Suites de fonctions

Exercices classiques

Convergence simple / uniforme

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin\left(n\,x\,\mathrm{e}^{-nx}\right)$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a,1]$ si $0 < a < 1$.

3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2

On considère la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^n}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

2. Soit $a > 0$. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

3. On souhaite maintenant démontrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

   a) En considérant une suite (x_n) (de limite nulle) convenablement choisie, répondre à la question.

   b) Répondre de nouveau à la question en exploitant une propriété de la fonction f.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

2. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers f.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \left(3x^2 - 2x^3\right)^n$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} n^2\,x & \textit{si } |x| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \textit{sinon} \end{cases}$.

1. *a)* Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

   b) Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle du type $[0,a]$ où $0 < a < 1$.

   c) Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

2. *a)* Démontrer que la suite (g_n) converge simplement sur $I = \mathbb{R}$ vers une fonction g à déterminer.

   b) La suite (g_n) converge-t-elle uniformément vers g sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto n^2\, x^n\ (1-x)$.

1. ***a)*** Démontrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0,1]$ vers une fonction à déterminer.

b) Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle du type $[0,a]$ où $0 < a < 1$.

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

2. **Généralisation**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n : x \mapsto n^\alpha\, x^n\ (1-x)$ où $\alpha \geqslant 0$.

a) Démontrer que la suite (g_n) converge simplement sur $I = [0,1]$ vers une fonction à déterminer.

b) Déterminer précisément $\|g_n - g\|_{\infty,I}$.

c) En déduire : (g_n) converge uniformément sur I vers $g \iff \alpha < 1$.

Exercice 6

On pose, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \,]0,1]$, $f_n(x) = n\, x^n\ \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

On note ensuite $g = f - f_n$.

2. Étudier les variations de g.

3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

4. Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \geqslant a$ pour tout $n \geqslant n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 7 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.

On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur A.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(n\,x)}{1 + n^2\,x^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit A un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de A dans $\mathbb{C}$.

Donner la définition de convergence uniforme sur A de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\ \mathrm{e}^{-n\,x^2} \cos\big(\sqrt{n}\,x\big)$.

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Interversion de symboles

Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to x_0}$

Exercice 9 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1], g_n(x)=x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Interversion des symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_I$

Exercice 10 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2\,x^2}$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

2. Soit $a\in\,]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 11

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $f_n : x\mapsto \begin{cases} n^2\,x & \text{si } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ -n^2\,x+2n & \text{si } x\in\,]\frac{1}{n},\frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x\in\,]\frac{2}{n},1] \end{cases}$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

3. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt=\int_0^1\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 12 *(d'après* `oraux CCINP 2022 - MP`*)*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note : $f_n : x\mapsto (x^2+1)\,\dfrac{n\,\mathrm{e}^{x}+x\,\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Exercice 13

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x\left(1-\dfrac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)$ si $0\leqslant x\leqslant n$ et $f_n(x)=0$ si $x>n$.

1. Déterminer la limite simple de (f_n). Y a-t-il convergence uniforme ?

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

Exercice 14

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{n}\right)}{x\left(\operatorname{ch}(x)\right)^2}\, dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Déterminer la limite de (I_n), puis de (nI_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n \; : \; \begin{array}{ccc} t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) & \text{si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)\, dt$.

3. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = -\gamma$.

Indications : procéder au changement de variable $x = 1 - \dfrac{t}{n}$, puis faire une IPP.