

CH XII : Complexes - Partie II

I. Équations polynomiales

I.1. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition (Racine carrée)

Soit $Z \in \mathbb{C}$.

On dit que z est une *racine carrée* de Z si et seulement si : $z^2 = Z$.



On écrit les mots « racine carrée » mais on s'interdit la notation fonctionnelle ~~$\sqrt{}$~~ ou ~~$\sqrt{}$~~ .

Proposition 1.

Tout nombre complexe **non nul** admet exactement 2 racines carrées opposées dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

Soit $c \in \mathbb{C}^*$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que : $Z = a + ib$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que z est solution de l'équation : $z^2 = c$.

- Alors :

$$(x + iy)^2 = c \quad \text{ET} \quad |(x + iy)^2| = |c|$$

$$\text{donc} \quad x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \quad \text{ET} \quad x^2 + y^2 = |a + ib|$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (*) \quad \text{ET} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- En particulier :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftrightarrow 2L_1 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{cases}$$

On remarque de plus :

$$a^2 \leq a^2 + b^2$$

$$\text{donc} \quad \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}_+)$$

$$\text{d'où} \quad |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

On en déduit :

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad -a + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

On en conclut :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} & \text{ou} & x = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} & \text{ou} & y = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \end{cases}$$

• Or, d'après (*) : $2xy = b$. Trois cas se présentent alors :

× si $b > 0$, alors : $xy > 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \\ \text{ou} \quad (x, y) &= \left(-\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \text{ou} \quad z &= -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \end{aligned}$$

× si $b < 0$, alors, d'après (*) : $xy < 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \\ \text{ou} \quad (x, y) &= \left(-\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ \text{ou} \quad z &= -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \end{aligned}$$

× si $b = 0$, on en déduit : $a \neq 0$ (on rappelle en effet : $c \neq 0$).

Deux nouveaux cas se présentent alors :

- si $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} x &= \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 0^2}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{a + |a|}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{a + a}{2}} & (\text{car } a > 0) \\ &= \pm \sqrt{a} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{-a + |a|}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{-a + a}{2}} & (\text{car } a > 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\sqrt{a}, 0) \\ \text{OU } (x, y) &= (-\sqrt{a}, 0)\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$z = \sqrt{a} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{a}$$

- si $a < 0$, alors :

$$\begin{aligned}x &= \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{a + |a|}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{a - a}{2}} \quad (\text{car } a < 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}y &= \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{-a + |a|}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{-a - a}{2}} \quad (\text{car } a > 0) \\ &= \pm \sqrt{-a} \quad (= \pm \sqrt{|a|})\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}(x, y) &= (0, \sqrt{-a}) \\ \text{OU } (x, y) &= (0, -\sqrt{-a})\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$z = i\sqrt{-a} \quad \text{OU} \quad z = -i\sqrt{-a}$$

($\Leftarrow$) Trois cas se présentent :

× si $b > 0$, alors on note :

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ z_2 &= -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes z_1 et z_2 sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

× si $b < 0$, alors on note :

$$\begin{aligned}z_3 &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ z_4 &= -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes z_3 et z_4 sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

× si $b = 0$, alors deux cas se présentent :

- si $a > 0$, alors on note :

$$z_5 = \sqrt{a}$$

$$z_6 = -\sqrt{a}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes z_5 et z_6 sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

- si $a < 0$, alors on note :

$$z_7 = i\sqrt{a}$$

$$z_8 = -i\sqrt{a}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les complexes z_7 et z_8 sont bien solutions de l'équation $z^2 = c$.

Finalement, l'équation $z^2 = c$ admet toujours exactement 2 solutions complexes. $\square$

Corollaire 1.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

1) Si $a \in]0, +\infty[$, alors :

$$(z^2 = a) \Leftrightarrow (z = \sqrt{a} \text{ OU } z = -\sqrt{a})$$

2) Si $a = 0$, alors :

$$(z^2 = 0) \Leftrightarrow (z = 0)$$

3) Si $a \in]-\infty, 0[$, alors :

$$(z^2 = a) \Leftrightarrow (z = i\sqrt{-a} \text{ OU } z = -i\sqrt{-a})$$

Exercice 1

Résoudre l'équation $z^2 = 1 + 3i$ dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

• Supposons que z est solution de l'équation : $z^2 = 1 + 3i$.

× Alors : $|z^2| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$. Donc :

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = \sqrt{10} \quad (1)$$

× De plus, comme $z^2 = 1 + 3i$, alors :

$$1 + 3i = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on obtient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (2) \\ 2xy = 3 & (*) \end{cases}$$

× D'après (1) et (2), on en déduit :

$$(S) \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{10} \end{cases}$$

Or :

$$(S) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2y^2 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2} \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{10} + 1 \\ 2y^2 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{10} + 1}{2}} \text{ OU } x = -\sqrt{\frac{\sqrt{10} + 1}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{10} - 1}{2}} \text{ OU } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{10} - 1}{2}}$$

× Or, d'après (*) : $xy = \frac{3}{2} > 0$.

On note alors : $z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}}$. Et on obtient :
 $z = z_0$ OU $z = -z_0$

- Les complexes z_0 et $-z_0$ sont donc les seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 1 + 3i$.

Or cette équation complexe admet exactement deux solutions.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 = 1 + 3i$ est :

$$\left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}} \right\} \quad \square$$

1.2. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du 2nd degré à coefficients réels

Proposition 2.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.

On note : $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas se présentent.

1. si $\Delta > 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution réelle :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

3. si $\Delta < 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2}$$

On rappelle que le réel Δ est appelé discriminant du polynôme P où : $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Démonstration.

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

- On commence par mettre l'expression $az^2 + bz + c$ sous forme canonique.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\
 &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)
 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad (\text{car } a \neq 0) \\
 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\
 &\Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (\text{où : } Z = z + \frac{b}{2a})
 \end{aligned}$$

- On souhaite donc résoudre l'équation $Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Comme $\frac{\Delta}{4a^2} \in \mathbb{R}$, on utilise alors le Corollaire 1. Trois cas se présentent :
 × si $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, i.e. $\Delta > 0$ (car $4a^2 > 0$), alors l'équation $Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ possède exactement deux solutions :

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ et } -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

Ainsi les deux seules solutions de l'équation $Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ sont :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } Z_2 = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow Z = Z_1 \text{ OU } Z = Z_2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ OU } z + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ OU } z = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ OU } z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

× si $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$, i.e. $\Delta = 0$ (car $4a^2 \neq 0$), alors l'équation $Z^2 = 0$ possède une unique solution : $Z_0 = 0$.

Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = 0$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

× si $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$, i.e. $\Delta < 0$ (car $4a^2 > 0$), alors l'équation $Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ possède exactement deux solutions :

$$i\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ et } -i\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

Ainsi les deux seules solutions de l'équation $Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ sont :

$$Z_1 = i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } Z_2 = -i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Reprenons la résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow Z^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow Z = Z_1 \text{ OU } Z = Z_2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ OU } z + \frac{b}{2a} = -i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ OU } z = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ OU } z = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement 2 solutions :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

□

Remarque

- Notons que dans le cas $\Delta < 0$, les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$: $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont conjuguées.
- Dans le cas $\Delta = 0$, le réel $z_0 = -\frac{b}{2a}$ est une racine double du polynôme P , où : $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a) 4z^2 + 3z + 1 = 0 \quad b) z^2 - 2z + 5 = 0 \quad c) z^2 + 6z = 0$$

Démonstration.

a) On note Δ le discriminant du polynôme $Q(X) = 4X^2 + 3X + 1$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9 - 16 = -7 < 0$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation vérifie :

$$\left\{ \frac{-3 + i\sqrt{7}}{8}, \frac{-3 - i\sqrt{7}}{8} \right\}$$

b) On note Δ le discriminant du polynôme $Q(X) = X^2 - 2X + 5$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{2 + i\sqrt{16}}{2}, \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} \right\} = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$$

c) $\times$ Méthode 1 : factorisation à vue.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z^2 + 6z = z(z + 6) = (z - 0)(z - (-6))$$

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \{0, -6\}$.

$\times$ Méthode 2 : utilisation de la proposition précédente.

On note Δ le discriminant du polynôme $Q(X) = X^2 + 6$.

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 0 = 36 > 0$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{ \frac{-6 + \sqrt{36}}{2}, \frac{-6 - \sqrt{36}}{2} \right\} = \{0, -6\}$$

□



Il est hors de question de fournir un résultat sous la forme d'une fraction non irréductible. Dans tout exercice, on simplifiera toujours les expressions obtenues au maximum.

Exercice 3

On note P le polynôme défini par : $P(X) = 2X^3 + 8X^2 + 15X + 14$

1) Montrer que -2 est racine de P .

2) Déterminer les réels a , b et c tels que : $P(X) = (X + 2)(aX^2 + bX + c)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2 \cos(\theta)z + 1 = 0$.

II. Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

II.1. Définition et première propriété

Définition (Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe)

Soit $Z \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *racines $n^{\text{ème}}$ de Z* les nombres complexes z tels que : $z^n = Z$.



On écrit les mots « racine $n^{\text{ème}}$ de Z », mais on s'interdit, dans $\mathbb{C}$, la notation fonctionnelle ~~$\sqrt[n]{Z}$~~ ou ~~$Z^{\frac{1}{n}}$~~ .

Proposition 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Tout nombre complexe non nul admet exactement n racines $n^{\text{ème}}$ dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $T \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Z = R e^{iT}$$

(on notera : $|Z| = R$ et $\arg(Z) \equiv T [2\pi]$)

On cherche alors à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = Z$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $z = r e^{i\theta}$.

- Tout d'abord :

$$z^n = Z \Leftrightarrow (r e^{i\theta})^n = R e^{iT} \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = R e^{iT}$$

- Or 2 nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et mêmes arguments modulo 2π . D'où :

$$\begin{aligned} z^n = Z &\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\theta \equiv T [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = T + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{T}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

(notons que le réel $\sqrt[n]{R}$ est bien défini puisque $R \in \mathbb{R}_+^*$)

- Les valeurs possibles pour θ sont en nombre infini, mais, modulo 2π , on en trouve exactement n :

$$\dots, \quad \frac{T}{n} - \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{T}{n}, \quad \frac{T}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{T}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}, \quad \frac{T}{n} + \frac{2n\pi}{n}, \quad \dots$$

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{T}{n} + 2k \frac{\pi}{n} \equiv \frac{T}{n} + 2(k+n) \frac{\pi}{n} [2\pi]$$

Les valeurs distinctes de θ modulo $[2\pi]$ sont donc obtenues en faisant parcourir à k l'intervalle : $\llbracket 0, n-1 \rrbracket = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

- On obtient :

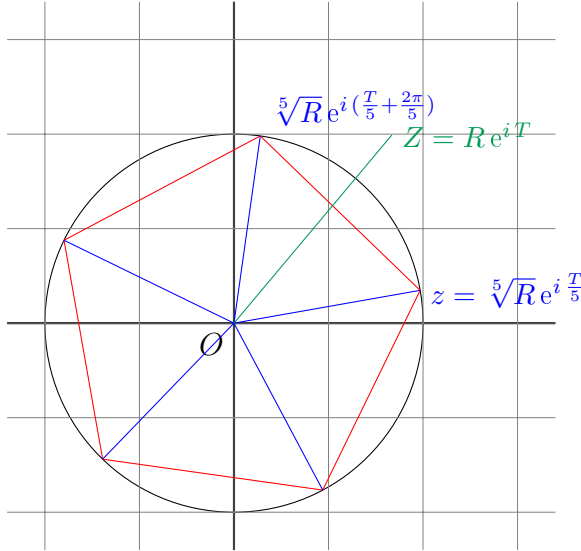
$$\begin{aligned} z^n = Z &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = r = \sqrt[n]{R} \\ \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \arg(z) = \frac{T}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt[n]{R} e^{i(\frac{T}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \\ k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases} \end{aligned}$$

- Le nombre complexe Z admet donc exactement n racines $n^{\text{ème}}$. Plus précisément, il s'agit des éléments de l'ensemble :

$$\{ \sqrt[n]{R} e^{i(\frac{T}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}$$

Remarque

- Notons que l'une des racines $n^{\text{ème}}$ de $Z = R e^{iT}$ est $\sqrt[n]{R} e^{i\frac{T}{n}}$.
Chacune des autres s'obtient à partir de celle-ci en augmentant l'argument de $k \times \frac{2\pi}{n}$.
- Les points images des racines $n^{\text{ème}}$ trouvées sont situées sur un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$.
Chacun s'obtient à partir du précédent par rotation de $\frac{2\pi}{n}$.
Ils forment un polygone régulier à n côtés.



II.2. Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité

Définition (Racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle *racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité* les nombres complexes z tels que :
 $z^n = 1$.
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Proposition 4.

$$\mathbb{U}_n = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}$$

Démonstration.

Il s'agit simplement d'une application de la Proposition 3 à :

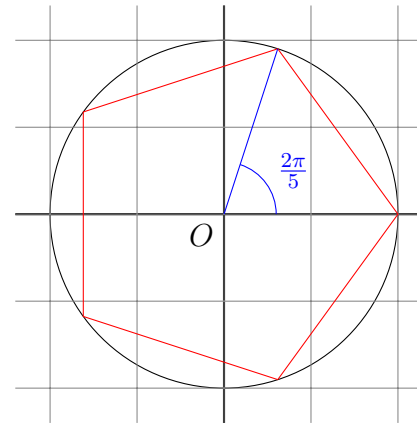
$$Z = 1 = 1 \times e^{i0}$$

□

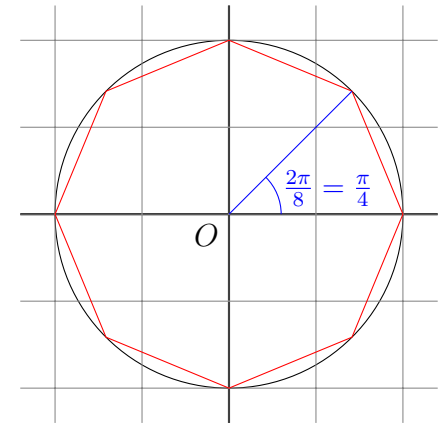
Remarque

Si l'on note : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors :

$$\mathbb{U}_n = \{ \omega^k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}$$



Cas $n = 5$



Cas $n = 8$

Remarque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Notons les propriétés suivantes :

- $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)} = 1$. Ainsi : $\bar{z} \in \mathbb{U}_n$.
Géométriquement, on en déduit que le polygone régulier défini par les images des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est symétrique par rapport à l'axe Ox (l'axe réel).
- si n est pair : $(-z)^n = z^n = 1$. Ainsi : $-z \in \mathbb{U}_n$.
Géométriquement, on en déduit que, **si n est pair**, le polygone régulier défini par les images des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est symétrique par rapport à l'origine.

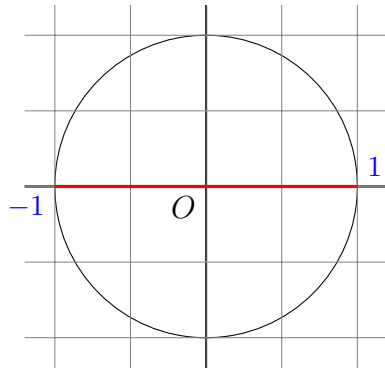
Exemples

- Cas $n = 2$.

× Déterminons $\mathbb{U}_2$. D'après le cours :

$$\mathbb{U}_2 = \{e^{\frac{2ik\pi}{2}} \mid k \in \llbracket 0, 1 \rrbracket\} = \{e^{i0\pi}, e^{i1\pi}\} = \{1, -1\}$$

× Traçons le polygone régulier correspondant.



× Remarquons au passage : $1 + (-1) = 0$.

- Cas $n = 3$.

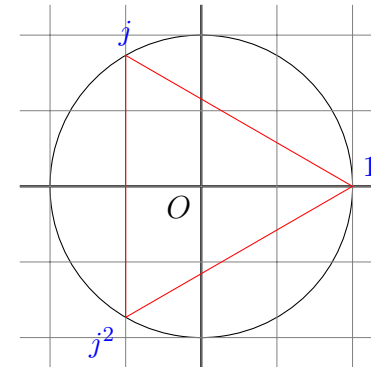
× Déterminons $\mathbb{U}_3$. D'après le cours :

$$\mathbb{U}_3 = \{e^{\frac{2ik\pi}{3}} \mid k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket\} = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$$

On note : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Alors :

$$j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \bar{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

× Traçons le polygone régulier correspondant.



× Remarquons au passage :

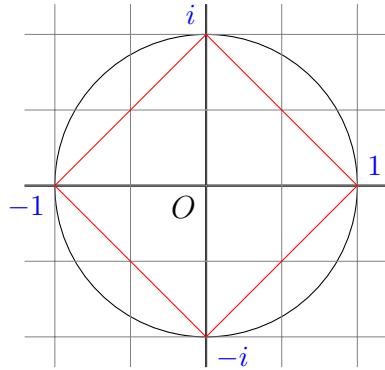
$$1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 1 + 2 \operatorname{Re}(j) = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

- Cas $n = 4$.

- × Déterminons $\mathbb{U}_4$.

$$\mathbb{U}_4 = \{e^{\frac{2ik\pi}{4}} \mid k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket\} = \{1, e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{\frac{3i\pi}{2}}\} = \{1, i, -1, -i\}$$

- × Traçons le polygone régulier correspondant.



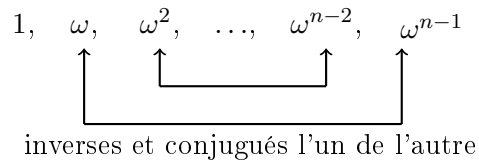
- × Remarquons au passage : $1 + i + (-1) + (-i) = 0$.

Remarque

On peut remarquer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

- $\overline{\omega^k} = \overline{e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}} = \omega^{n-k}$
- $\frac{1}{\omega^k} = \frac{1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = \omega^{n-k}$

On en déduit :



Proposition 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle. Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$$

Démonstration.

On note : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. En particulier $\omega \in \mathbb{U}_n$, donc : $\omega^n = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \\ &= \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} && (\text{car } \omega \neq 1) \\ &= \frac{1 - 1}{1 - \omega} && (\text{car } \omega \in \mathbb{U}_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$

2) $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

3) Compatibilité avec le produit :

$$\forall (z, z') \in (\mathbb{U}_n)^2, \quad z \times z' \in \mathbb{U}_n$$

4) Compatibilité avec l'inverse :

$$\forall z \in \mathbb{U}_n, \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$$

On dit que $\mathbb{U}_n$ est un groupe multiplicatif.

Démonstration.

1) Comme $1^n = 1$, alors : $1 \in \mathbb{U}_n$. Ainsi : $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$.

2) Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors : $z^n = 1$. D'où :

$$(|z|)^n = |z^n| = |1| = 1$$

Or $|z| \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit : $|z| = \sqrt[n]{1} = 1$. D'où : $z \in \mathbb{U}$.

3) Soit $(z, z') \in (\mathbb{U}_n)^2$.

$$\begin{aligned} (z \times z')^n &= z^n \times z'^n \\ &= 1 \times 1 \quad (\text{car } (z, z') \in (\mathbb{U}_n)^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit : $z \times z' \in \mathbb{U}_n$.

4) Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors, d'après 2) : $z \in \mathbb{U}$. D'où $z \neq 0$. Ainsi $\frac{1}{z}$ est bien défini. De plus :

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{car } z \in \mathbb{U}_n)$$

On en déduit : $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$. □

Remarque

Si $Z \in \mathbb{C}^*$ et si z_0 est une racine $n^{\text{ème}}$ de Z , alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = z_0^n \Leftrightarrow \frac{z^n}{z_0^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} z^n = Z &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{aligned}$$

Autrement dit, si on connaît une racine $n^{\text{ème}}$ de Z , alors on les connaît toutes (en multipliant cette racine par $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\omega^2, \dots, \omega^{n-1}$).

Proposition 7.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z = r e^{i\theta}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de z est :

$$\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \}$$

Exercice 5

Déterminer les racines cubiques de $1 + i$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$.

III. Exponentielle complexe

III.1. Définition

Définition (Exponentielle complexe)

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. On pose alors :

$$e^z = \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

- On définit ainsi une application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ appelée *exponentielle complexe*.

Remarque

- L'exponentielle complexe prolonge l'exponentielle réelle (d'où la conservation du nom « exponentielle »). Autrement dit, la restriction de $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ est l'exponentielle réelle ($\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$).
- La restriction de $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ à $i\mathbb{R}$ (axe imaginaire) est : $it \mapsto e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$.

III.2. Propriétés

Proposition 8.

La fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

- n'est pas injective,
- n'est pas surjective.

Démonstration.

- Prenons $z_1 = 0$ et $z_2 = 2i\pi$. Alors :

$$z_1 \neq z_2 \quad \text{et} \quad e^{z_2} = e^0 e^{2i\pi} = 1 = e^{z_1}$$

L'exponentielle complexe n'est donc pas injective.

- Le complexe 0 n'admet pas d'antécédent par la fonction $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. Alors :

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x > 0$$

Or : $|0| = 0$.

□

Proposition 9 (Propriété de morphisme).

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors il existe $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad z' = x' + iy'$$

On obtient :

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{x+x'} \times e^{i(y+y')} && \text{(par définition de l'exponentielle complexe)} \\ &= (e^x \times e^{x'}) \times e^{iy+iy'} && \text{(par propriété de l'exponentielle réelle)} \\ &= e^x \times e^{x'} \times (e^{iy} \times e^{iy'}) \\ &= (e^x \times e^{iy}) \times (e^{x'} \times e^{iy'}) \\ &= e^z \times e^{z'} && \text{(par définition de l'exponentielle complexe)} \end{aligned}$$

□

Proposition 10.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- 1) $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$
- 2) $\arg(e^z) \equiv \operatorname{Im}(z) \pmod{2\pi}$
- 3) L'écriture $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$ est donc une forme exponentielle de e^z .

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- 1) Par définition de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}| \\ &= |e^{\operatorname{Re}(z)}| |e^{i \operatorname{Im}(z)}| \\ &= |e^{\operatorname{Re}(z)}| \times 1 \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)} \quad (\text{car } e^{\operatorname{Re}(z)} > 0) \end{aligned}$$

- 2) Toujours par définition de l'exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} \arg(e^z) &\equiv \arg(e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}) \pmod{2\pi} \\ &\equiv \arg(e^{\operatorname{Re}(z)}) + \arg(e^{i \operatorname{Im}(z)}) \pmod{2\pi} \\ &\equiv 0 + \arg(e^{i \operatorname{Im}(z)}) \pmod{2\pi} \quad (\text{car } e^{\operatorname{Re}(z)} > 0) \\ &\equiv \operatorname{Im}(z) \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

- 3) Immédiat avec les 2 points précédents.

Proposition 11.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$|e^z| \leq e^{|z|}$

Proposition 12.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi$$

Démonstration.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \begin{cases} |e^z| = |e^{z'}| \\ \arg(e^z) \equiv \arg(e^{z'}) \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z')} \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (\text{d'après la Proposition précédente})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') \pmod{2\pi} \end{cases} \quad (\text{par bijectivité de } \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z') + i(\operatorname{Im}(z') + 2k\pi)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi$$

□

III.3. Équation $e^z = a$

Soit $a \in \mathbb{C}$. On cherche dans cette partie à résoudre l'équation $e^z = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

□

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$. Deux cas se présentent.

- si $a = 0$, alors, l'équation $e^z = a = 0$ n'admet pas de solution.
(on a déjà démontré que 0 n'admet pas d'antécédent par la fonction exponentielle complexe)

- si $a \neq 0$, alors il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $a = R e^{i\theta}$. On en déduit :

$$e^z = a \Leftrightarrow e^x e^{iy} = R e^{i\theta} \quad (\text{par définition de l'exponentielle complexe})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |e^x e^{iy}| = |R e^{i\theta}| \\ \arg(e^x e^{iy}) \equiv \arg(R e^{i\theta}) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = R \\ y \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(R) \\ y \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad (\text{par bijectivité de } \exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(R) \\ \exists k \in \mathbb{Z}, y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(R) + i\theta + 2ik\pi$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation étudiée est :

$$\mathcal{S} = \{\ln(R) + i\theta + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $e^z = \sqrt{3} + 3i$.

IV. Interprétations géométriques

IV.1. Transformation du plan

IV.1.a) Translation

Proposition 13.

Soit $b \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Le point d'affixe $z + b$ est l'image du point d'affixe z par la translation de vecteur d'affixe b .
- On dit que l'application suivante représente la translation de vecteur d'affixe b .

$\mathbb{C}$	$\rightarrow$	$\mathbb{C}$
z	$\mapsto$	$z + b$

IV.1.b) Homothéties

Proposition 14.

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Le point d'affixe kz est l'image du point d'affixe z par la l'homothétie de rapport k et de centre O .
- On dit que l'application suivante représente l'homothétie de rapport k et de centre O .

$\mathbb{C}$	$\rightarrow$	$\mathbb{C}$
z	$\mapsto$	kz

IV.1.c) Rotation

Proposition 15.

Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Le point d'affixe $e^{i\theta} z$ est l'image du point d'affixe z par la rotation de centre O et d'angle θ .
- On dit que l'application suivante représente la rotation de centre O et d'angle θ .

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta} z \end{array}$$

IV.1.d) Symétrie d'axe (Ox) **Proposition 16.**

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Le point d'affixe $\bar{z}$ est l'image du point d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- On dit que l'application suivante représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$$

Exercice 9

Quelle est la transformation du plan dont la représentation complexe est l'application :

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -\bar{z} \end{array}$$

IV.2. Alignement et orthogonalité

Les résultats suivants ont déjà été énoncés dans le précédent chapitre sur les nombres complexes. On les rappelle rapidement.

IV.2.a) Alignement

Proposition 17.

Soient A, B et M trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z . Alors :

$$\begin{aligned} A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow M \in (AB) \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) \equiv 0 \text{ } [\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_B} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

IV.2.b) Orthogonalité

Proposition 18.

Soient A, B et M trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z . Alors :

$$\begin{aligned} \widehat{CAB} \text{ est droit} &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB] \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_B} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$