# Oraux - HEC

## Sujet E 88

**Exercice avec préparation 1**
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

*1.* Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
Dans tout l'exercice, $X$ désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

*2.* ***a)*** On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de $X$). Montrer que la loi de $T$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

***b)*** Quelle est la loi de $T + 1$ ? En déduire l'espérance et la variance de $T$.

*3.* On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que $Z$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $Z$.

*4.* Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**Exercice sans préparation 1**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^4 = f^2$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$. Montrer que le spectre de $f$ est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.