

CH IV : Ensembles et applications

Généralités sur les applications

I. Notion d'application

I.1. Définition et vocabulaire

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Une **application** f de E dans F (notée $f : E \rightarrow F$) est un procédé permettant d'associer à chaque élément x de l'ensemble E , un et un seul élément y de l'ensemble F .

- Soit $x \in E$. L'élément $y \in F$ associé à x par f est appelé l'**image** de x par l'application f et est noté $y = f(x)$.
- L'ensemble E s'appelle l'**ensemble de départ** de l'application.
- L'ensemble F s'appelle l'**ensemble d'arrivée** de l'application.
- Si $y \in F$, deux cas se présentent.
 - × Soit il existe au moins un élément x de E dont y est l'image. On dit dans ce cas que x est un **antécédent** de y par f .
 - × Soit y n'admet pas d'antécédent par l'application f .
- On appelle **image** de f et on note $\text{Im}(f)$, l'ensemble des éléments y de F qui admettent des antécédents par f .

$$\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

- Par définition, on a toujours $\text{Im}(f) \subset F$ mais pas forcément égalité.

- On note $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F .
- Enfin, si $E = F$, l'application qui à chaque x élément de E associe ce même élément x est appelée l'**identité** sur E et se note id_E .

$$\begin{aligned} \text{id}_E &: E \rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



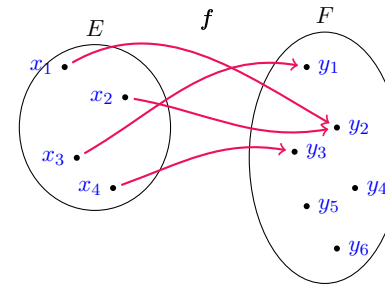
Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Il ne faut pas confondre :

- $\text{Im}(f)$ l'image de l'application f .
(l'ensemble des images : $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$)
- F l'ensemble d'arrivée de l'application f .

Comme déjà précisé : $\text{Im}(f) \subset F$ mais pas forcément $\text{Im}(f) = F$.

Représentation graphique

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$.



Sur ce dessin :

- × $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- × $F = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$
- × $\text{Im}(f) = \{y_1, y_2, y_3\} \subset F$

Il est important de noter que :

- × de tout élément de E part une flèche. C'est le cas car, par définition, l'application f est définie sur E en entier.
- × une flèche ne peut pointer que vers un élément de F . C'est le cas car, par définition, à tout élément de E on associe un seul élément de F .
- × deux flèches différentes peuvent mener au même élément de F (rien ne l'interdit dans la définition).
- × il peut exister des éléments de F qui ne sont pas atteints (rien ne l'interdit dans la définition).

Différence entre application et fonction.

- La définition d'application stipule que tout élément x de E admet une unique image par f , ce qui s'écrit : $\forall x \in E, \exists ! y \in F, y = f(x)$.
(à ne pas confondre avec la notion de bijectivité !)
- Sur le schéma précédent, cela signifie que d'un élément x_i part forcément une flèche mais seulement une.
- Dans la définition de fonction, on relâche cette contrainte en exigeant seulement qu'un élément x de E admet **au plus** une image par f .
D'un élément $x \in E$ peut ne pas partir de flèche, ce qui signifie alors que la fonction f n'est pas définie en x .
- Par exemple, on peut parler de la fonction inverse (notée $f : x \mapsto \frac{1}{x}$) sans préciser son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée et déterminer, dans un second temps, son ensemble de définition.
- Plus précisément, l'objet f suivant :

$$\begin{array}{lcl} f & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

est une fonction mais pas une application puisque f n'est pas définie en 0.
Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Dans le programme officiel, il est précisé que « [L]e programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application ».
- Par ailleurs, il est précisé que l'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E . Cette notation est cohérente (pourquoi?) avec la notation $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui désigne l'ensemble des suites à coefficients réels.

Égalité de deux applications

- Deux applications $f : E_1 \rightarrow F_1$ et $g : E_2 \rightarrow F_2$ sont **égales** si :
 - × elles ont même ensemble de départ : $E_1 = E_2$,
 - × même ensemble d'arrivée $F_1 = F_2$,
 - × et vérifient : $\forall x \in E_1, f(x) = g(x)$.
- Par exemple, les objets f_1 et f_2 suivants :

$$\begin{array}{lcl} f_1 & : & \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ & & x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \quad \begin{array}{lcl} f_2 & : & \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}_-^* \\ & & x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

sont des applications différentes et ce même si elles sont construites à l'aide du même procédé $x \mapsto \frac{1}{x}$.

I.2. Image(s) d'un ensemble par une application

I.2.a) Image directe d'un ensemble par une application

Définition

Soient E et F deux ensembles et soit $A \subset E$.

Soit $f : E \rightarrow F$.

- L'**image (directe)** de l'ensemble A par l'application f , notée $f(A)$, est l'ensemble des images par f des éléments de A . Autrement dit :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$$

Autrement dit, pour tout $A \subset E$ et tout $y \in F$:

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$$

- En particulier, on a :

$$f(E) = \text{Im}(f)$$

Proposition 1.

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soient $A \in \mathcal{P}(E)$, $A_1 \in \mathcal{P}(E)$ et $A_2 \in \mathcal{P}(E)$.

- a) $f(A) \subset F$ $f(E) = \text{Im}(f)$ $f(\emptyset) = \emptyset$
- b) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
- c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- d) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

Démonstration.

c. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Alors il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.

Ceci signifie que $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Deux cas se présentent alors :

- × si $x \in A_1$: alors on a $y = f(x) \in f(A_1)$.
- × si $x \notin A_1$: alors, comme $x \in A_1 \cup A_2$, on a forcément $x \in A_2$.
On en déduit que $y = f(x) \in f(A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

($\supset$) Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Ceci signifie que $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Deux cas se présentent alors :

- × si $y \in f(A_1)$: il existe donc $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.
Or $A_1 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
- × si $y \notin f(A_1)$: alors comme $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, on a forcément $y \in f(A_2)$. Il existe donc $x \in A_2$ tel que $y = f(x)$.
Or $A_2 \subset A_1 \cup A_2$. Ainsi, $x \in A_1 \cup A_2$.
D'où $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

Ainsi, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

d. Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

Alors il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.

- Comme $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, on a : $x \in A_1$ et donc $f(x) \in f(A_1)$.
- De même, $A_1 \cap A_2 \subset A_2$, et donc $f(x) \in f(A_2)$.

On en déduit que $f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

e. Il n'y a pas égalité. Il suffit d'exhiber un contre-exemple pour s'en convaincre.
Par exemple, on prend $A_1 = \mathbb{R}_-$, $A_2 = \mathbb{R}_+$ et $f : x \mapsto |x|$.

On a alors :

- $f(A_1 \cap A_2) = f(\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+) = f(\{0\}) = \{0\}$
- $f(A_1) = f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$ et $f(A_2) = f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

D'où $f(A_1) \cap f(A_2) = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$.

□

Exercice 1

On considère les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \cos(x)$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

- a) $f([0, 3])$ b) $f([-1, 2])$ c) $f(\mathbb{R})$
- d) $f([-5, 1] \cup [2, 4])$ e) $f([-5, -3[\cup [2, 4])$

2. Déterminer les ensembles suivants.

1. $g(\mathbb{R})$ 2. $g([0, \frac{\pi}{2}])$ 3. $g([-\frac{\pi}{4}, 0])$ 4. $g([-1, 2])$
5. $g([-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup [0, \frac{\pi}{2}])$

I.2.b) Image réciproque d'un ensemble par une application

Définition

Soient E et F deux ensembles et soit $B \subset F$.

Soit $f : E \rightarrow F$.

- L'**image réciproque** de l'ensemble B par l'application f , noté $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B . Autrement dit :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Autrement dit, pour tout $B \subset F$, et pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$



Soit $f : E \rightarrow F$ une application

Soient B une partie de F et soit $y \in F$.

Il ne faut pas confondre :

- $f^{-1}(B)$ qui est l'image réciproque de l'ensemble B par l'application f . Par définition, cela désigne un **ensemble** (c'est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B).
- $f^{-1}(y)$ qui est l'image de y par f^{-1} , la bijection réciproque (on y reviendra) de f dans le cas où f est bijective. Par définition, $f^{-1}(y)$ est un **élément** de E .

Il convient donc de remarquer que la même notation est utilisée pour deux objets très différents. C'est le contexte qui permet de déterminer quel est l'objet concerné :

$$f^{-1}(\text{« ensemble de } F \text{ »}) \text{ est un ensemble de } E \quad f^{-1}(\text{« élément de } F \text{ »}) \text{ est un élément de } E$$

Proposition 2.

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soient $B \in \mathcal{P}(F)$, $B_1 \in \mathcal{P}(F)$ et $B_2 \in \mathcal{P}(F)$.

- | | | | |
|----|---|-----------------|---------------------------------|
| a) | $f^{-1}(B) \subset E$ | $f^{-1}(F) = E$ | $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ |
| b) | $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ | | |
| c) | $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ | | |
| d) | $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ | | |

Exercice 2

On considère les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 & \text{et} & x \mapsto \cos(x) \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

- a) $f^{-1}([0, 9])$ b) $f^{-1}([-1, 2])$ c) $f^{-1}(\mathbb{R})$ d) $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$
e) $f^{-1}([-5, 1[\cup]2, 4])$

2. Déterminer les ensembles suivants.

1. $g^{-1}(\mathbb{R})$ 2. $g^{-1}([0, 1])$ 3. $g^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ 4. $g^{-1}([-1, 2])$
5. $g^{-1}([3, 5])$

Remarque

Soit $f : E \rightarrow F$. Supposons que f est bijective, alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$.

Autrement dit, l'image réciproque de B par f est, dans ce cas précis, l'image directe de B par f^{-1} .

II. Restriction

Définition

Soient E et F deux ensembles et A une partie de E .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- La **restriction** de f à A , notée $f|_A$, est l'application de A dans F définie par :

$$\begin{aligned} f|_A &: A \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Autrement dit, on a : $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$

- On a alors : $\text{Im}(f|_A) = f(A)$



Soit $x \in E$ et $A \subset E$.

Il ne faut pas confondre les objets $f(x)$ et $f(A)$ qui sont de nature très différente :

- $\times f(x)$ est un élément de F ,
- $\times f(A)$ est un ensemble (sous-ensemble de F).

III. Composée de deux applications

Définition

Soient E, F, G et H quatre ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

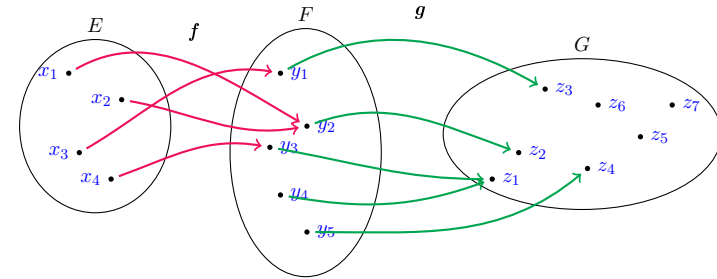
- La **composée** de f par g , notée $g \circ f$, est l'application :

$$g \circ f : \begin{cases} E \rightarrow G \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

- Autrement dit, on a : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Représentation graphique

Soient E, F et G des ensembles et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ des applications.



Remarque

Les ensembles de départ et d'arrivée des applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ ont un rôle crucial pour la bonne définition de $g \circ f$. Plus précisément :

$$g \circ f \text{ est bien définie} \Leftrightarrow f(E) \subset F$$



La loi $\circ$ n'est pas **commutative**.

Ceci signifie que, de manière générale, $f \circ g \neq g \circ f$.

Deux raisons possibles à cela.

- 1) D'après la remarque précédente, $g \circ f$ peut-être définie sans que $f \circ g$ le soit (et inversement).
- 2) Même si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies (c'est par exemple le cas lorsque $E = F = G$), les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont généralement différentes.

Exemple

Considérons les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies. Toutefois :

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) & (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= f(x^2) & &= g(x + 1) \\ &= x^2 + 1 & &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$

Les deux applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différentes. Par exemple :

$$(f \circ g)(2) = 2^2 + 1 = 5 \neq 9 = (2 + 1)^2 = (g \circ f)(2)$$

Exercice 3

On considère les deux applications f et g de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ dans lui-même définies par leurs tables de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

Représenter de la même façon les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.

Les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$ sont données par :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ g(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g \circ f(x)$	6	4	3	8	9	7	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ f(x)$	3	8	5	1	2	7	9	6	4

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ g(x)$	6	4	5	8	9	3	7	1	2

Proposition 3.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

$$\begin{aligned} f \circ \text{id}_E &= f \\ \text{id}_F \circ f &= f \end{aligned}$$

Proposition 4.

Soient E , F , G trois ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

Soit $h : G \rightarrow H$ une application.

On a alors : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(la loi $\circ$ est associative)

Remarque

Avec les notations précédentes, on a :

- $h \circ g : F \rightarrow H$,
 - $g \circ f : E \rightarrow G$,
 - $h \circ g \circ f : E \rightarrow H$.
- (la notation $h \circ g \circ f$ est autorisée du fait de l'associativité de la loi $\circ$)

IV. Caractère injectif, surjectif, bijectif des applications

IV.1. Injectivité

Définition

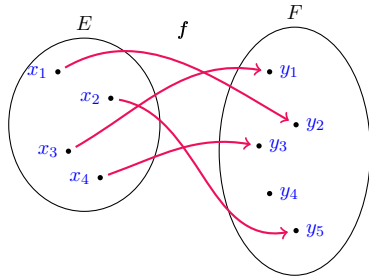
Soient E et F deux ensembles.

- Une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** si tout couple d'éléments distincts de E fournit deux images distinctes par f .

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Représentation graphique

Soient E, F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.



Exemple d'application injective et non injective.

- 1) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto x$ est injective.

En effet, si x_1 et x_2 sont deux éléments de E tels que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$.

- 2) L'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto x^2$ est non injective.

En effet, $-1 \neq 1$ et $g(-1) = 1 = g(1)$.

- 3) En revanche, $g|_{\mathbb{R}_+}$ est bien injective.

Proposition 5.

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Tout élément } y \in F \text{ admet au plus un antécédent par } f$$

Démonstration.

On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde que f est injective et qu'il existe un élément $y \in F$ admettant strictement plus d'un antécédent par f .

Alors il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = y = f(x_2)$.

Ceci contredit l'injectivité de f .

($\Leftarrow$) Supposons que tout élément $y \in F$ admet au plus un antécédent par f .

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Notons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

Alors on a forcément $y_1 \neq y_2$ car sinon y_1 posséderait deux antécédents distincts x_1 et x_2 . $\square$

Démontrer qu'une application est injective

On peut utiliser la définition équivalente, stipulant qu'une application est injective si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Cette définition est l'écriture contraposée de la définition initiale.

(on a même : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$)

Démontrons que $f : E \rightarrow F$ injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$ démonstration

...

Alors $x_1 = x_2$.

On a donc démontré que f est injective.

Proposition 6.

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f : E \rightarrow G \text{ est injective}$$

Autrement dit, la composée de deux applications injectives est injective.

Démonstration.

Supposons f et g injectives et démontrons que $g \circ f : E \rightarrow G$ est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

Autrement dit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Or, comme g est injective, on en déduit que : $f(x_1) = f(x_2)$.

Or, comme f est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi $g \circ f$ est injective.

Proposition 7.

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

$$g \circ f \text{ est injective} \Rightarrow f \text{ injective}$$

Démonstration.

Supposons $g \circ f$ injective et démontrons que $f : E \rightarrow F$ est injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

(égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)

Autrement dit : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

Or, comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi f est injective. □

Proposition 8.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

$$f \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ est injective}$$

Démonstration.

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \neq x_2$.

Quitte à renommer x_1 et x_2 , on peut supposer que : $x_1 > x_2$.

Or, la fonction f est strictement croissante. On a donc : $f(x_1) > f(x_2)$.

Ainsi : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

On en conclut que f est injective. □

IV.2. Surjectivité**Définition**

Soient E et F deux ensembles.

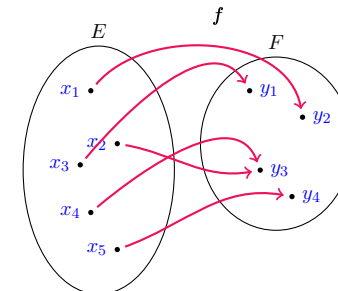
- • Une application f de E dans F est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f .

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

- Autrement dit, f surjective si : $\text{Im}(f) = F$

Représentation graphique

Soient E, F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application surjective.



Exemple d'applications surjectives et non surjectives.

- 1) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ est surjective. En effet, tout élément y de $\mathbb{R}$ est atteint par f puisque $y = f(y)$.
- 2) L'application $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est non surjective. En effet, -1 ne peut s'écrire comme le carré d'un réel (il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 = x^2$).
- 3) En revanche, $h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est bien surjective. En effet, tout $y \in \mathbb{R}_+$ peut s'écrire sous la forme $y = h(\sqrt{y})$. On a bien $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.

Démontrer qu'une application est surjective

La propriété définissant la surjectivité fournit le schéma de rédaction suivant.

Démontrons que $f : E \rightarrow F$ surjective.

Soit $y \in F$.

Exhibons $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

...démonstration...

Alors $y = f(x)$.

On a donc démontré que f est surjective.

Remarque

- L'élément y nommé au début de la démonstration est un élément de l'ensemble F . Le but de la démonstration est de démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ce qui signifie que $y \in \text{Im}(f)$ ($= f(E)$).
- On démontre donc que tout élément $y \in F$ vérifie $y \in \text{Im}(f)$. Autrement dit : $F \subset \text{Im}(f)$.
- Comme on a toujours $\text{Im}(f) \subset F$, on démontre ainsi : $\text{Im}(f) = F$.



On l'a déjà dit : il ne faut pas confondre F et $\text{Im}(f)$.
Ces deux ensembles ne sont égaux que si f est surjective.

Exercice 4 (un grand classique)

Soit E un ensemble.

Démontrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

On pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$ pour une certaine application φ .

Proposition 9.

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f : E \rightarrow G \text{ est surjective}$$

Autrement dit, la composée de deux applications surjectives est surjective.

Démonstration.

Supposons f et g surjectives et démontrons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $y \in G$.

Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$.

Comme $g : F \rightarrow G$ est surjective, il existe $u \in F$ tel que $y = g(u)$.

Comme $f : E \rightarrow F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $u = f(x)$.

On a alors : $y = g(u) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Ainsi $g \circ f$ est surjective. □

Proposition 10.

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

$$g \circ f \text{ est surjective} \Rightarrow g \text{ surjective}$$

Démonstration.

Supposons $g \circ f$ surjective et démontrons que g est surjective.

Soit $y \in G$.

Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$.

Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que $y = g \circ f(u) = g(f(u))$.

Notons $x = f(u)$. Alors $x \in F$ et x vérifie $y = g(x)$.

Ainsi f est surjective.

Proposition 11.

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

$$\text{Alors l'application } \begin{array}{ccc} \tilde{f} & : & E \rightarrow f(E) \\ & & x \mapsto f(x) \end{array} \text{ est surjective.}$$

Démonstration.

Soit $y \in f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Alors, par définition de $f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = \tilde{f}(x)$.

Ainsi $\tilde{f}$ est surjective.

Remarque

- C'est une manière classique de rendre une fonction surjective.
- Cette propriété est notamment utilisé dans le théorème de la bijection.

Plus précisément, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que :

× f est strictement croissante sur $[a, b]$,

× f est continue sur $[a, b]$,

alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $f([a, b])$. En effet :

a) Comme f est strictement croissante, elle est injective.

b) On rend alors cette fonction surjective modifiant son ensemble d'arrivée.

Plus précisément, $f : [a, b] \rightarrow f([a, b])$ est surjective.

- Notez que nous n'avons pas eu besoin dans la démonstration précédente du caractère continue de la fonction f . Dès lors, à quoi sert cette hypothèse ?

□

(i) Si f est continue, alors $f([a, b])$ est l'image d'un intervalle par une fonction continue. C'est donc un intervalle.

(ii) Sous l'hypothèse de continuité de f on a la propriété :

$$f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ strictement monotone}$$

La réciproque étant toujours vérifiée, on obtient une caractérisation des applications strictement monotones. Si f est continue, on a :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ strictement monotone}$$

□

IV.3. Bijectivité

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- On dit que l'application $f : E \rightarrow F$ est **bijective** ou définit une **bijection** de E dans F si f est injective et surjective.
- Ainsi, l'application $f : E \rightarrow F$ est **bijective** si tout élément $y \in F$ admet un et un seul antécédent $x \in E$ par f . Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

Remarque

Si $f : E \rightarrow F$ est une application bijective :

- $\times$ f est une application : donc à tout élément x de E correspond un et un seul élément y de F ,
- $\times$ f est bijective : donc à tout élément y de F est associé un unique élément x de E par f (x est l'antécédent de y par f).

On en conclut qu'il y a « autant » d'éléments dans E que dans F .

Définition

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application **bijective**.

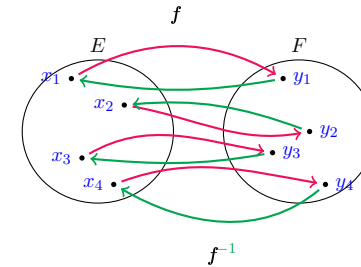
- La (bijection) réciproque associée à f , notée $f^{-1} : F \rightarrow E$, est l'application de F dans E qui, à chaque y de F , associe son unique antécédent x par f .

- On a alors : $\forall x \in E, \forall y \in F, x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$

($f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f)

Représentation graphique

Soient E, F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application bijective.



Exemple d'application bijective et non bijective.

- 1) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ est bijective car elle est à la fois injective et surjective.
- 2) L'application $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ n'est pas bijective. En fait, elle n'est ni injective ni surjective.
- 3) En revanche, $t : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est bien bijective puisqu'elle est à la fois injective et surjective. Tout $y \in \mathbb{R}_+$ s'écrit d'une unique manière comme un carré : $y = (\sqrt{y})^2 = t(y)$.
- 4) Qu'en est-il de $g|_{\mathbb{R}_+}$? de $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$?

Propriétés

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application **bijective**.

- a. L'application réciproque f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$

$$b. 1) \quad \forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$$

$$2) \quad \forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$$

$$3) \quad \forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$$

Proposition 12.

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ des applications.

$$\left. \begin{array}{l} g \circ f = \text{id}_E \\ f \circ g = \text{id}_F \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont bijectives.} \\ \text{De plus : } g = f^{-1} \text{ et } f = g^{-1} \end{array}$$

Démonstration.

- a. On sait que $g \circ f = \text{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E .
Donc $g \circ f$ est bijective. On en déduit que $g \circ f$ est notamment surjective.
Ainsi g est surjective.

De même, $f \circ g = \text{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F .
Donc $f \circ g$ est bijective. On en déduit que $f \circ g$ est notamment injective.
Ainsi g est injective.

On en déduit que g est bijective.

On démontre de la même manière que f est bijective.

- b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f .

Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \text{id}_F(y) = y$.

L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f .

Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.

Ainsi : $\forall y \in F, g(y) = f^{-1}(y)$.

Autrement dit : $g = f^{-1}$.

□

Proposition 13.

Soient E, F et G des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soit $g : F \rightarrow G$ une application.

- Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux bijections, alors la composée $g \circ f : E \rightarrow G$ est une bijection, et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration.

Le caractère associatif de la loi $\circ$ (parenthésage comme bon nous semble) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &= g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= g \circ \text{id}_F \circ g^{-1} &= f^{-1} \circ \text{id}_F \circ f \\ &= (g \circ \text{id}_F) \circ g^{-1} &= (f^{-1} \circ \text{id}_F) \circ f \\ &= g \circ g^{-1} = \text{id}_G &= f^{-1} \circ f = \text{id}_E \end{aligned}$$

D'après la proposition 12, $g \circ f$ est bijective, de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Méthodologie : déterminer la réciproque d'une application

- Par une étude théorique : via la proposition 12.

Exercice 5

Soit $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \text{id}_E$.

Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

- Par calcul : en inversant l'égalité $y = f(x)$

Exercice 6

On considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} \setminus \{-5\} & \rightarrow & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x & \mapsto & \frac{2x-3}{x+5} \end{array}$$

- a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

- b. Répondre aux mêmes questions pour $h : \left. \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array} \right\}$

Exercice 7

Soit $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \text{id}_E$.
Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que :
$$\begin{aligned} (f \circ f) \circ f &= \text{id}_E \\ f \circ (f \circ f) &= \text{id}_E \end{aligned}$$

Par la proposition 12, on en conclut que f est bijective et que $f^{-1} = f \circ f$. $\square$

Exercice 8

On considère l'application :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{-5\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x &\mapsto \frac{2x-3}{x+5} \end{aligned}$$

a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

On souhaite démontrer que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \exists ! x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}, y = g(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. On résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
Pour ce faire, on raisonne par équivalence :

$$y = g(x) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x-3}{x+5} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y(x+5) = 2x-3 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) = -3-5y \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+5y}{2-y} \quad (5)$$

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Notons } x = \frac{3+5y}{2-y}.$$

• Alors $x \neq -5$. En effet, on aurait sinon : $-5 = \frac{3+5y}{2-y}$.

Et donc $-10+5y = 3+5y$ et ainsi $-10 = 3$ ce qui est impossible.

• D'autre part, on a :

$$g(x) = \frac{2x-3}{x+5} = \frac{2 \frac{3+5y}{2-y} - 3}{\frac{3+5y}{2-y} + 5} = \frac{\frac{2(3+5y)-3(2-y)}{2-y}}{\frac{3+5y+5(2-y)}{2-y}} = \frac{13y}{2-y} \times \frac{2-y}{13} = y$$

L'unicité de x est donnée par le raisonnement par équivalence précédent.

Ainsi, $g : \mathbb{R} \setminus \{-5\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est :

$$g^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-5\} \\ x &\mapsto \frac{3+5x}{2-x} \end{cases}$$

b. Répondre aux mêmes questions pour $h : \begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow]-1, 1[\\ x &\mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{cases}$

On souhaite démontrer que :

$$\forall y \in]-1, 1[, \exists ! x \in \mathbb{R}, y = h(x)$$

Soit $y \in]-1, 1[$. On résout l'équation $y = h(x)$ d'inconnue x . Pour ce faire, on raisonne par équivalence :

$$y = h(x) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{1+|x|} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y(1+|x|) = x \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow |x|y - x = -y \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x(\text{sgn}(x)y - 1) = -y \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y}{\text{sgn}(x)y - 1} \quad (6)$$

On a introduit la fonction *signe* qui est définie par :

$$\begin{aligned} \text{sgn} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(en particulier, on a : $\text{sgn}(x) x = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

On remarque enfin que, comme $1 + |x| > 0$, si $y = \frac{x}{1 + |x|}$ alors on a $\text{sgn}(y) = \text{sgn}(x)$.

On en déduit que :

$$y = h(x) \Leftrightarrow x = \frac{-y}{\text{sgn}(y) y - 1} = \frac{-y}{|y| - 1}$$

Soit $y \in]-1, 1[$.

Notons $x = \frac{-y}{|y| - 1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{1 + |x|} = \frac{\frac{-y}{|y| - 1}}{1 + \left| \frac{-y}{|y| - 1} \right|} = \frac{-y}{|y| - 1} \times \frac{1}{1 + \frac{|-y|}{||y| - 1|}} = \frac{-y}{|y| - 1} \times \frac{1}{1 + \frac{|y|}{1 - |y|}} \\ &= \frac{-y}{|y| - 1} \times \frac{1}{\frac{1}{1 - |y|}} = \frac{-y}{-1} = y \end{aligned}$$

($||y| - 1| = 1 - |y|$ car $|y| < 1$)

L'unicité de x est donnée par le raisonnement par équivalence précédent.

Ainsi, $h :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est :

$$h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow &]-1, 1[\\ x & \mapsto & \frac{-x}{|x| - 1} \end{cases}$$