

Exercices de calculs de sommes

Effectuer les calculs de sommes suivantes.

1. $\sum_{k=5}^{11} k$

2. $\sum_{k=9}^{125} k$

3. $\sum_{i=5}^{11} x$

4. $\sum_{i=5}^{11} (3 + 5i)$

5. $\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3}$

6. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{48}{2^k}$

7. $\sum_{k=3}^n \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$

8. $\sum_{k=2}^n \frac{3^k}{2^{2k}}$

Démonstration.

1. On applique ici simplement la formule du cours.

$$\sum_{k=5}^{11} k = \frac{(11 - 5 + 1)(11 + 5)}{2} = \frac{7 \times 16}{2} = 7 \times 8 = 56$$

$$\boxed{\sum_{k=5}^{11} k = 56}$$

2. On applique ici simplement la formule du cours.

$$\sum_{k=9}^{125} k = \frac{(125 - 9 + 1)(125 + 9)}{2} = \frac{117 \times 134}{2} = 117 \times 67 = 7839$$

$$\boxed{\sum_{k=9}^{125} k = 7839}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=5}^{11} x &= x \sum_{i=5}^{11} 1 && (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= x \times (11 - 5 + 1) && (\text{par formule du cours}) \\ &= 7x \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=5}^{11} x = 7x}$$

4. On calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{i=5}^{11} (3 + 5i) &= 3 \sum_{i=5}^{11} 1 + 5 \sum_{i=5}^{11} i && (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= 3 \times (11 - 5 + 1) + 5 \sum_{i=5}^{11} i && (\text{par formule du cours}) \\ &= 21 + 5 \times 56 && (\text{d'après la question 1. (car la variable } i \text{ est muette)}) \\ &= 301 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=5}^{11} (3 + 5i) = 301}$$

5. On calcule :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3} &= \frac{1}{3} \sum_{k=5}^{11} 2^k && (\text{par linéarité de la somme}) \\
 &= \frac{1}{3} \times 2^5 \frac{1 - 2^{11-5+1}}{1 - 2} && (\text{par formule du cours}) \\
 &= \frac{2^5}{3} \times \frac{1 - 2^7}{-1} \\
 &\boxed{\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3} = -\frac{2^5}{3} (1 - 2^7) = \frac{2^5}{3} (2^7 - 1)}
 \end{aligned}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{48}{2^k} &= 48 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} && (\text{par linéarité de la somme}) \\
 &= 48 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &= 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} && (\text{par formule du cours}) \\
 &= 48 \times 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\
 &= 48 \times 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{48}{2^k} = 96 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).}$$

7. Soit $n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=3}^n \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2^{k+2}}{3^k} && (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= \sum_{k=2}^{n-1} 2^2 \frac{2^k}{3^k} \\
 &= 2^2 \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\
 &= 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)-2+1}}{1 - \frac{2}{3}} && (\text{par formule du cours}) \\
 &= 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{16}{9} \times 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 3, +\infty \rrbracket, \sum_{k=3}^n \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} = \frac{16}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)}$$

Commentaire

On peut expliciter le décalage d'indice.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} &= \sum_{i=2}^{n-1} \frac{2^{i+2}}{3^i} && (\text{en posant } \boxed{i = k - 1}) \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2^{k+2}}{3^k} && (\text{car la variable } i \text{ est muette}) \end{aligned}$$

8. Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{3^k}{2^{2k}} &= \sum_{k=2}^n \frac{3^k}{(2^2)^k} \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2+1}}{1 - \frac{3}{4}} && (\text{par formule du cours}) \\ &= \frac{3^2}{4^2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3^2}{4^{\cancel{2}}} \times \cancel{4} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \sum_{k=2}^n \frac{3^k}{2^{2k}} = \frac{9}{4} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$

□