

CH III : Fonctions usuelles

I. Fonction valeur absolue

I.1. Définition

Définition

On appelle fonction valeur absolue, notée $|\cdot|$, la fonction suivante.

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque

- Dans la définition, il est implicite que pour tout *truc* élément de $\mathbb{R}$, la quantité $|\text{truc}|$ est positive. En effet :
 - × si $\text{truc} \geq 0$, $|\text{truc}|$ vaut truc ,
 - × si $\text{truc} < 0$, $|\text{truc}|$ vaut l'opposé de truc , à savoir $-\text{truc}$ (> 0).
- On a notamment les calculs suivants :
 - 1) $|-5| = 5$ 2) $|(x-2)^2| = (x-2)^2$ 3) $|- (x-2)^2| = (x-2)^2$

Exercice 1. (valeur absolue)

Écrire sans valeur absolue les quantités suivantes.

a. $|x^2 + x - 2|$ b. $|x + 1| + |x + 2|$ c. $|x^2 - 1| - |x^2 + 1| + |2x^2 - x + 1|$

Traisons la question a.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
Signe de $x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
Valeur de $ x^2 + x - 2 $	$x^2 + x - 2$	$-x^2 - x + 2$	0	$x^2 + x - 2$	

On retiendra l'intérêt de faire un tableau qui est une représentation lisible de la situation.

I.2. Propriétés

Proposition 1.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$

(ceci signifie que la fonction $|\cdot|$ est paire)

3. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x| = |y| \Rightarrow x = y \text{ OU } x = -y$

5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x \times y| = |x| \times |y|$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

7. **Inégalité triangulaire.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Proposition 2. (Dérivée)

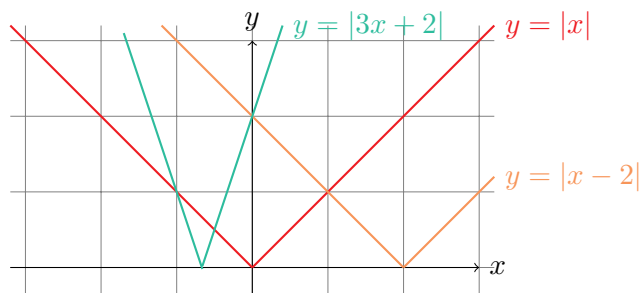
1) La fonction $f = |\cdot|$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 1$

2) La fonction $f = |\cdot|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$. $\forall x \in]-\infty, 0[, f'(x) = -1$



La fonction $|\cdot|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$! Cette fonction n'est en effet pas dérivable en 0. Cela est visible graphiquement car la courbe représentative de la fonction $|\cdot|$ admet un **point anguleux** en 0.

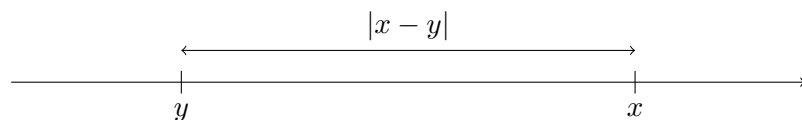
I.3. Représentation graphique



I.4. Interprétation

Interprétation

- Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|x - y|$ est la distance entre les points x et y ($|x - y| = d(x, y)$), autrement dit l'écart entre le point x et le point y sur la droite réelle.



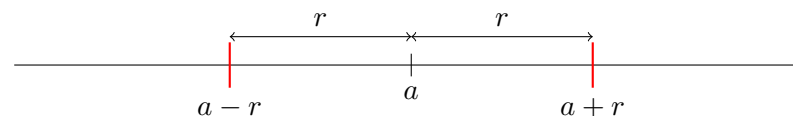
- Ainsi, $|x|$ est la distance entre les points x et 0.

Application

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

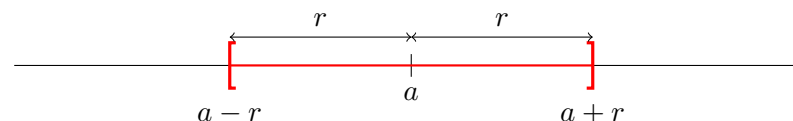
- Résolution de $|x - a| = r$

Les éléments x vérifiant cette égalité sont les éléments situés à une distance r du réel a . Autrement dit, ce sont les éléments $x = a - r$ et $x = a + r$.



- Résolution de $|x - a| \leq r$

Les éléments x vérifiant cette égalité sont les éléments situés à une distance inférieure (ou égale) à r du réel a . Autrement dit, ce sont les éléments x de l'intervalle $[a - r, a + r]$.



- Ainsi, on a : $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$

II. Fonction inverse

Définition

On appelle la fonction inverse la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cdot} : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on notera f la fonction inverse. On réalise l'étude graphique de f à l'aide de la méthodologie présentée en début de chapitre.

- 1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-1}{x^2} \leq 0$.
- 3) Construction du tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-		-
Variation de f	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$

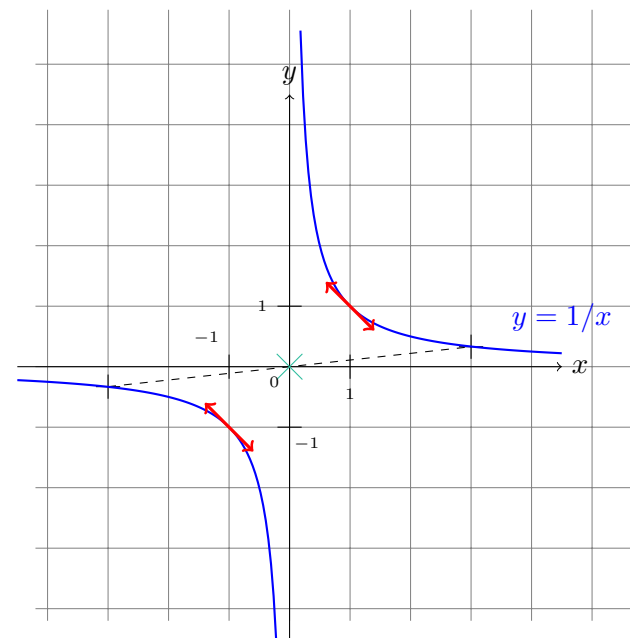
- 4) Les limites sont affichées dans le tableau de variation.
- 5) L'équation de la tangente au point d'abscisse a (*i.e.* au point $(a, f(a))$) est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

On en déduit que :

- × la droite $y = -x + 2$ est la tangente de la fonction au point $(1, 1)$.
- × la droite $y = -x - 2$ est la tangente de la fonction au point $(-1, -1)$.

6) Représentation graphique



Remarque *Parité et représentation graphique ...*

- Par définition, on dira qu'une fonction f est **impaire** si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$$

Dans ce cas, on a alors l'équivalence suivante :

$$\left(\begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array} \right) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} -x \\ -f(x) \end{array} \right) \in \mathcal{C}_f$$

Ainsi, si f est une fonction impaire, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet le point $(0, 0)$ comme centre de symétrie.

- Par définition, on dira qu'une fonction f est **paire** si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$$

Dans ce cas, on a alors l'équivalence suivante :

$$\left(\begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array} \right) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} -x \\ f(x) \end{array} \right) \in \mathcal{C}_f$$

Ainsi, si f est une fonction paire, sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

- La fonction inverse est impaire puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.

On en déduit que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère $((0,0))$. Ainsi, le tracé de $\mathcal{C}_f$ sur $] -\infty, 0[$ se déduit, par symétrie, du tracé de $\mathcal{C}_f$ sur $]0, +\infty[$.

On réduit ainsi l'étude de cette fonction à l'ensemble $]0, +\infty[$.

III. Fonctions puissances entières

III.1. Définition

Définition *Fonctions puissances (entières)*

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction élévation à la puissance n est définie comme suit.

$$.^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n = \overbrace{x \times x \times \dots \times x}^{n-1 \text{ multiplications}}$$

- On peut aussi définir l'élévation à une puissance entière négative.

Si $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité x^{-n} est définie par :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

- Par convention, l'opérateur élévation à la puissance 0 est la fonction constante

égale à 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$

III.2. Propriétés

Proposition 3.

$$1. \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x^{m+n} = x^n x^m$$

$$2. \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x^{mn} = (x^m)^n$$

$$3. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy)^n = x^n y^n$$

$$4. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}^*, y^{-n} = \frac{1}{y^n} = \left(\frac{1}{y}\right)^n$$

$$5. \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Proposition 4. *(Dérivée)*

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

× si $n \geq 0$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$$

× si $n < 0$, la fonction $g : x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = nx^{n-1}$$

(même formule, seule l'ensemble de dérivabilité est modifié)

- Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction u^n est dérivable sur un sous-ensemble de I et :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$

$\hookrightarrow$ si $n \in \mathbb{N}$, cette règle de dérivation est valable sur tout l'intervalle I (intervalle sur lequel la fonction u est dérivable).

$\hookrightarrow$ si n est un entier strictement négatif, cette règle de dérivation est valable sur tout ensemble où la fonction u est non nulle et dérivable.

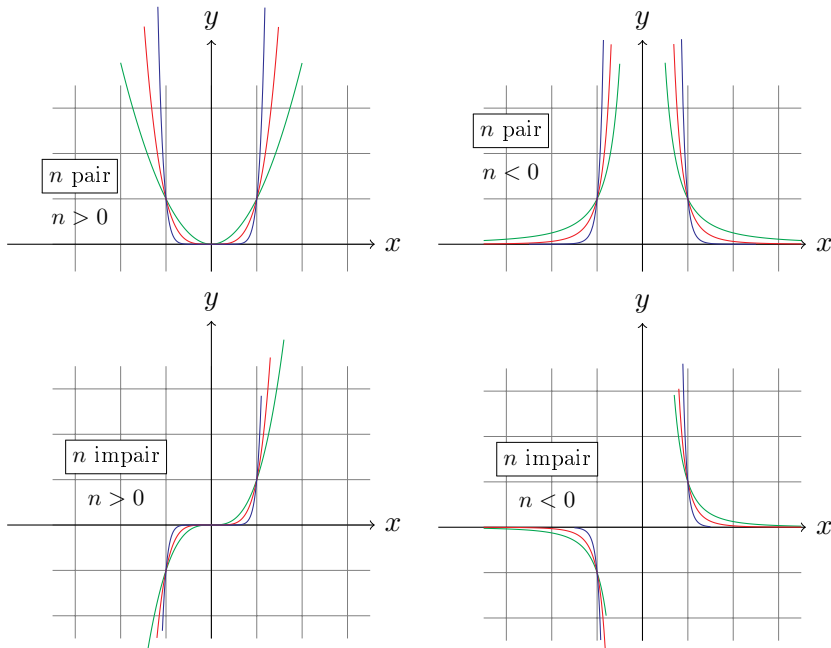
Exercice 2

Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto (5x^2 + 2x + 7)^3$ b. $g : x \mapsto \frac{1}{3x^2 + 5}$

Étude pour les petites valeurs de n

- Si $n = 2$: la fonction $x \mapsto x^2$ est paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Si $n = 3$: la fonction $x \mapsto x^3$ est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

III.3. Représentation graphique**IV. Fonction racine carrée****IV.1. Définition****Définition**

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est :

- × continue sur $[0, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection on a donc :

- 1) f est une bijection de l'ensemble $[0, +\infty[$ sur l'ensemble :

$$f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0, +\infty[.$$

- 2) f admet une bijection réciproque, continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$: c'est la fonction **racine carrée**.

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

De par cette définition, on a les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, (y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y})$

2) $\forall y \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{y})^2 = y$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{(x^2)} = x$

IV.2. Propriété**Proposition 5.**

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$

Proposition 6. (Dérivée)

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction :

× dérivable sur I ,

× telle que : $u(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exercice 3

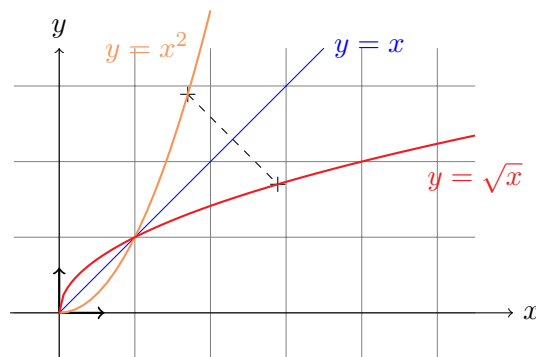
Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2}$

b. $g : x \mapsto \sqrt{(x^2 + 2)^5}$

IV.3. Représentation graphique

On obtient la courbe de la fonction $\sqrt{\cdot}$ par symétrie de la courbe élévation au carré par rapport à la droite $y = x$.



Parenthèse : retour sur la fonction inverse

On peut aussi appliquer le théorème de la bijection à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

× f est continue sur $]0, +\infty[$,

× f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$,

D'après le théorème de la bijection, on a donc :

1) f est bijection de l'ensemble $]0, +\infty[$ sur l'ensemble :

$$f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[=]0, +\infty[.$$

2) Sa bijection réciproque $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, continue et strictement décroissante n'est rien d'autre qu'elle même ! On a en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 1/(1/x) = x$$

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y = x$ comme axe de symétrie et on aurait pu limiter l'étude de la fonction inverse à l'intervalle $]0, +\infty[$.

V. Fonctions logarithme et exponentielle**V.1. Fonction logarithme****V.1.a) Définition****Définition**

- La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln(\cdot)$ est la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1 de la fonction inverse.
- Autrement dit, c'est la fonction définie par :

$$\begin{cases} \ln(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

V.1.b) Propriétés

Proposition 7. (*fondamentale*)

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Démonstration.

Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable sur cet ensemble. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$\varphi'(x) = \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}x} - \frac{1}{x} = 0$$

Ceci démontre que la fonction φ est constante sur $]0, +\infty[$.

Enfin, on a : $\varphi(1) = \ln(\cancel{y}) - \ln(1) - \ln(\cancel{y}) = \ln(1) = 0$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(x) = 0$, ce qui démontre la propriété. $\square$



Il faut faire attention aux ensembles de définitions des propriétés.

- Par exemple, on a : $\ln((-3) \times (-5)) \neq \underbrace{\ln(-3)}_{\text{non déf.}} + \underbrace{\ln(-5)}_{\text{non déf.}}$

- Par contre, $(-3) \times (-5) = 3 \times 5$.

On a donc : $\ln((-3) \times (-5)) = \ln(3) + \ln(5)$

Proposition 8.

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n \ln(x)$$

$$2. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$3. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Exercice 4

Faire l'étude graphique des fonctions :

$$a. \quad f : x \mapsto \ln(x^2)$$

$$b. \quad g : x \mapsto 2 \ln(x)$$

Proposition 9. (*Dérivée*)

$$1. \quad \text{La fonction } \ln(\cdot) \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction :

× dérivable sur I ,

× telle que : $u(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 5

Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.

$$a. \quad f : x \mapsto \ln(x^2 - 2)$$

$$b. \quad g : x \mapsto \ln(\sqrt{(x^2 + 2)^5})$$

Proposition 10. (*Limites*)

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Exercice 6

Montrer (dans cet ordre !) les propriétés suivantes.

$$1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

Croissances comparées

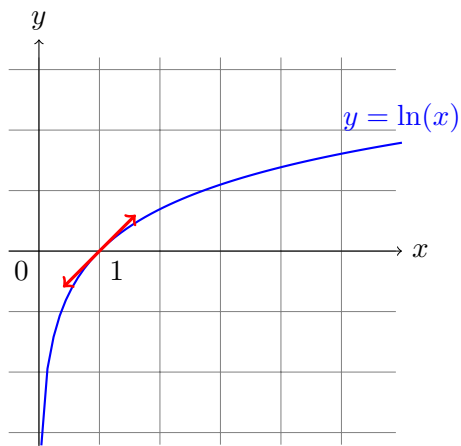
- En $+\infty$, la fonction $\ln(\cdot)$ admet une croissance beaucoup plus faible que les fonctions puissances entières. En d'autres termes, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^p}{x^q} = 0$$

- On dit aussi qu'en $+\infty$, la croissance logarithmique est plus faible que la croissance polynomiale.
- On peut démontrer, à l'aide de la propriété précédente que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln(x))^q = 0$$

V.1.c) Représentation graphique



V.2. Logarithme en base b

Définition

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

- On appelle **logarithme en base b** l'application, notée $\log_b$, définie par :

$$\begin{aligned} \log_b &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \end{aligned}$$

- Lorsque $b = 10$, on appelle la fonction $\log_{10}$ le **logarithme décimal**, et on le note simplement $\log$.

Remarque

- Lorsque $b = e$, on retrouve le logarithme népérien : $\log_e = \ln$
- Notons que, pour tout $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$\log_b(1) = 0 \quad \text{et} \quad \log_b(b) = 1$$

Proposition 11.

Soit $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$2. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}, \log_b(x^n) = n \log_b(x)$$

$$3. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$$

$$4. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Proposition 12. (Dérivée)

Soit $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. La fonction $\log_b(\cdot)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \log'_b(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$$

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction :

× dérivable sur I ,

× telle que : $u(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.

$$(\log_b \circ u)' = \frac{u'}{u \ln(b)}$$

Proposition 13. (Limites)

Soit $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. si $b > 1$:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b(x) = +\infty$

2. si $b < 1$:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b(x) = -\infty$

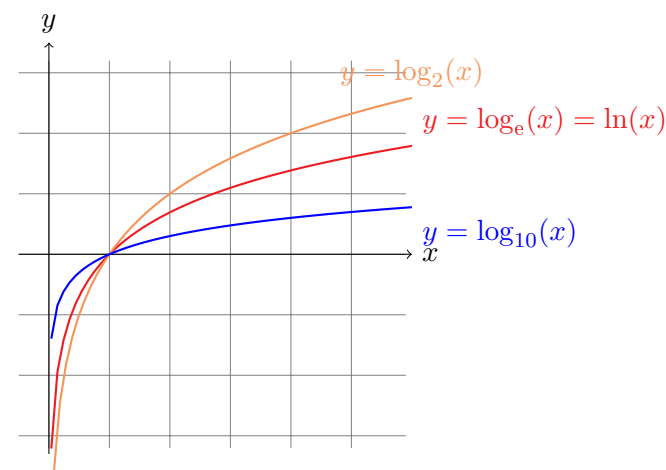
Croissances comparées

- En $+\infty$, la fonction $\log_b(\cdot)$ admet une croissance beaucoup plus faible que les fonctions puissances entières. En d'autres termes, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_b(x))^p}{x^q} = 0$$

- On dit aussi qu'en $+\infty$, la croissance logarithmique est plus faible que la croissance polynomiale.
- On peut démontrer, à l'aide de la propriété précédente que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\log_b(x))^q = 0$$

V.2.a) Représentation graphique

V.3. Fonction exponentielle

V.3.a) Définition

Définition

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est :

- × continue sur $]0, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection on a donc :

1) f est une bijection de l'ensemble $]0, +\infty[$ sur l'ensemble :

$$f(]0, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

2) f admet une bijection réciproque, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: c'est la fonction **exponentielle**.

$$\begin{array}{ccc} \exp & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ & & x \mapsto e^x \end{array}$$

De par cette définition, on a les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}, (y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y)$

2) $\forall y \in \mathbb{R}, \ln(e^y) = y$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln(x)} = x$

V.3.b) Propriétés

Proposition 14. (fondamentale)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x \times e^y$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \Leftrightarrow \ln(e^{x+y}) = \ln(e^x \times e^y) \Leftrightarrow x + y = \underbrace{\ln(e^x)}_x + \underbrace{\ln(e^y)}_y \quad \square$$

Proposition 15.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^x)^n = e^{nx}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

Proposition 16. (Limites)

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Proposition 17. (Dérivée)

1. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$$

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction :

× dérivable sur I ,

× telle que : $u(I) \subset \mathbb{R}$.

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

Croissances comparées

- En $+\infty$, la fonction exp a une croissance beaucoup plus forte que les fonctions puissances entières. En d'autres termes, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^p}{x^q} = +\infty$$

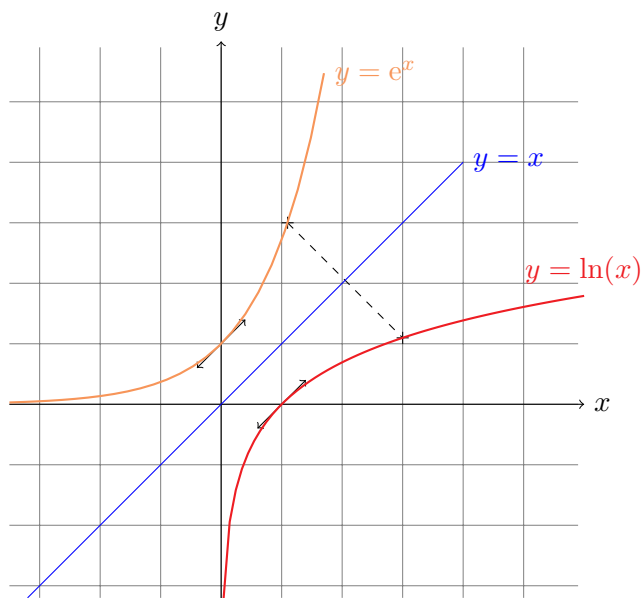
- On peut démontrer, à l'aide de la propriété précédente que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p (e^{-x})^q = 0$$

En $-\infty$, cette fonction tend aussi beaucoup plus vite vers 0 que les fonctions élévation à la puissance entière ne tendent vers l'infini.

V.3.c) Représentation graphique

Les fonctions exponentielle et logarithme étant bijections réciproques l'une de l'autre, la courbe représentative de la fonction exponentielle est obtenue par symétrie de la courbe représentative de la fonction $\ln$ par symétrie d'axe $y = x$.



V.4. Puissances quelconques

V.4.a) Définition

Définition

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction élévation à la puissance α , noté $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{array}$$

V.4.b) Propriétés

Proposition 18.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \beta \in \mathbb{R}, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \beta \in \mathbb{R}, x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, y^{-\alpha} = \frac{1}{y^\alpha}$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \beta \in \mathbb{R}, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall y \in \mathbb{R}^{+*}, \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$

Proposition 19. (Dérivée)

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

2. Si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on a : $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \times u'$

Cette formule est valable sur tout ensemble E sur lequel :

- × la fonction u est strictement positive (pour que u^α soit définie),
- × la fonction u est dérivable (pour que u' soit définie).

Démonstration.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $f : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ et $u(x) = \alpha \ln(x)$.

La fonction f est dérivable sur tout ensemble E sur lequel :

- × u est dérivable.

Ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

2. Cette règle s'obtient en écrivant : $u^\alpha = e^{\alpha \ln(u)}$.

Exercice 7

Ensemble de dérivabilité et calcul des dérivées des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$

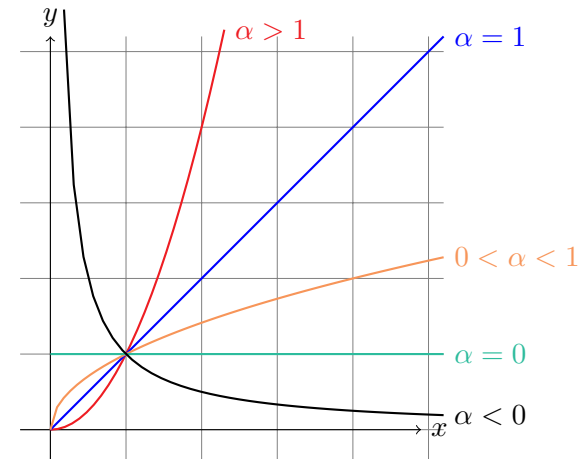
b. $g : x \mapsto (x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{3}}$

Remarque Puissance entière ou puissance quelconque ?

À $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, nous avons deux définitions pour la fonction $x \mapsto x^n$:

- × la définition « classique » : la quantité x^n est le produit de n quantités x .
Avec cette définition, $x \mapsto x^n$ est alors définie sur $\mathbb{R}$.
- × la définition « puissance quelconque » : la quantité x^n est définie à l'aide des fonctions exp et ln comme $x^n = e^{n \ln(x)}$.
Avec cette définition, $x \mapsto x^n$ est alors définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il convient de remarquer que ces deux définitions coïncident sur $\mathbb{R}^{+*}$.

V.4.c) Représentation graphique

□

Exercice 8 où l'on démontre que $-1 = 1 \dots$

Commenter la démonstration suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

V.5. BONUS : définition des fonctions racines $n^{\text{ème}}$

V.5.a) Via le théorème de la bijection

Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est :

- × continue sur $[0, +\infty[$,
- × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection on a donc :

1) f est une bijection de l'ensemble $[0, +\infty[$ sur l'ensemble :

$$f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0, +\infty[.$$

2) f admet une bijection réciproque, continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$: c'est la fonction **racine $n^{\text{ème}}$** .

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{\cdot} & : & \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

De par cette définition, on a les propriétés suivantes.

$$1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, (y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y})$$

$$2) \quad \forall y \in \mathbb{R}^+, (\sqrt[n]{y})^n = y \qquad 3) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt[n]{(x^n)} = x$$

V.5.b) Via les puissances quelconques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction racine $n^{\text{ème}}$ peut aussi être définie comme un opérateur puissance quelconque. Plus précisément :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{\cdot} & : & \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \end{array}$$

- Dans ce cas, la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est définie seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut la prolonger par continuité en 0 en posant : $(0)^{\frac{1}{n}} = 0$.

- Cette définition coïncide avec celle obtenue par le théorème de la bijection sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

Remarque

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la définition de $\sqrt[n]{\cdot}$ comme une fonction élévation à la puissance quelconque possède les deux avantages suivants.

- Les propriétés s'écrivent de manière naturelle :

$$\times \forall y \in \mathbb{R}^+, (\sqrt[n]{y})^n = (y^{\frac{1}{n}})^n = y$$

$$\times \forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt[n]{x^n}) = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x$$

- En notant $f : x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, on obtient les propriétés de dérivée :

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$2. \quad (f \circ u)' = (\sqrt[n]{u})' = (u^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \times u'$$

Bijection réciproque de $x \mapsto x^3$

La fonction $f : x \mapsto x^3$ est :

- × continue sur $\mathbb{R}$,
- × strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Formellement, on peut donc définir sa bijection réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ définie précédemment peut alors être vue comme restriction sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$ de la fonction f^{-1} .

- ☞ Par convention, on définit la fonction $\sqrt[3]{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ même si, par application du théorème de la bijection, on pourrait définir la réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

VI. Fonction partie entière

VI.1. Définition

Définition

On appelle fonction **partie entière** la fonction suivante.

$$\begin{aligned} \lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor = \text{le plus grand entier } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leq x \end{aligned}$$

Remarque

- On peut aussi définir $\lfloor x \rfloor$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n \leq x < n + 1$.
- De manière informelle, $\lfloor x \rfloor$ peut être défini comme étant « l'entier relatif directement plus petit que x ».
- De ce fait, on parle parfois de **partie entière par défaut**, ce qui permet aussi de marquer la différence avec la fonction **partie entière par excès**, notée $\lceil x \rceil$ et définie comme suit.

$$\begin{aligned} \lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \lceil x \rceil = \text{le plus petit entier } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x \leq n \end{aligned}$$

- On peut aussi définir $\lceil x \rceil$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n - 1 < x \leq n$.
- De manière informelle, $\lceil x \rceil$ peut être défini comme étant « l'entier relatif directement plus grand que x ».
- Il est immédiat que :
 - $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor n \rfloor = n$
 - $\forall n \in \mathbb{Z}, \lceil n \rceil = n$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

VI.2. Propriétés

Proposition 20. (fondamentale)

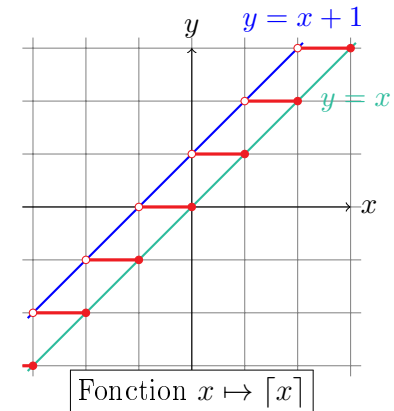
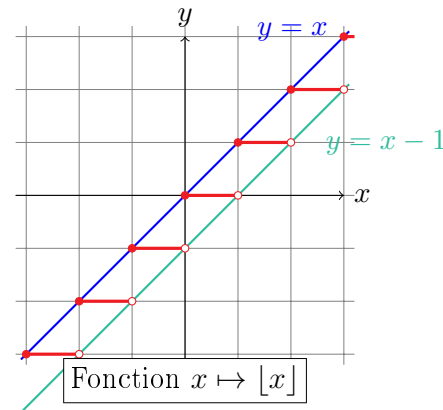
1) De par la définition : $\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\lfloor u \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq u < n + 1)$

2) $\forall u \in \mathbb{R}, u - 1 < \lfloor u \rfloor \leq u$ et $\forall u \in \mathbb{R}, u \leq \lceil u \rceil < u + 1$

Proposition 21.

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :
 - × sur tout intervalle $[k, k + 1[$, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante égale à k ,
 - × sur tout intervalle $]k, k + 1[$, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue.
- On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :
 - × sur tout intervalle $]k, k + 1]$, la fonction $x \mapsto \lceil x \rceil$ est constante égale à $k + 1$,
 - × sur tout intervalle $]k, k + 1[$, la fonction $x \mapsto \lceil x \rceil$ est continue.
- On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lceil x \rceil = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lceil x \rceil = +\infty$

VI.3. Représentation graphique



Exercice 9

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = -\lfloor -x \rfloor$. En déduire la valeur de $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$.

Exercice 10

Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Quelle est cette fonction ?

Étude graphique d'une fonction contenant une partie entière

On considère ici une fonction $f : x \mapsto \lfloor g(x) \rfloor$ où $g(x)$ est une quantité dépendant de x . L'étude graphique de f peut se faire comme suit.

1. On commence par l'étude de g .

On déterminera notamment l'ensemble $\text{Im}(g)$, image de la fonction g .

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a :

$$\lfloor g(x) \rfloor = k \Leftrightarrow k \leq g(x) < k+1$$

Pour $k \in \mathbb{Z} \cap \text{Im}(g)$, on va donc chercher à déterminer l'ensemble des éléments x tels que : $k \leq g(x) < k+1$.

3. D'après la propriété fondamentale, on a : $g(x) - 1 < \lfloor g(x) \rfloor \leq g(x)$.

En traçant les courbes des fonctions $x \mapsto g(x) - 1$ et $x \mapsto g(x)$ on repère graphiquement les intervalles où $\lfloor g(x) \rfloor = k$.

Exemple

Étude de la fonction $f : x \mapsto \lfloor (x-2)^2 \rfloor$.

1. La fonction $g : x \mapsto (x-2)^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ($\text{Im}(g) = \mathbb{R}^+$).

2. Soit $k \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}^+$ autrement dit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \lfloor (x-2)^2 \rfloor = k &\Leftrightarrow k \leq (x-2)^2 < k+1 \\ &\Leftrightarrow k \leq (x-2)^2 \quad \text{ET} \quad (x-2)^2 < k+1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k} \leq \sqrt{(x-2)^2} \quad \text{ET} \quad \sqrt{(x-2)^2} < \sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k} \leq |x-2| \quad \text{ET} \quad |x-2| < \sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k} \leq |x-2| < \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

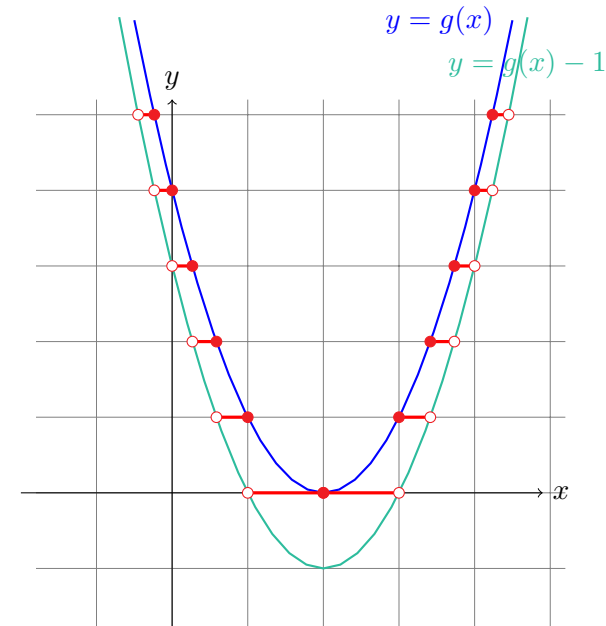
a) Si $x-2 \geq 0$: on a alors $|x-2| = x-2$ et :

$$\begin{aligned} \lfloor (x-2)^2 \rfloor = k &\Leftrightarrow \sqrt{k} \leq x-2 < \sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow 2 + \sqrt{k} \leq x < 2 + \sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow x \in [2 + \sqrt{k}, 2 + \sqrt{k+1}[\end{aligned}$$

b) Si $x-2 < 0$: on a alors $|x-2| = -x+2$ et :

$$\begin{aligned} \lfloor (x-2)^2 \rfloor = k &\Leftrightarrow \sqrt{k} \leq -x+2 < \sqrt{k+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k}-2 \leq -x < \sqrt{k+1}-2 \\ &\Leftrightarrow 2 - \sqrt{k+1} < x \leq 2 - \sqrt{k} \\ &\Leftrightarrow x \in]2 - \sqrt{k+1}, 2 - \sqrt{k}] \end{aligned}$$

3. Représentation graphique.



VII. Fonctions trigonométriques

VII.1. Fonction sinus

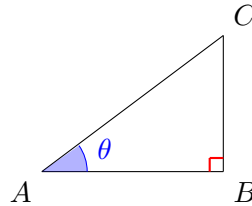
Définition

Soit ABC un triangle rectangle en B .

On note θ une mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

On appelle **sinus** de θ , le réel, noté $\sin(\theta)$, défini par :

$$\sin(\theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{CAB}}{\text{hypoténuse}}$$



Proposition 22.

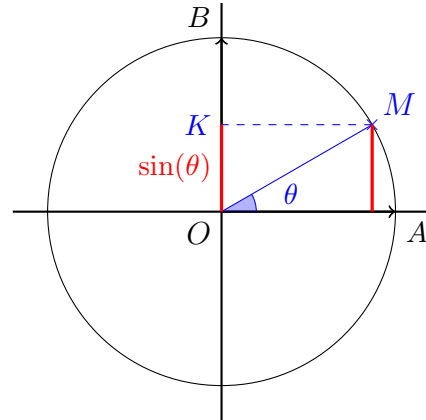
Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

On construit le point K , la projection orthogonale de M sur la droite (OB) .

On note enfin θ une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Alors :

$$\sin(\theta) = \frac{OK}{OM} = OK$$



Définition

On appelle fonction sinus la fonction :

$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

On réalise l'étude graphique de $\sin$ à l'aide de la méthodologie présentée en début de chapitre.

1) $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$

2) Étudions la parité et la périodicité de $\sin$ pour réduire l'intervalle d'étude.

Proposition 23.

La fonction $\sin$ est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Par construction de $\sin$. □

Conséquence

On peut réduire l'ensemble d'étude à un intervalle de longueur 2π . Prenons par exemple l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Proposition 24.

La fonction $\sin$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Par construction de $\sin$. □

Conséquence

On peut réduire l'ensemble d'étude $[-\pi, \pi]$ à l'intervalle $[0, \pi]$.

3) Étude de $\sin$ sur $[0, \pi]$.

Proposition 25.

a) La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$

Conséquence

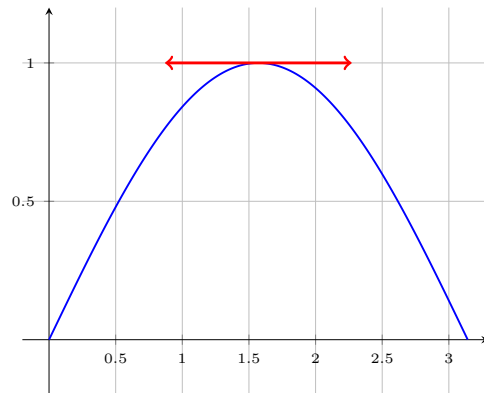
- On sait :

$$\begin{aligned} \times \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \sin'(x) = \cos(x) > 0 \\ \times \sin' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \\ \times \forall x \in]\frac{\pi}{2}, \pi], \sin'(x) = \cos(x) < 0 \end{aligned}$$

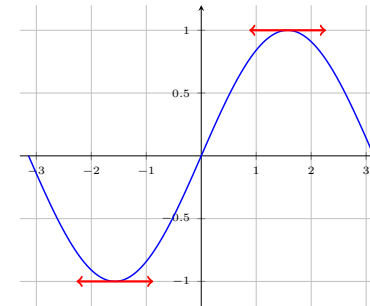
- On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\sin'(x)$	+	0	-
Variations de sin	0	1	0

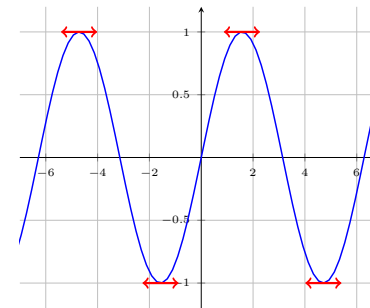
- On obtient la portion de courbe suivante :



- Par imparité de la fonction sin, on peut prolonger le tracé de cette courbe sur $[-\pi, 0]$ par symétrie de centre l'origine.



- On prolonge enfin le tracé de la courbe sur $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité de sin.



VII.2. Fonction cosinus

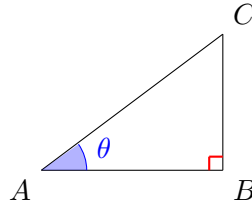
Définition

Soit ABC un triangle rectangle en B .

On note θ une mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

On appelle **cosinus** de θ , le réel, noté $\cos(\theta)$, défini par :

$$\cos(\theta) = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{CAB}}{\text{hypoténuse}}$$



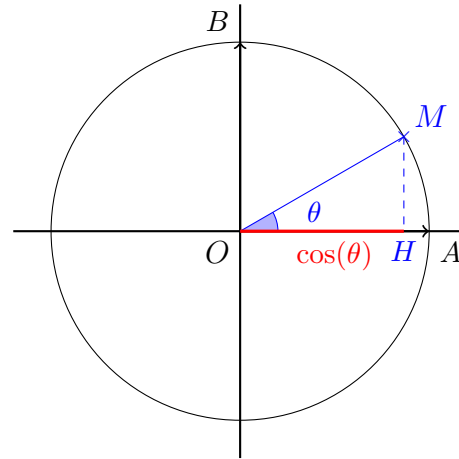
Proposition 26.

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

On construit le point H , la projection orthogonale de M sur la droite (OA) . On note enfin θ une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Alors :

$$\cos(\theta) = \frac{OH}{OM} = OH$$



Définition

On appelle fonction cosinus la fonction :

$$\begin{aligned} \cos &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

On réalise l'étude graphique de $\cos$ à l'aide de la méthodologie présentée en début de chapitre.

1) $\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$

2) Étudions la parité et la périodicité de $\cos$ pour réduire l'intervalle d'étude.

Proposition 27.

La fonction $\cos$ est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Par construction de $\cos$. □

Conséquence

On peut réduire l'ensemble d'étude à un intervalle de longueur 2π . Prenons par exemple l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Proposition 28.

La fonction $\cos$ est paire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Par construction de $\cos$. □

Conséquence

On peut réduire l'ensemble d'étude $[-\pi, \pi]$ à l'intervalle $[0, \pi]$.

3) Étude de $\cos$ sur $[0, \pi]$.

Proposition 29.

a) La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

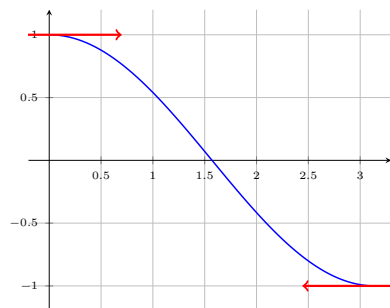
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$

Conséquence

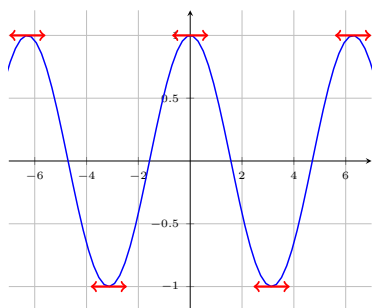
- On sait : $\forall x \in]0, \pi[, \cos'(x) = \sin(x) > 0$.
- On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	π
Signe de $\cos'(x)$	0	0
Variations de $\cos$	-1	1

- On obtient la portion de courbe suivante :



- Par parité et 2π -périodicité de $\cos$, on obtient.

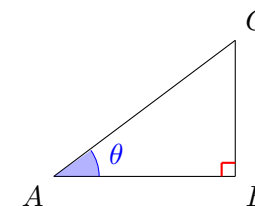
**VII.3. Fonction tangente****Définition**

Soit ABC un triangle rectangle en B .

On note θ une mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

On appelle **tangente** de θ , le réel, noté $\tan(\theta)$, défini par :

$$\tan(\theta) = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{CAB}}{\text{côté adjacent à } \widehat{CAB}}$$

**Proposition 30.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Soit ABC un triangle rectangle en B tel qu'une mesure de l'angle $\widehat{CAB}$ est x .

Alors :

$$\tan(x) = \frac{BC}{AB} = \frac{BC \times AC}{AB \times AC} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC} \times \frac{1}{\frac{AB}{AC}}$$

On en déduit :

$$\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

□

Proposition 31.

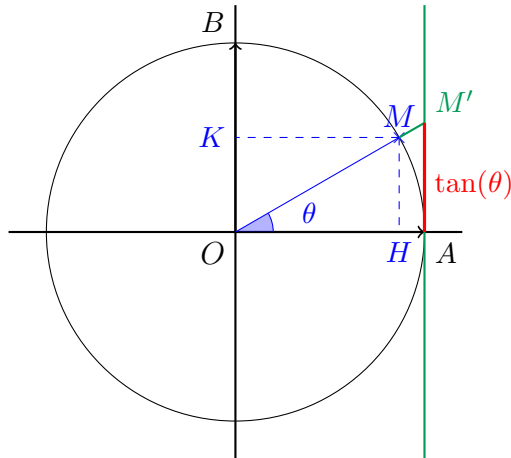
Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan.

Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, distinct de B et du point $(0, -1)$.

On construit le point M' , intersection de la droite (OM) et de la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$. On note enfin θ une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Alors :

$$\tan(\theta) = \frac{AM'}{OA} = AM'$$

**Remarque**

C'est en fait de cette définition que provient le choix du nom de **tangente**.

Définition

On appelle fonction tangente la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \tan & : & \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \tan(x) \end{array}$$

On réalise l'étude graphique de $\tan$ à l'aide de la méthodologie présentée en début de chapitre.

$$1) \mathcal{D}_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

2) Étudions la parité et la périodicité de $\tan$ pour réduire l'intervalle d'étude.

Proposition 32.

La fonction $\tan$ est π -périodique sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

Démonstration.

Soit $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

• Tout d'abord, on a bien : $x + \pi \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

• Ensuite :

$$\begin{aligned} \tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} && (\text{par propriétés de } \cos \text{ et } \sin) \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \end{aligned}$$

□

Conséquence

On peut réduire l'ensemble d'étude à un intervalle de longueur π . Prenons par exemple l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Proposition 33.

La fonction $\tan$ est impaire sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

Démonstration. Soit $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

- Tout d'abord, on a bien : $-x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

• Ensuite :

$$\begin{aligned} \tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \quad (\text{par parité de cos et} \\ &\quad \text{imparité de sin}) \\ &= -\tan(x) \end{aligned}$$

□

Conséquence

On peut réduire l'ensemble d'étude $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$.

3) Étude de $\tan$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$.

Proposition 34.

a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\tan$ est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$).

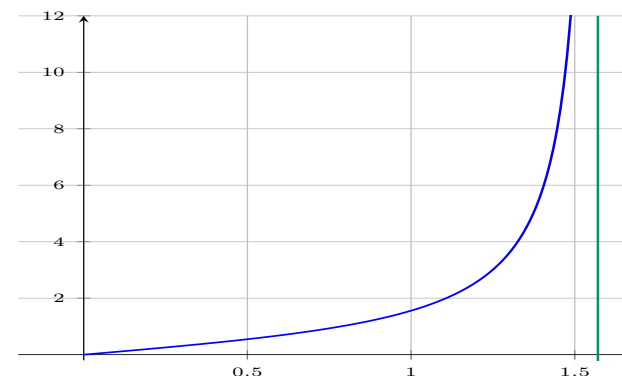
b) $\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Conséquence

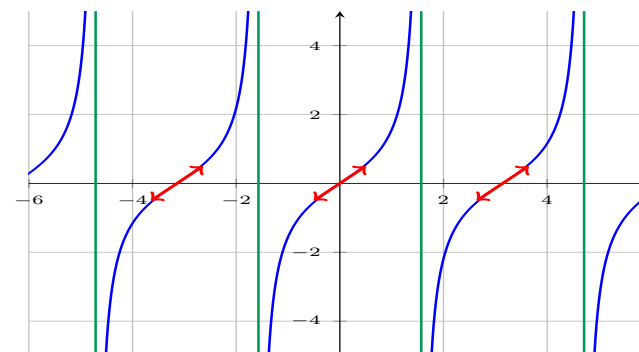
- On sait : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$.
- On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\tan'(x)$	+	
Variations de $\tan$	0 $\nearrow$	$+\infty$

- On obtient la portion de courbe suivante :



- Par imparité et π -périodicité de $\tan$, on obtient.



VII.4. Formules trigonométriques

VII.4.a) Formule fondamentale

Proposition 35.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

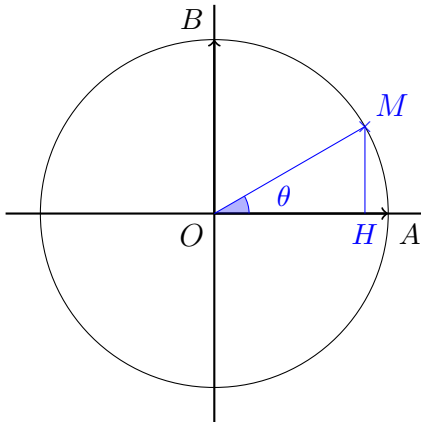
Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé direct du plan.

On note M le point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 tel qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ soit x

On construit le point H , la projection orthogonale de M sur la droites (OA) .



Le triangle MHO est rectangle en H .

Ainsi, par théorème de Pythagore :

$$\begin{array}{ccccc} OH^2 & + & HM^2 & = & OM^2 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \cos^2(x) & + & \sin^2(x) & = & 1 \end{array}$$

□

VII.4.b) Angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

VII.4.c) Propriétés élémentaires

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on connaît toutes les identités qui suivent, que l'on retrouve facilement *en dessinant simplement un cercle trigonométrique*

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

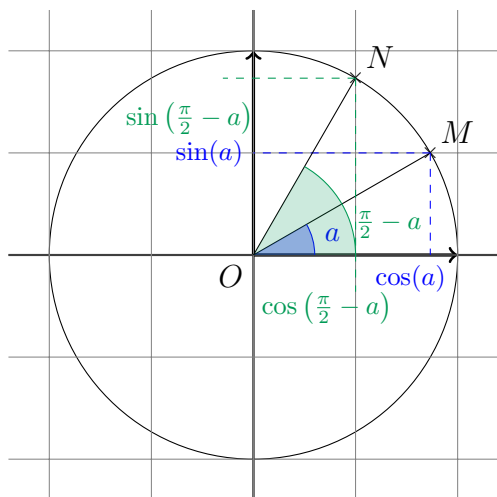
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Exemple de tracé pour retrouver les formules.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\sin(x) \neq 0$ et $\cos(x) \neq 0$, on a de plus :

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

VII.4.d) Formules d'addition et de duplication

Proposition 36. (Formules d'addition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$1) \quad \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$2) \quad \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$3) \quad \sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

$$4) \quad \sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

Démonstration.

1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ un repère orthonormé direct du plan.

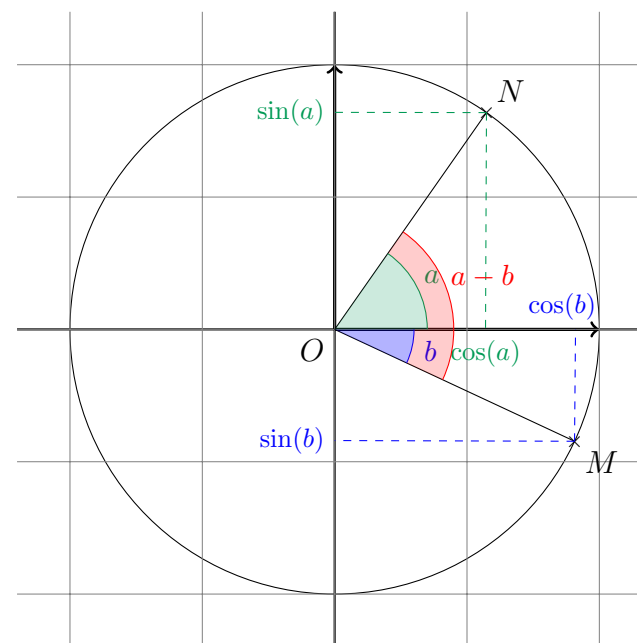
On note M le point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 tel qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{OA}, \vec{OM})$ soit b .

On note N le point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 tel qu'une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{OA}, \vec{ON})$ soit a .

- Remarquons tout d'abord :

$$OM = ON = 1$$

On obtient la configuration ci-après.



- Notons de plus :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ON}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) \quad [2\pi] \\ &\equiv a - b \quad [2\pi]\end{aligned}$$

On obtient alors :

× d'une part :

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \rangle &= OM \times ON \times \cos((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})) \\ &= 1 \times 1 \times \cos((\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})) \\ &= \cos(a - b)\end{aligned}$$

× d'autre part, par définition de l'abscisse d'un vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \rangle = \cos(b) \cos(a) + \sin(b) \sin(a)$$

On en déduit bien : $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$.

2) On utilise la formule précédente :

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos(a - (-b)) \\ &= \cos(a) \cos(-b) + \sin(a) \sin(-b) \\ &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) (-\sin(b)) \quad (\text{car } \cos \text{ est paire et } \sin \text{ est impaire}) \\ &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)\end{aligned}$$

3) On utilise la formule 2) :

$$\begin{aligned}\sin(a - b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(b) \\ &= \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)\end{aligned}$$

4) On utilise la formule 3) :

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \sin(a - (-b)) \\ &= \sin(a) \cos(-b) - \sin(-b) \cos(a) \\ &= \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a) \quad (\text{car } \cos \text{ est paire et } \sin \text{ est impaire})\end{aligned}$$

□

Exercice 11

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide d'une formule d'addition.

Démonstration.

On remarque :

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

□

Proposition 37.

Soit $(a, b) \in \left(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$.

1) Si $a - b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)}$$

2) Si $a + b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \tan(b)}$$

Proposition 38. (Formules de duplication)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$1) \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$$

$$2) \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

Démonstration.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos(a + a) \\ &= \cos(a) \cos(a) - \sin(a) \sin(a) && \text{(par formule de duplication)} \\ &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) \\ &= 2 \cos^2(a) - 1 \\ &= 2(1 - \sin^2(a)) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(a) \end{aligned}$$

• Ensuite :

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= \sin(a + a) \\ &= \sin(a) \cos(a) + \sin(a) \cos(a) \\ &= 2 \sin(a) \cos(a) \end{aligned}$$

□

Exercice 12

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide d'une formule de duplication.

Démonstration.

On remarque :

$$\frac{\pi}{6} = 2 \frac{\pi}{12}$$

Or :

× d'une part :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

× d'autre part :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(2 \frac{\pi}{12}\right) \\ &= 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

Ainsi :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, on obtient finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

□

Proposition 39.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ tel que : $2a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Démonstration.

À faire.

VII.4.e) Somme et différence de cosinus et de sinus**Proposition 40.**

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.

$$1) \quad \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$2) \quad \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$3) \quad \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$4) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Démonstration.

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.

1) D'après les formules d'addition de cos, avec $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$:

× D'une part :

$$\cos\left(\frac{p+\cancel{q}}{2} + \frac{p-\cancel{q}}{2}\right) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Ainsi :

$$\cos(p) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

× D'autre part :

$$\cos\left(\frac{\cancel{p}+q}{2} - \frac{\cancel{p}-q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

□

Ainsi :

$$\cos(q) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \cos(p) + \cos(q) \\ = & \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) - \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ & + \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ = & 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

2) On démontre de même les autres égalités.

□

VII.4.f) Expression de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ avec $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Proposition 41.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

On note $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \boxed{\cos(x) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \\ 2) \quad & \boxed{\sin(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1 + t^2}} \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

1) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \cancel{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cancel{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

(par formule de duplication)

2) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \times 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cancel{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}} \\ &= 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

(par formule de duplication)

□

Remarque

Ces formules seront d'une grande utilité lors de calculs d'intégrales. Le changement de variable $\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ permet effectivement de calculer de nombreuses intégrales d'expressions trigonométriques.

VIII. Fonctions hyperboliques

VIII.1. Fonction sinus hyperbolique

Définition

On appelle fonction **sinus hyperbolique**, et on note sh la fonction :

$$\begin{array}{lcl} \text{sh} & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proposition 42.

La fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $-x \in \mathbb{R}$.
- De plus :

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{-e^{-x} + e^x}{2} = -\text{sh}(x)$$

Conséquence

On peut réduire l'intervalle d'étude de sh de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}_+$.

Proposition 43.

1) La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$

Démonstration.

1) La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x)$$

□

Remarque

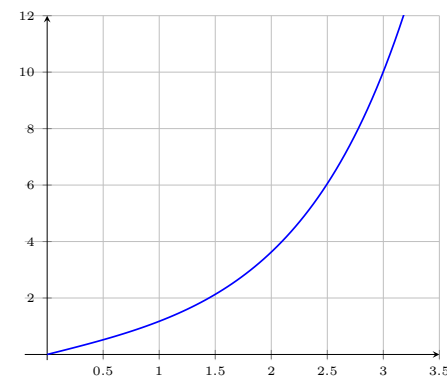
- On déduit de la proposition précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

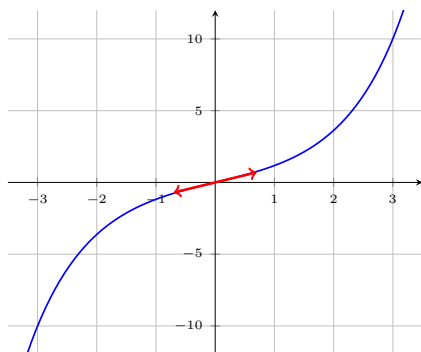
- On obtient le tableau de variations suivant.

x	0 $+\infty$
Signe de $\text{sh}'(x)$	+
Variations de sh	$0 \nearrow +\infty$

- • On en déduit la portion de courbe suivante.



- On prolonge le tracé de la courbe de sh sur $\mathbb{R}$ par imparité de sh.



VIII.2. Fonction cosinus hyperbolique

Définition

On appelle fonction **cosinus hyperbolique**, et on note ch la fonction :

$$\begin{array}{lcl} \text{ch} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proposition 44.

La fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $-x \in \mathbb{R}$.
- De plus :

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x)$$

□

Conséquence

On peut réduire l'intervalle d'étude de ch de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}_+$.

Proposition 45.

1) La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$$

Démonstration.

1) La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$$

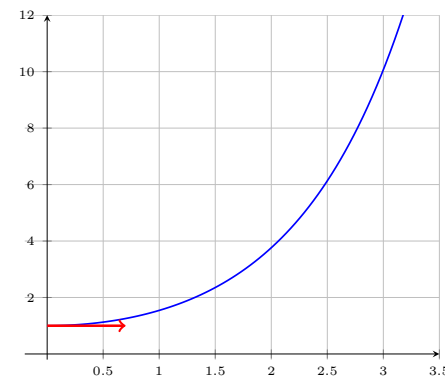
□

Remarque

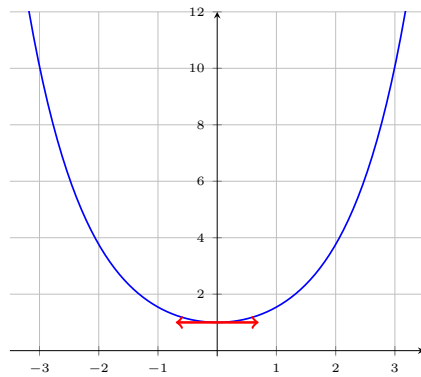
- On déduit de la proposition précédente et des propriétés de la fonction sh, le tableau de variations suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $\text{ch}'(x)$	0	+
Variations de ch	1	$+\infty$

- On en déduit la portion de courbe suivante.



- On prolonge le tracé de la courbe de ch sur $\mathbb{R}$ par parité de ch .



VIII.3. Quelques formules

Proposition 46.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x}$

2) $\boxed{\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}}$

3) $\boxed{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1}$

Démonstration.

À faire.

□