

CH III : Généralités sur les fonctions - Étude de fonctions

I. Étude graphique de fonctions

La méthodologie d'étude d'une fonction f (dérivable) est la suivante.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction (si celui-ci n'est pas donné).
- 2) Recherche de l'intervalle d'étude $\mathcal{E}_f$ par réduction (parité, périodicité).
- 3) Démonstration de la dérivabilité de f sur $\mathcal{E}_f$.
- 4) Calcul de f' (là où f est dérivable).
- 5) Construction du tableau de variations de f (étude du signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{E}_f$).
- 6) Étude des limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude. et recherche d'asymptotes.
- 7) Calcul des tangentes de f en certains points (généralement l'énoncé précise ces points).
(on y reviendra dans un chapitre ultérieur ...)
- 8) Étude graphique : dans un repère, on place :
 - × les points particuliers (ceux dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$),
 - × les droites particulières (tangentes) de la courbe.
 - × on peut éventuellement placer des points supplémentaires.
 On trace alors $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f sur $\mathcal{E}_f$ puis sur $\mathcal{D}_f$.

II. Généralités sur les fonctions

II.1. Fonctions $D \rightarrow \mathbb{R}$

Notation

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$.

Proposition 1.

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ non vide (en pratique, D sera souvent un intervalle ou une réunion d'intervalles).

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ des applications

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $f + g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont également des applications de D dans $\mathbb{R}$.

Remarque

On verra dans un chapitre ultérieur que cela signifie en particulier que $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (c'est en fait même une $\mathbb{R}$ -algèbre mais cela sort du cadre de notre programme).



Les fonctions f et g doivent être définies sur le même ensemble D . On ne peut, par exemple, sommer les fonctions
 $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto \ln(x - 2)$

II.2. Monotonie

Définition

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que :

a) la fonction f est **croissante** sur D si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$$

b) la fonction f est **strictement croissante** sur D si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$$

c) la fonction f est **décroissante** sur D si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y))$$

d) la fonction f est **strictement décroissante** sur D si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y))$$

e) la fonction f est **monotone** si et seulement si :

$$f \text{ croissante sur } D \text{ OU } f \text{ décroissante sur } D$$

On obtient de même la définition de **stricte monotonie** sur D .

Remarque

- On pourrait également donner la définition suivante de la stricte croissance de f sur D :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \Leftrightarrow (f(x) < f(y))$$

Démonstration.

Pour démontrer cette équivalence des définitions, notons :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$$

$$(2) \quad \forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \Leftrightarrow (f(x) < f(y))$$

On procède par double implication.

($\Leftarrow$) On a bien sûr : $(2) \Rightarrow (1)$.

($\Rightarrow$) Supposons (1) et démontrons (2) .

Soit $(x, y) \in D^2$. On procède de nouveau par double implication.

($\Rightarrow$) Vraie d'après (1) .

($\Leftarrow$) On procède par contraposée.

Supposons : $x \geq y$. Deux cas se présentent alors :

× si $x = y$, alors on a toujours : $f(x) = f(y)$ par définition d'une fonction.

× si $x > y$, alors d'après (1) : $f(x) > f(y)$.

Finalement : $f(x) \geq f(y)$.

On a bien démontré : $\text{NON}(x < y) \Rightarrow \text{NON}(f(x) < f(y))$. $\square$

- Bien sûr, on peut de même donner une définition équivalente de la stricte décroissance de f sur D :

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y) \Leftrightarrow (f(x) > f(y))$$



Dire qu'une fonction f est croissante (resp. décroissante, resp. monotone) ~~n'a aucun sens.~~

Une fonction est toujours croissante (resp. décroissante, resp. monotone) **SUR UN INTERVALLE.**

Par exemple :

× la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

× la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Cependant, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

En effet :

$$-2 \leq 1 \quad \text{ET} \quad \frac{1}{-2} < \frac{1}{1}$$

Il est donc crucial de préciser **l'intervalle** de monotonie.

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto e^x$ sont (strictement) croissantes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet :

$$1 < \frac{3}{2} \quad \text{ET} \quad \lfloor 1 \rfloor \geq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$$

- Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont (strictement) décroissantes sur $\mathbb{R}_-$ et (strictement) croissantes sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction sin est (strictement) croissante sur chaque intervalle $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ et (strictement) décroissante sur chaque intervalle $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Alors :

- si f et g sont croissantes (resp. strictement croissantes) sur D , alors $f+g$ est croissante (resp. strictement croissante) sur D .
- si f et g sont décroissantes (resp. strictement décroissantes) sur D , alors $f+g$ est décroissante (resp. strictement décroissante) sur D .

Démonstration.

À faire. □

Proposition 3.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Supposons que les fonctions f et g sont :

- × croissantes (resp. strictement croissantes) sur D ,
- × positives sur D .

Alors la fonction $f \times g$ est croissante (resp. strictement croissante) sur D .

Démonstration.

À faire. □

Proposition 4.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

Soit g une fonction de $f(D)$ dans $\mathbb{R}$.

Alors :

$$a) \left. \begin{array}{l} f \text{ croissante sur } D \\ g \text{ croissante sur } f(D) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ croissante sur } D$$

$$\begin{aligned}
b) \quad & \left. \begin{array}{l} f \text{ croissante sur } D \\ g \text{ décroissante sur } f(D) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ décroissante sur } D \\
c) \quad & \left. \begin{array}{l} f \text{ décroissante sur } D \\ g \text{ croissante sur } f(D) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ décroissante sur } D \\
d) \quad & \left. \begin{array}{l} f \text{ décroissante sur } D \\ g \text{ décroissante sur } f(D) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ croissante sur } D
\end{aligned}$$

Remarque

Ces quatre propriétés sont encore valides en remplaçant tous les « croissante » par « strictement croissante », et tous les « décroissante » par « strictement décroissante ».

Démonstration.

À faire.

□

Exercice 1

Déterminer la monotonie des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition sans effectuer de calculs de dérivées.

1. $f : x \mapsto x^2 + e^x$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. $u : x \mapsto x^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_-$.
3. $g : x \mapsto \ln(2x + 3)$ sur $] -\frac{3}{2}, +\infty[$.
4. $h : x \mapsto x \sin(x) + |x|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. $v : x \mapsto |x| - \cos(x^3)$ sur $[-\pi, 0]$.

II.3. Fonctions majorées, minorées, bornées**Définition**

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que :

a) la fonction f est **minorée** sur D si et seulement si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad m \leq f(x)$$

b) la fonction f est **majorée** sur D si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in D, \quad f(x) \leq M$$

c) la fonction f est **bornée** sur D si et seulement si :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in D, \quad m \leq f(x) \leq M$$

ou encore, si et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in D, \quad |f(x)| \leq K$$

Remarque

Si une fonction f admet un majorant M (resp. un minorant m) alors elle en admet une infinité. En effet, tout élément plus grand que M (resp. plus petit que m) est un majorant (resp. minorant) de f .



Les bornes m et M évoquées dans ces définitions ne sont pas forcément des valeurs prises par f .

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est majorée par 1 (donc par 1.1, 1.5, e, 37, 10^{18} ...) mais 1 n'est pas atteint par f .

Exemples

- La fonction $x \mapsto x^2$ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
En effet : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.
- La fonction $\cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
En effet : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^3$ ne sont ni minorée ni majorée respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}$. En effet : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.
De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.
- La fonction $x \mapsto -x^2 + 2$ est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$. En effet : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 2 = -\infty$.

Proposition 5.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- Si f et g sont minorées sur D , alors $f + g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont minorées sur D .
- Si f et g sont majorées sur D , alors $f + g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont majorées sur D .
- Si f et g sont bornées sur D , alors $f + g$, $f \times g$ et $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ sont bornées sur D .

Démonstration.

À faire. □

Remarque

Notons que l'ensemble des fonctions bornées de D dans $\mathbb{R}$ est encore un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (et même encore une $\mathbb{R}$ -algèbre).

II.4. Extrema locaux, extrema globaux

II.4.a) Notion de minimum / maximum global

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- f admet un **minimum** sur l'intervalle I si :

$$\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **minimum** au point x_0 .

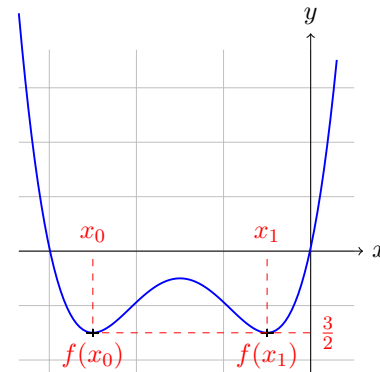
- f admet un **maximum** sur l'intervalle I si :

$$\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **maximum** au point x_0 .

Remarque

- S'il existe, le maximum (resp. minimum) d'une fonction sur I est unique. Cependant, ce maximum peut être atteint en plusieurs points de I .
- Le maximum (resp. minimum) de f sur I , s'il existe, est un majorant (resp. minorant) de f qui est atteint par f .



La fonction f admet le minimum $-\frac{3}{2}$.
Ce minimum est atteint en les deux points x_0 et x_1 :

- $f(x_0) = -\frac{3}{2}$.
- $f(x_1) = -\frac{3}{2}$.

II.4.b) Notion de minimum / maximum local

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1) On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si :

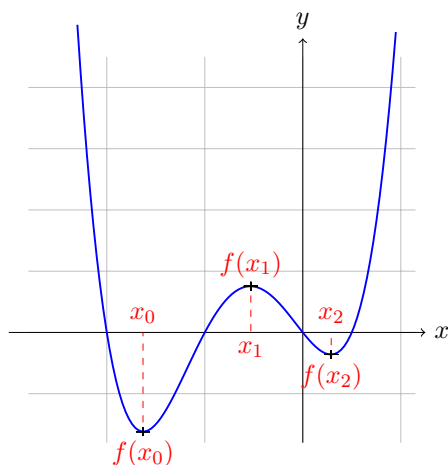
$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

2) On dit que f admet un **minimum local** en x_0 si :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

Remarque

- Une fonction f peut admettre plusieurs maxima (resp. minima) locaux.
- Un maximum (resp. minimum) local d'une fonction f est un majorant (resp. minorant) local de f .



La fonction f admet :

- un minimum local en x_0 .
- un maximum local en x_1 .
- un minimum local en x_2 .

La fonction f :

- n'admet pas de maximum.
- admet un minimum (global) au point x_0 .

La fonction f n'admet pas de majorant. Elle admet une infinité de minorants : tout réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq f(x_0)$ est un minorant de f . Parmi ses minorants, on peut distinguer celui qui a le plus d'intérêt.

II.4.c) Notion de borne supérieure / inférieure

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

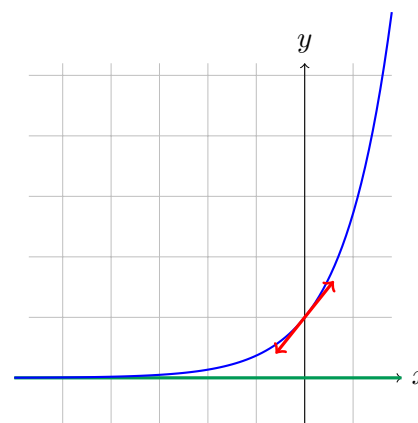
- 1) Si f est minorée sur I , on appelle **borne inférieure de f sur I** le plus grand des minorants de f sur I . Cet élément est noté $\inf_I f$ ou $\inf_{x \in I} f(x)$.
- 2) Si f est majorée sur I , on appelle **borne supérieure de f sur I** , le plus petit des majorants de f sur I . Cet élément est noté $\sup_I f$ ou $\sup_{x \in I} f(x)$.
- 3) Si f est bornée sur I , on peut donc définir $\sup_I |f|$.



La borne supérieure (resp. inférieure) de f n'est pas forcément une valeur atteinte par f . Si c'est le cas il s'agit du minimum (resp. maximum) de la fonction.

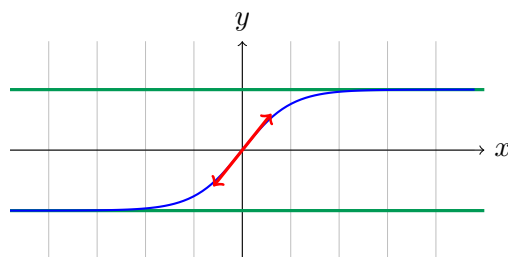
- si $\inf_I f \in f(I)$, alors $\inf_{x \in I} f(x) = \min_{x \in I} f(x)$
- si $\sup_I f \in f(I)$, alors $\sup_{x \in I} f(x) = \max_{x \in I} f(x)$

- Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$.



- La fonction f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.
- Elle est minorée par tout réel $m \leq 0$.
- Sa borne inférieure est : $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$.

- La fonction $g : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ n'admet pas de minimum / maximum.



- La fonction g n'admet pas de minimum / maximum.
- Elle est minorée par tout réel $m \leq -1$.
- Elle est majorée par tout réel $M \geq 1$.
- $\inf_{\mathbb{R}} g = -1$ et $\sup_{\mathbb{R}} g = 1$.

III. Réduction de l'ensemble d'étude

III.1. Parité, imparité

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si :

$$\forall x \in I, \quad (-x \in I) \text{ ET } (f(-x) = f(x))$$

Pour que cette définition soit valide, il faut supposer que les quantités $f(x)$ et $f(-x)$ sont bien définies. Il faut donc que la fonction f soit définie sur un intervalle I symétrique :

$$x \in I \Rightarrow -x \in I$$

Remarque

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Ainsi, si f paire, alors f n'est pas injective (sauf si $I = \{0\}$).
- On peut écrire une version « sans les x » de cette définition.
Soit I un intervalle symétrique. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est paire si :

$$f \circ (-\text{id}) = f$$

Étude d'une fonction paire

Soit f une fonction définie sur I .

Supposons que f est paire. Alors l'étude de f s'effectue de la façon suivante :

- On restreint l'ensemble d'étude de f à $I \cap \mathbb{R}_+$.
- On étudie f normalement sur $I \cap \mathbb{R}_+$: dérivabilité, dérivation, variations, limites.
- On conclut quant au tableau de variations de f sur $I \cap \mathbb{R}_+$.
- Pour le tracé de la courbe représentative de f , on l'effectue d'abord sur $I \cap \mathbb{R}_+$, puis on complète la partie $I \cap \mathbb{R}_-$ en effectuant le symétrique de la courbe déjà tracée par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple

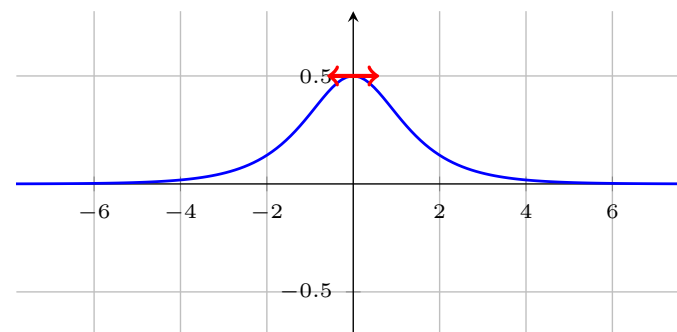
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

Donner son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et démontrer que f est paire.

- La quantité $f(x)$ est définie pour tout x tel que : $e^{2x} + 1 \neq 0$. Or $e^{2x} + 1 > 0$.
On en déduit que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1 + e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{1}{e^x} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = f(x)$$

On en déduit que f est paire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0.

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **impaire** si :

$$\forall x \in I, \quad (-x \in I) \text{ ET } (f(-x) = -f(x))$$

Remarque

- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.
- Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire si :

$$f \circ (-\text{id}) = (-\text{id}) \circ f$$

Étude d'une fonction impaire

Soit f une fonction définie sur I .

Supposons que f est impaire. Alors l'étude de f s'effectue de la façon suivante :

- 1) On restreint l'ensemble d'étude de f à $I \cap \mathbb{R}_+$.
- 2) On étudie f normalement sur $I \cap \mathbb{R}_+$: dérivabilité, dérivation, variations, limites.
- 3) On conclut quant au tableau de variations complet de f sur $I \cap \mathbb{R}_+$.
- 4) Pour le tracé de la courbe représentative de f , on l'effectue d'abord sur $I \cap \mathbb{R}_+$, puis on complète la partie $I \cap \mathbb{R}_-$ en effectuant le symétrique de la courbe déjà tracée par rapport à l'origine du repère.

Proposition 6. (jouons avec la définition ...)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

$$1) \quad f \text{ paire} \Rightarrow g \circ f \text{ paire}$$

$$2) \quad f \text{ et } g \text{ impaires} \Rightarrow g \circ f \text{ impaire}$$

$$3) \quad f \text{ impaire et } g \text{ paire} \Rightarrow g \circ f \text{ paire}$$

Démonstration.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est paire.

On aurait pu faire une démonstration « sans les x » :

$$(f \circ g) \circ (-\text{id}) = f \circ (g \circ (-\text{id})) = f \circ g$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(-(f(x))) = -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est impaire.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f \circ (-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est paire.

□

Exercice 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démontrer que toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

III.2. Périodicité

Définition

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est **T -périodique** (ou périodique de période T) sur D si :

- 1) $\forall x \in D, x + T \in D,$
- 2) $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$

Remarque

- Remarquons que le point 1) est nécessaire pour la bonne définition du point 2).
- On dit que f est périodique sur D si :

$$\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} 1) \forall x \in D, x + T \in D, \\ 2) \forall x \in D, f(x + T) = f(x) \end{cases}$$

- En particulier l'ensemble D doit être stable par la translation $x \mapsto x + T$.
- Notons que si f est T -périodique sur D , alors, pour tout $x \in D$:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

||

||

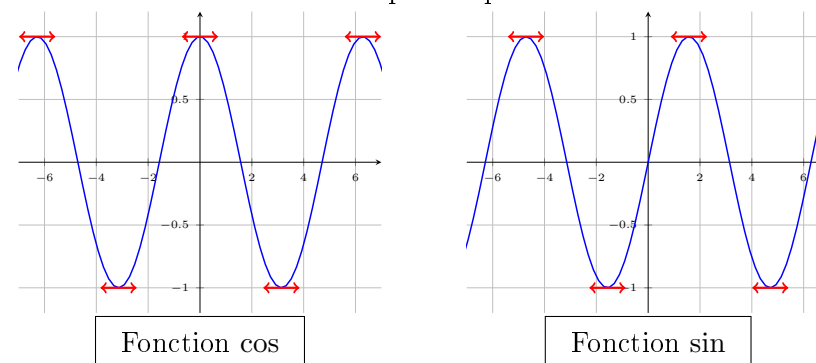
$$\dots = f(x - 3T) = f(x - 2T)$$

$$f(x + 2T) = f(x + 3T) = \dots$$

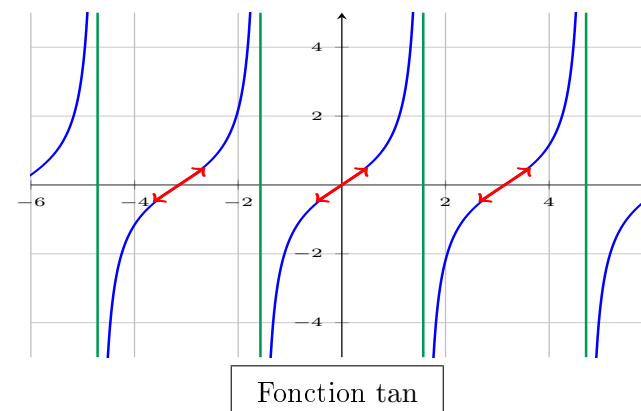
Finalement : $\forall k \in \mathbb{Z}, f(x + kT) = f(x)$

Exemples

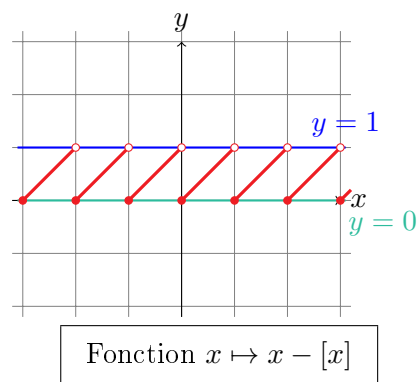
- Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$.



- La fonction tan est π -périodique sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.



- La fonction partie fractionnaire $x \mapsto x - [x]$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.



Proposition 7.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est } T\text{-périodique sur } D \Rightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, f \text{ est } nT\text{-périodique sur } D$$

Démonstration.

À faire.

Remarque

Tout réel non nul ω tel que :

- × $\forall x \in D, x + \omega \in D,$
- × $\forall x \in D, f(x + \omega) = f(x).$

s'appelle une **période** de f .

Étude d'une fonction T -périodique

Soit f une fonction définie sur I .

Supposons que f est T -périodique. Alors l'étude de f s'effectue de la façon suivante :

- 1) On restreint l'ensemble d'étude de f à $I \cap J_T$ (ou $I \cap J_T$ où J_T est un intervalle de longueur T).
- 2) On étudie f normalement sur $I \cap [0, T]$: dérivabilité, dérivation, variations, limites.
- 3) On conclut quant au tableau de variations de f sur $I \cap J_T$.
- 4) Pour le tracé de la courbe représentative de f , :
 - × on commence par effectuer le tracé sur $I \cap J_T$,
 - × on complète sur tout I en effectuant des translations de vecteur $(T, 0)$.

III.3. Translation et homothétie

Définition

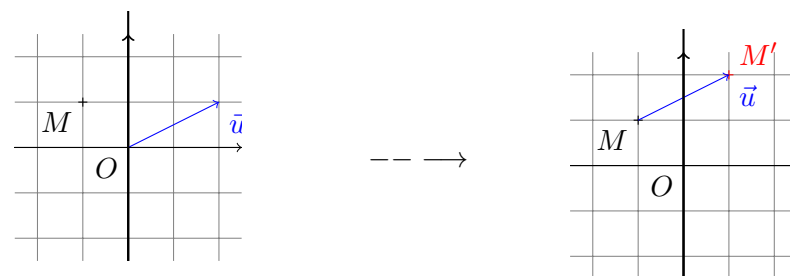
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$, l'application qui à un point $M \in \mathbb{R}^n$ associe le point $M' \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

□

Illustration



Avant translation de vecteur $\vec{u}$

Après translation de vecteur $\vec{u}$

Proposition 8.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto x + a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la translation de vecteur a .

Proposition 9.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur D , à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe de représentative.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction $g_a : x \mapsto f(x + a)$:

× est définie sur $\{x - a \mid x \in D\}$,

× admet pour courbe représentative la translation de $\mathcal{C}_f$ par le vecteur $(-a, 0)$.

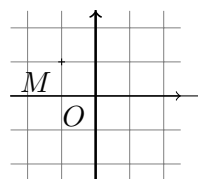
Exercice 3

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $\ln$.
2. En déduire le tracé de la courbe représentative de $f : x \mapsto \ln(x + 1)$.

Définition

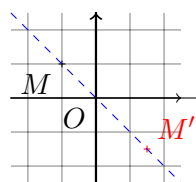
Soit $k \in \mathbb{R}^*$.

On appelle **homothétie** de centre O et de rapport k , l'application qui à un point $M \in \mathbb{R}^n$ associe le point $M' \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Illustration

Avant homothétie de centre O
de rapport $-\frac{3}{2}$

→



Après homothétie de centre O
de rapport $-\frac{3}{2}$

Proposition 10.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

L'application $x \mapsto ax$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport a .

Proposition 11.

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction définie sur D , à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe de représentative.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Alors, la fonction $g_a : x \mapsto f(ax)$:

× est définie sur $\{\frac{x}{a} \mid x \in D\}$,

× admet pour courbe représentative $\mathcal{C}_f$ munie du changement d'échelle d'abscisse $x \mapsto \frac{x}{a}$.

Exercice 4

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $\cos$.
2. En déduire le tracé de la courbe représentative de $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$.

IV. Dérivabilité et dérivation

IV.1. Règles de dérivation

IV.1.a) Somme, produit, quotient

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les égalités suivantes sont vérifiées sur tout ensemble E où les fonctions f et g sont dérivables.

$$\begin{aligned}(\lambda f)' &= \lambda f' \\(f + g)' &= f' + g' \\(f \times g)' &= f' g + f g' \\(f^n)' &= n f' f^{n-1} \\ \left(\frac{1}{g}\right)' &= \frac{-g'}{g^2} \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' g - f g'}{g^2}\end{aligned}$$



Pour les règles de dérivation de l'inverse et du quotient, il faut ici veiller à se placer sur un ensemble E sur lequel g ne s'annule pas.

IV.1.b) Composition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Supposons que :

- la fonction f :
 - est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
 - telle que : $f(I) \subset J$,
- la fonction g est dérivable sur J .

Alors l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle I :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour toute fonction f :

- × dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
- × à valeurs strictement positives.

Alors l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle I :

$$(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$$

IV.1.c) Réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que la fonction f est :

- × bijective d'un intervalle I dans un intervalle J ,
- × dérivable sur I ,
- × telle que : $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

Alors f^{-1} est dérivable sur J et l'égalité suivante est vérifiée sur l'intervalle

$$J : (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemple

- On considère la restriction de la fonction $\sin$ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

La fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ est :

- × continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- × strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ où :

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$$

On note $\arcsin$ la bijection réciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

- La fonction $\sin|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ est :
 - × bijective de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $] -1, 1[$,
 - × dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
 - × telle que : $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \sin'(x) = \cos(x) \neq 0$.

Alors sa bijection réciproque $\arcsin$ est donc dérivable sur $] -1, 1[$.

- De plus, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

IV.2. Théorème de la bijection

IV.2.a) Un premier théorème

Théorème 1.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction :

- × continue sur $[a, b]$.
- × strictement croissante sur $[a, b]$.

On a alors :

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \exists ! c \in [a, b], y = f(c)$$

Autrement dit :

- Pour y fixé dans $[f(a), f(b)]$ l'équation en $x : y = f(x)$ a une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Ou encore, tout élément y dans $[f(a), f(b)]$ possède un unique antécédent par f dans $[a, b]$.

Remarque

Ce théorème est aussi connu sous le nom de **Théorème des Valeurs Intermédiaires** (cas de la stricte monotonie). Des énoncés similaires existent :

× pour tout type d'intervalle $([a, b[,]a, b[,]a, b])$.

× lorsque f strictement décroissante. Dans ce cas, la conclusion est :

$$\forall y \in [f(b), f(a)], \exists ! c \in [a, b], y = f(c)$$

(et on peut encore prendre tout type d'intervalle ...)

IV.2.b) Les fonctions bijectives

Définition Fonction bijective

Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

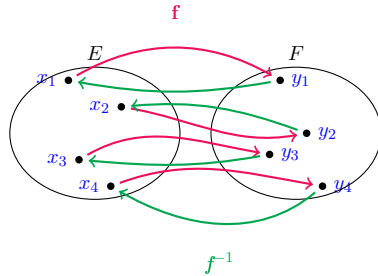
- On dit que f est une bijection de E sur F si :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$$

- Si $f : E \rightarrow F$ définit une bijection de E sur F , alors elle permet de définir la fonction qui à tout réel $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f dans l'ensemble E . Cette fonction est notée $f^{-1} : F \rightarrow E$ et est appelée **fonction réciproque** de f .
(faire un dessin !)

Représentation graphique.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective de E sur F .



- Par définition de la bijectivité, tout élément y_i de F possède un unique antécédent x_j dans E par f .
- Par définition de fonction, tout élément x_j de E ne possède qu'une image y_i dans F .

De manière non formelle, si $f : E \rightarrow F$ est une bijection de E sur F , alors il y a « exactement autant » d'éléments dans E et dans F .

Graphiquement, cela se traduit par le fait que l'on peut relier les x_j au y_i :

- × par les flèches rouges. C'est la fonction $f : E \rightarrow F$.
- × par les flèches vertes, obtenues en orientant dans l'autre sens les flèches rouges. C'est la fonction $f^{-1} : F \rightarrow E$.

Proposition 12.

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection de E sur F .

Et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque.

On a alors :

- 1) $\forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$
- 2) $\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$ c'est-à-dire : $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$
- 3) $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$ c'est-à-dire : $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$
- 4) $f^{-1} : F \rightarrow E$ est une bijection de F sur E .

Démonstration.

1) Soient $x \in E$ et $y \in F$. On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons : $y = f(x)$.

La variable x est donc un antécédent de y par la fonction f . C'est même l'unique antécédent de y par f car f est bijective.

Ainsi, par définition de la fonction $f^{-1} : x = f^{-1}(y)$.

($\Leftarrow$) Supposons : $x = f^{-1}(y)$.

Par définition de la fonction f^{-1} , l'élément $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par la fonction f . En particulier, x est un antécédent de y par f .

Ainsi : $y = f(x)$.

2) Soit $y \in F$.

Par définition de f^{-1} , l'élément $f^{-1}(y)$ est l'unique x dans E tel que $y = f(x)$. Ainsi :

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

3) Soit $x \in E$.

Notons $y = f(x)$. On obtient : $x = f^{-1}(y)$ (d'après la propriété 1)). Ainsi :

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

4) On doit démontrer : $\forall v \in E, \exists! u \in F, v = f^{-1}(u)$.

Soit $v \in E$.

- D'après la propriété 3) : $f^{-1}(f(v)) = v$. Ainsi, en notant $u = f(v)$, on a bien trouvé un élément $u \in F$ tel que $f^{-1}(u) = v$.

- Démontrons l'unicité de l'élément $u \in F$.

S'il existe $t \in F$ tel que $f^{-1}(t) = v$, alors par la propriété 1) : $t = f(v)$. Ainsi, $t = f(v) = u$. □

Remarque

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction bijective de E dans F et $x \in E$, $y \in F$ deux éléments tels que $y = f(x)$. D'après la propriété **1)**, on a alors aussi $x = f^{-1}(y)$. On a donc :

- × x est l'antécédent de y par f .
- × y est l'image de x par f .
- × x l'image de y par f^{-1} .
- × y est l'antécédent de x par f^{-1} .

IV.2.c) Le théorème de la bijection**Théorème 2.** *Théorème de la bijection*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction :

- × continue sur $[a, b]$.
- × strictement croissante sur $[a, b]$.

On a alors :

- 1) f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
- 2) De plus, sa bijection réciproque $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ est :
 - × continue sur $[f(a), f(b)]$.
 - × strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$.

Démonstration.

- 1) C'est l'énoncé du TVI traduit avec le vocabulaire des fonctions bijectives.
- 2) On en reparlera ... □

Remarque

Les extensions précédentes peuvent aussi être appliquées à ce théorème : on peut l'écrire avec des intervalles du type $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$; si la fonction f initiale est strictement décroissante, la conclusion sera alors la stricte décroissance de f^{-1} .

Par exemple :

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction :	
× continue sur $]a, b]$	$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \Rightarrow$
× strictement décroissante sur $]a, b]$	
	• f est une bijection de $]a, b]$ sur $[f(b), f(a)[$ • $f^{-1} : [f(b), f(a)[\rightarrow]a, b]$ est : × continue sur $[f(b), f(a)[$ × strictement croissante sur $[f(b), f(a)[$

Exercice 5

Montrer que l'équation $e^x - \frac{e}{x} = x$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet une unique solution notée α , puis montrer : $1 < \alpha < 2$.