_n).

Il est à noter que la convergence normale est une propriété plus forte que la convergence simple et la convergence uniforme (en d'autres termes, la convergence normale implique la convergence simple et la convergence uniforme). En pratique, c'est généralement le mode de convergence dont on se sert dans les exercices.

3) Convergence uniforme (en cas d'échec de la convergence normale).

Pour démontrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I :

(i) on commence toujours par fixer $n \in \mathbb{N}$: « Soit $n \in \mathbb{N}$ ».

(ii) pour tout $x \in I$, on cherche δ_n tel que :

× $\left|\, R_n(x) \,\right| = \left|\, S(x) - S_n(x) \,\right| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \delta_n$

× δ_n **ne fait pas apparaître** x,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$.

Les deux premiers points permettent de conclure : $\|\, R_n \,\|_{\infty,I} \leqslant \delta_n$.

Le dernier point permet alors de conclure que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, ce qui démontre que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Remarque
En l'absence de convergence normale sur I (par exemple si les fonctions f_n ne sont pas bornées), il est fréquent d'établir la convergence normale sur certaines parties de I, ce qui suffit pour les théorèmes d'interversion. La forme de ces parties dépend de l'exercice considéré (cela peut être des intervalles du type $[a, 1]$, $[0, a]$ ou encore $[a, +\infty[$ ...).

MÉTHODO **Démontrer la non convergence uniforme / normale**

- De manière générale, on peut démontrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément en remarquant qu'une propriété transmise à f par convergence uniforme (généralement interversion de symboles) n'est pas vérifiée. La manière la plus rigoureuse pour le démontrer est de procéder par l'absurde. La rédaction est la suivante :

  On procède par l'absurde.
  On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I
  On peut donc en conclure [...résultat d'interversion ...].
  Or : [...démonstration que l'interversion n'a pas lieu ...]. Absurde !

  Il est relativement fréquent d'avoir à démontrer la non convergence normale (ou la non convergence uniforme) à l'aide du théorème de la double limite en remarquant que celui-ci impose la convergence de la série numérique $\sum \ell_n$. La divergence de cette série permet alors de conclure, par l'absurde, la non convergence normale (ou non convergence uniforme).
- De manière générale, on aura encore à effectuer des majorations / minorations. Pour cela, on se reporte à la méthodologie détaillée dans le programme sur les suites de fonctions.

VIII. Schéma récapitulatif

Séries de fonctions