Séries de fonctions

Exercices classiques

Convergence simple / uniforme / normale

Exercice 1 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur A, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur A.

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur A est uniformément convergente sur A.

Exercice 2 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A	$\Rightarrow$	La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = n\, x^2\, \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{2\,x}{x^2 + n^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. ***a)*** Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[-a, a]$ où $a > 0$.

b) La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x > 0$, $\pi \;\leqslant\; S(x) \;\leqslant\; \pi + \dfrac{2}{x}$.

b) En déduire la limite de S en $+\infty$.

c) La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.

2. Soit a tel que $|a| < 1$.

a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

c) Déterminer un équivalent de S en 0^+.

d) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 5

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^4 x^4}$.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose $0 < a < b$.

a) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

3. Démontrer que la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

4. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.
On pourra s'intéresser à la série numérique $\sum f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2. Démontrer que f est continue sur D.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

4. Démontrer que, pour tout $x \in D$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,dt.$

5. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Interversions de symboles

Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et dérivation : régulartité d'une somme

Exercice 7

On s'intéresse à $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.

3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.

4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$?

Exercice 8 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,\ 1]$.

2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,x\ \arctan(x) - \ln(x^2+1) \ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ 2\,x\ \arctan(x)$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n + n^2\,x^2}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

3. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \ln\left(1+x^2\right) - 2\ \ln(x)\ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ \ln\left(1+x^2\right) - 2\ \ln(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) Déterminer un équivalent de S en 0.

c) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n}\ \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. ***a)*** Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0,a]$ où $a > 0$.

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^2 x + n}$.

1. Pour quels x la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$ est-elle convergente ? On note $S(x)$ sa somme en cas de convergence.

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers l'infini.

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

On considère la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Démontrer que S est définie sur $]-1, +\infty[$.

2. Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $]-1, +\infty[$.

3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

4. ***a)*** Pour tout $x > -1$, exprimer le lien entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

b) En déduire la limite et un équivalent de S en -1.

5. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

6. Démontrer que S est strictement monotone sur $]-1, +\infty[$.

a) Démontrer : $\forall x \in\,]-1, +\infty[,\ \dfrac{-1}{x} \leqslant 2\, S(x) \leqslant \dfrac{-1}{x+1}$.

b) Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$.

On note $S : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de la fonction S.

2. ***a)*** Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et déterminer S' sur cet intervalle.

b) En déduire une expression simple de S.

3. À l'aide du théorème d'intégration terme à terme, démontrer :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-u}\right)\, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

(on peut démontrer : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$)

Interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_I$

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto n^2\, x^n\, (1-x)$.

1. Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0,1]$ vers une fonction à déterminer.

2. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle du type $[0,a]$ où $0 < a < 1$.

3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{n^2}{(n+1)\,(n+2)}$.

b) Comparer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\, dx$.

c) Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 16 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}$.

Exercice 17 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,+\infty[,\ f_n(t) = \dfrac{a_n\, t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

1. **a)** Justifier que la suite (a_n) est bornée.

b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. **a)** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\, \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt$.
En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f_n(t)\right|\, dt$.

b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-t}\right)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 18 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \mapsto t^n \ \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ \ln(t) \ dt$.

2. Prouver que $f : t \mapsto \mathrm{e}^t \ \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ \ln(t) \ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ n!}$.
Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Exercice 19

1. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \ dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} \ dt \ = \ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 20

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1} \ dt$.

2. Sachant : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \ dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer : $I = \displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 21

Justifier l'existence et montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{1+x^2} \ dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 22

On étudie dans cet exercice deux cas où on ne peut directement appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la suite (f_n) et où il faut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (S_n).

1. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n \ t^{n+a}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t) \ dt \right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)

2. Soit $a > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n \ t^{a\,n}$.
On souhaite démontrer :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t) \ dt \right)$$

a) Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

b) Conclure.
(on pourra appliquer le théorème de convergence dominée convenablement)