

CH II : Récurrence, calculs de sommes et produits

I. Récurrence

Dans la suite de ce paragraphe, on s'intéresse à des propriétés $\mathcal{P}$ définies sur l'ensemble des entiers naturels. La notation n désignera un entier naturel.

Exemple

- 1) $\mathcal{P}(n) : 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7
- 2) $\mathcal{P}(n) : 3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11
- 3) $\mathcal{P}(n) : \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
- 4) $\mathcal{P}(n) : 2^n \leq n!$

Le but de cette section est de définir une méthode de raisonnement qui nous permettra de montrer que ce type de propriétés est vérifié pour tout entier naturel n . Autrement dit, être capable de prouver un énoncé du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est un multiple de 7}}_{\mathcal{P}(n)}$$

Remarque

- La propriété $(\mathcal{P}(n) : 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est un multiple de 7})$ dépend de n .
- Par contre, la propriété $a : (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n))$ est une propriété **indépendante** de n puisque n est alors porté par un quantificateur. La variable n est muette et on pourrait changer son nom sans changer le sens de a .

- On a notamment :

$$a \Leftrightarrow \forall \text{truc} \in \mathbb{N}, 3^{2 \times \text{truc} + 1} + 2^{\text{truc} + 2} \text{ est un multiple de 7}$$

Par la suite, on gardera la notation n , plus adaptée.

I.0. Une première tentative de preuve

Intéressons-nous à cette propriété $\mathcal{P}(n) : 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7 et tentons de voir si nous pouvons la démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a : } 3^{2 \times 0 + 1} + 2^{0 + 2} = 7$$

$\hookrightarrow$ on en déduit que $\mathcal{P}(0)$ est vérifié

$$\text{On a : } 3^{2 \times 1 + 1} + 2^{1 + 2} = 3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35 = 7 \times 5$$

$\hookrightarrow$ on en déduit que $\mathcal{P}(1)$ est vérifié

$$\text{On a : } 3^{2 \times 2 + 1} + 2^{2 + 2} = 3^5 + 2^4 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$$

$\hookrightarrow$ on en déduit que $\mathcal{P}(2)$ est vérifié

...

...

...

Remarque

- Nous avons montré $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$. Pour démontrer que la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ il faudrait aussi démontrer $\mathcal{P}(4)$, $\mathcal{P}(5)$... Ce type de démonstration n'est évidemment pas raisonnable puisqu'elle demande l'étude d'un nombre infini de cas.
- Changeons de point de vue. Au lieu de montrer chaque cas, on démontre que le passage d'un cas à un autre (symbolisé par la flèche ) est valide.
- Supposons que l'on est capable de démontrer que tous ces passages (toutes les flèches rouges) sont valides.

Dans ce cas, si l'on sait que $\mathcal{P}(r)$ est vraie pour un rang $r \in \mathbb{N}$ alors :

- × $\mathcal{P}(r+1)$ est vraie (passage du rang r au rang $r+1$ valide),
- × ainsi $\mathcal{P}(r+2)$ est aussi vérifiée (puisque le passage du rang $r+1$ au rang $r+2$ valide),
- × et donc $\mathcal{P}(r+3)$ aussi ...

Au final, cela prouve que la propriété est vérifiée pour tous les rangs plus grands que r .

- Le **principe de récurrence** formalise ce mécanisme.

I.1. Principe de récurrence

Théorème 1. *Principe de récurrence*

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée
2. Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel n .

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

Remarque

- À n fixé, la proposition $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ signifie que le passage du rang n au rang $n+1$ est valide.
- La proposition $(\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)))$ signifie donc que tous les passages d'un rang au suivant sont valides.
- Le principe de récurrence s'appuie sur la définition axiomatique de $\mathbb{N}$. C'est l'ensemble :
 - × qui contient 0,
 - × qui contient le successeur de chacun de ses éléments.

Procéder par récurrence, c'est montrer que l'ensemble des éléments vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ est $\mathbb{N}$ via cette définition axiomatique.

I.2. Modèle de rédaction

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$. où $\mathcal{P}(n)$:

...

► Initialisation : $\mathcal{P}(0)$?

...

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. ...)

...

...

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Remarque (erreurs classiques)

Il est (malheureusement !) fréquent de voir dans les copies, les trois types d'erreurs suivantes.

1) Montrons par récurrence que : ~~$\mathcal{P}(n)$~~ .

↪ par récurrence, on démontre qu'une propriété est vraie **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, pas seulement à un rang n donné.

2) ...où $\mathcal{P}(n)$: ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ , ...

↪ nous avons déjà discuté de ce point dans la première remarque du cours : une propriété commençant par $\forall n \in \mathbb{N}$ est indépendante de n !

3) Supposons que : ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ , $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

↪ ceci n'a pas de sens ! On ne peut supposer la propriété vraie pour tout n : c'est précisément ce que l'on souhaite démontrer.

Exemple

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

Notation : on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: u_n est un multiple de 7.

► **Initialisation**

On a : $u_0 = 3^{2 \cdot 0 + 1} + 2^{0 + 2} = 3 + 2^2 = 7$. Ainsi, u_0 est un multiple de 7.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. u_{n+1} est un multiple de 7).

Par définition de u_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} \\ &= 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\ &= 3^2(3^{2n+1}) + 2^{n+3} \\ &= 3^2(u_n - 2^{n+2}) + 2^{n+3} \\ &= 3^2 u_n + 2^{n+3} - 3^2 \times 2^{n+2} \\ &= 9 u_n + 2^{n+2} (2 - 9) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$), on sait que u_n est un multiple de 7. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 7k$. On a donc :

$$u_{n+1} = 9(7k) + 2^{n+2}(-7) = 7(9k - 2^{n+2})$$

Ainsi, u_{n+1} est un multiple de 7. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

I.3. Initialisation en n_0

On rencontrera souvent des énoncés du type : $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Le schéma précédent s'adapte à ce type d'énoncé.

Théorème 2.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathcal{P}(n_0)$ est vérifiée

2. Hérédité : $\forall n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Autrement dit : $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$

Exemple

Montrer que : $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$

Démontrons par récurrence : $\forall n \geq 4, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $2^n \leq n!$.

► **Initialisation**

On sait : $2^4 = 16$ et $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Or : $16 \leq 24$.

D'où $\mathcal{P}(4)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $2^{n+1} \leq (n+1)!$).

Remarquons tout d'abord : $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

Or, par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$), on sait : $2^n \leq n!$. D'où :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \leq 2 \times n! \\ &\leq \underbrace{(n+1) \times n!}_{(n+1)!} \quad (\text{car } 2 \leq n+1 \text{ puisque } n \geq 4 \geq 1) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \geq 4, \mathcal{P}(n)$.

I.4. Récurrence double

Théorème 3.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies
2. Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \text{ ET } \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geq 0$.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

Démontrons par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

► Initialisation

- On sait : $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

- De plus : $u_1 = 1$ et $2^{1+1} - 3^1 = 4 - 3 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.

Démontrons $\mathcal{P}(n+2)$ (i.e. $u_{n+2} = 2^{n+3} - 3^{n+2}$)

Par définition de u_{n+2} :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+2} - 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} - 3^n) && (\text{par hypothèse de récurrence } (\mathcal{P}(n) \text{ ET } \mathcal{P}(n+1))) \\ &= 2^{n+1}(5 \times 2 - 6) - 3^n(-6 + 3 \times 5) \\ &= 2^{n+1}4 - 3^n9 = 2^{n+3} - 3^{n+2} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+2)$.

Par principe de récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Remarque

- On peut aussi réaliser des récurrences triples, quadruples ...
- Le choix du type de récurrence à effectuer est dicté par la forme de l'objet considéré dans la propriété. Ici, il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. La récurrence double est donc plus adaptée.
- Le principe de récurrence double peut sembler plus puissant que le principe de récurrence simple. Ces principes sont en fait équivalents.
- Plus précisément, on peut résoudre l'exercice précédent à l'aide d'une récurrence simple. On démontre alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(n) \text{ ET } \mathcal{P}(n+1))$. (ce qui démontre notamment que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$)

I.5. Récurrence forte

Théorème 4.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$ et telle que :

1. Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie
2. Hérédité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(0) \text{ ET } \mathcal{P}(1) \text{ ET } \mathcal{P}(2) \text{ ET } \dots \text{ ET } \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

Alors la propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n \geq 0$.

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.

Démontrons par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : u_n \leq 2^n$.

► **Initialisation**

- On sait : $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1 = 1$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)$ (on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n).

Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$)

Par définition de u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \underbrace{u_0}_{\substack{\leq 2^0 \\ (d'après \\ \mathcal{P}(0))}} + \underbrace{u_1}_{\substack{\leq 2^1 \\ (d'après \\ \mathcal{P}(1))}} + \dots + \underbrace{u_n}_{\substack{\leq 2^n \\ (d'après \\ \mathcal{P}(n))}}$$

$$\text{Ainsi : } u_{n+1} \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Remarque

- Encore une fois, c'est la forme de l'objet considéré dans la propriété qui nous a amené à faire une récurrence forte : l'objet u_{n+1} est défini à l'aide de tous les u_i précédents.
- Cet exemple est en fait artificiel puisque l'on pourrait démontrer qu'à partir du rang 1, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2. On a en effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n$.
- Le principe de récurrence forte peut sembler plus puissant que le principe de récurrence simple. Ces principes sont en fait équivalents.
- Plus précisément, on peut résoudre l'exercice précédent à l'aide d'une récurrence simple. On démontre alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \leq n, \mathcal{P}(k))$. (ce qui démontre notamment que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$)

II. Sommes finies

En mathématiques, il est fréquent de tomber sur des quantités définies comme des sommes finies. Considérons les exemples suivants.

Exemple de sommes finies

1) $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{15}$

2) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024}$

3) $u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots + \frac{u^n}{n}$

4) $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$

La manière dont on a défini ces quantités n'est pas très satisfaisante. On utilise notamment la notation « $\dots$ » qui n'est pas rigoureuse. On va donc introduire un symbole qui va nous permettre de définir rigoureusement ces quantités.

II.1. Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes.

Notation Symbole $\sum$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La somme finie des éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ est notée comme suit.

$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

- La variable i est appelée variable de sommation.
- Plus généralement, on peut réaliser la somme d'un nombre fini d'éléments, indexé par un sous-ensemble fini I de $\mathbb{N}$. On notera alors $\sum_{i \in I} u_i$.

Par exemple : $\sum_{i \in \{3,5,6,9\}} u_i = u_3 + u_5 + u_6 + u_9$.

- Avec cette notation, on a : $\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i \in [1,n]} u_i$
(i prend toutes les valeurs entières entre 1 et n)

Remarque *Indices de sommation*

- La variable de sommation est dite **muette** : changer son nom n'affecte pas le calcul de la somme.

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{j=1}^n u_j = \sum_{k=1}^n u_k$$

- Les sommes ne commencent pas forcément à l'indice 1.

On peut évidemment construire les sommes $\sum_{i=0}^n u_i$, $\sum_{i=2}^n u_i$, $\sum_{i=3}^n u_i$ et plus

généralement $\sum_{i=m}^n u_i$.

- Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. On utilisera, sans distinction, l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$\sum_{i=m}^n u_i = \sum_{i \in [m,n]} u_i = \sum_{m \leq i \leq n} u_i$$

On a notamment, si $m > n$: $\sum_{i=m}^n u_i = \sum_{i \in \emptyset} u_i = 0$

et si $m = n$: $\sum_{i=m}^m u_i = u_m$

Exercice 1

Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes précédentes.

$$1) 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = \sum_{i=0}^n 2^i$$

$$2) 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{15} = \sum_{i=4}^{15} 3^i$$

$$3) \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024} = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{2^i}$$

$$4) u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots + \frac{u^n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{u^i}{i}$$

$$5) 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50 = \sum_{i=1}^{25} (-1)^{i+1} 2i$$

II.2. Règles de calcul

Proposition 1.

1) Sommation d'une constante

Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$:

$$\sum_{i=1}^n a = n \times a$$

$$\sum_{i=m}^n a = (n - m + 1) \times a$$

- On notera au passage qu'une somme indexée par $i \in \llbracket m, n \rrbracket$ contient $n - m + 1$ termes.
- Ces formules sont valables pour tout élément a **indépendant de l'indice de sommation** i .
- Par exemple, on a :

$$\sum_{i=4}^{13} 7 = (13 - 4 + 1) \times 7 = 10 \times 7 = 70$$

2) Sommation par paquets

Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leq n$:

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{i=m+1}^n u_i$$

- Par analogie avec le calcul intégral, on parle aussi de **relation de Chasles** sur les sommes finies.
- Par exemple, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=4}^{13} 7 &= \sum_{i=4}^9 7 + \sum_{i=10}^{13} 7 \\ &= (9 - 4 + 1) \times 7 + (13 - 10 + 1) \times 7 \\ &= 6 \times 7 + 4 \times 7 = (6 + 4) \times 7 = 70 \end{aligned}$$

3) Linéarité de l'opérateur Σ

Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n (\lambda u_i) = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n = \lambda \sum_{i=1}^n u_i$$

$$\sum_{j=1}^n (u_j + v_j) = \sum_{j=1}^n u_j + \sum_{j=1}^n v_j$$

- La première formule est valable pour tout λ **indépendant de l'indice de sommation** i .
- Par exemple, si $q \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^6 (3i - 5q^i) + \sum_{i=3}^6 (7 - 2i) &= \sum_{i=0}^6 3i - \sum_{i=0}^6 5q^i + \sum_{i=3}^6 7 - \sum_{i=3}^6 2i \\ &= 3 \sum_{i=0}^6 i - 5 \sum_{i=0}^6 q^i + \sum_{i=3}^6 7 - 2 \sum_{i=3}^6 i \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} 3 \sum_{i=0}^6 i - 2 \sum_{i=3}^6 i &= 3 \left(\sum_{i=0}^2 i + \sum_{i=3}^6 i \right) - 2 \sum_{i=3}^6 i \\ &= 3 \sum_{i=0}^2 i + 3 \sum_{i=3}^6 i - 2 \sum_{i=3}^6 i \\ &= 3 \sum_{i=0}^2 i + \sum_{i=3}^6 i \\ &= 3 \frac{3 \times (2 + 0)}{2} + \frac{4 \times (3 + 6)}{2} = 9 + 18 = 27 \end{aligned}$$

$$\text{et : } 5 \sum_{i=1}^6 q^i = 5 \frac{1 - q^7}{1 - q}$$

$$\text{enfin : } \sum_{i=3}^6 7 = (6 - 3 + 1) \times 7 = 28$$

4) Changements d'indices

Décalage d'indice : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=0}^n u_j = \sum_{k=1}^{n+1} u_{k-1} = \sum_{\ell=2}^{n+2} u_{\ell-2}$

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. $\sum_{j=m}^n u_j = \sum_{k=0}^{n-m} u_{k+m}$ en posant $k = j - m$
 $= \sum_{i=m+\ell}^{n+\ell} u_{i-\ell}$ en posant $i = j + \ell$

Sommer dans l'autre sens : Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{j=0}^n u_j = \sum_{i=0}^n u_{n-i}$

On peut écrire une formule similaire pour les sommes commençant à l'indice 1

$$\sum_{j=1}^n u_j = \sum_{i=0}^{n-1} u_{n-i}$$

Exercice 2

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)\sqrt{n-k} = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i+1)\sqrt{i}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note : $u_k = (k+1)\sqrt{n-k}$. À l'aide de la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} ((n-k)+1)\sqrt{n-(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1)\sqrt{k} \end{aligned}$$

5) Sommes télescopiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1$$

En effet : $\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$
 $= \sum_{k=1}^n u_{k+1} - \sum_{k=1}^n u_k$
 $= \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k$ (par changement d'indice)
 $= (\sum_{k=2}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{n+1} u_k) - (\sum_{k=1}^1 u_k + \sum_{k=2}^n u_k)$ (par sommation par paquets)
 $= u_{n+1} - u_1$

- On peut généraliser la formule précédente :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$$

Exercice 3

Soit $n \geq 2$. On souhaite calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - k}$.

1) Démontrer : $\frac{1}{k^2 - k} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k-1}$, où α et β sont deux réels que vous déterminerez.

2) Calculer S_n à l'aide de sommes télescopiques.

Remarque

- On a utilisé un cas un peu particulier de la sommation par paquets où l'on a écarté seulement un terme de la somme. On peut directement écrire :

$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + \sum_{i=2}^n u_i = \sum_{i=1}^{n-1} u_i + u_n$$

6) Sommation sur une union d'ensembles

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

$$\sum_{i \in A \cup B} u_i = \sum_{i \in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i - \sum_{i \in A \cap B} u_i$$

- Par exemple, si on prend $A = \{2, 4, 5, 9\}$ et $B = \{1, 2, 9, 11\}$, on a :

$$\times A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 9, 11\}$$

$$\times A \cap B = \{2, 9\}$$

$$\times \sum_{i \in A \cup B} u_i = u_1 + u_2 + u_4 + u_5 + u_9 + u_{11}$$

$$\times \sum_{i \in A \cap B} u_i = u_2 + u_9$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A} u_i + \sum_{i \in B} u_i &= (\underline{u_2} + u_4 + u_5 + \underline{u_9}) + (u_1 + \underline{u_2} + \underline{u_9} + u_{11}) \\ &= (u_1 + u_2 + u_4 + u_5 + u_9 + u_{11}) + (u_2 + u_9) \end{aligned}$$

Exercice 4

Soient a et b deux réels. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \times \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner de même une factorisation de $a^n - b^n$.

II.3. Sommes usuelles**II.3.a) Sommes des n premiers entiers**

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leq m \leq n$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n - S_{m-1} = \sum_{k=m}^n k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

► **Initialisation**

- On remarque : $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

$$\begin{aligned} \text{Or on a : } \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n)) \\ &= \frac{n+1}{2}(n+2) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$. □

Remarque

- La formule $(S_n - S_{m-1})$ peut se retenir comme étant le résultat du **demi-produit** :
 - × **du nombre de termes** de la somme $(n - m + 1)$,
 - × **par la somme** $(n + m)$ formée **du 1^{er} terme** (m) **et du dernier** (n) .
- Cette formule se démontre à l'aide de la précédente.

$$\text{Remarquons tout d'abord : } \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{m-1} k + \sum_{k=m}^n k.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n k &= \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{m-1} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = \frac{n^2 + n - m^2 + m}{2} \\ &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} \end{aligned}$$

(on note que $P(n) = n^2 + n - m^2 + m$ est un polynôme de degré 2 en la variable n ; il admet $-m$ comme racine ; on peut donc le factoriser par $(n + m)$)

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut la somme des n premiers entiers naturels pairs ? impairs ?

Démonstration.

Notons U_n la somme des n premiers entiers pairs et V_n la somme des n premiers entiers impairs. On a alors :

$$U_n = \sum_{k=1}^n (2k) = 2 \sum_{k=1}^n k = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

- D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k) - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \sum_{k=1}^n k - n \\ &= \frac{2n(n+1)}{2} - n = n((n+1) - 1) = n^2 \end{aligned}$$

II.3.b) Sommes des n premiers carrés d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$T_n = \sum_{k=0}^n k^2 = \boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

► **Initialisation**

- On remarque : $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2$ et $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1.$

D'où $\mathcal{P}(1).$

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*.$

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$)

$$\begin{aligned} \text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad (\text{par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n)) \\ &= \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) = \frac{n+1}{6} (n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1).$

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n).$

(on note que $P(n) = 2n^2 + 7n + 6$ est un polynôme de degré 2 en la variable n ; il admet -2 comme racine ; on peut donc le factoriser par $(n+2)$) $\square$

II.3.c) Sommes des n premiers cubes d'entiers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$R_n = \sum_{k=0}^n k^3 = \boxed{\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = S_n^2$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

► **Initialisation**

- On remarque : $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$

D'où $\mathcal{P}(1).$

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*.$

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$)

$$\begin{aligned} \text{On écrit : } \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad (\text{par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1).$

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n).$

Remarque

- Même si les formules font apparaître des divisions par 2, 6 et 4, il est évident que la somme des n premiers entiers, carrés, cubes a un résultat entier.
- On peut démontrer ces formules de manière directe. Par exemple, pour la somme des n premiers entiers, on commence par remarquer :

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit : } \sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) &= 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &\quad \parallel \quad \parallel \\ &= (n+1)^2 - 1^2 \quad 2 \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n \end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} 2 \left(\sum_{k=1}^n k \right) &= (n+1)^2 - 1^2 - n = n^2 + 2n + \cancel{1} - \cancel{1} - n \\ &= n^2 + n = n(n+1) \end{aligned}$$

II.3.d) Sommes géométriques

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $0 \leq m \leq n$.

$$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \boxed{\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{k=m}^n q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Remarque

- Si $q = 1$, on a : $\sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$
- Si $q = 1$, on a : $\sum_{k=m}^n q^k = \sum_{k=m}^n 1^k = \sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1$

□

Évidemment, on peut démontrer cette formule par récurrence sur n . Mais il est plus simple ici de faire une démonstration directe.

Démonstration.

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leq n$. Alors :

$$\begin{aligned} (1-q) \sum_{k=m}^n q^k &= \sum_{k=m}^n q^k - \sum_{k=m}^n q^{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^n (q^k - q^{k+1}) = q^m - q^{n+1} \end{aligned} \quad \square$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes finies suivantes.

a. $\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{k+1}}$ b. $\sum_{k=0}^5 k (3k^2 - 2)$

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_k = \frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{3^k}{4 \times 4^k} = \frac{1}{4} \frac{3^k}{4^k} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \end{aligned}$$

b. $\sum_{k=0}^5 k (3k^2 - 2) = \sum_{k=0}^5 (3k^3 - 2k)$

$$\begin{aligned} &= 3 \sum_{k=0}^5 k^3 - 2 \sum_{k=0}^5 k \\ &= 3 \left(\frac{6 \times 5}{2}\right)^2 - 2 \frac{6 \times 5}{2} \\ &= 3 (15)^2 - 2 \times 15 = 3 \times 225 - 30 \\ &= 675 - 30 = 645 \end{aligned}$$

III. Sommes doubles

III.1. Sommes de tous les éléments d'un tableau rectangulaire

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On considère des complexes $u_{i,j}$ avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On range ces valeurs dans un tableau rectangulaire.

$$\begin{array}{cccccc} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,j} & \cdots & u_{1,p} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,j} & \cdots & u_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{i,1} & u_{i,2} & \cdots & u_{i,j} & \cdots & u_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,j} & \cdots & u_{n,p} \end{array}$$

On souhaite calculer la somme S de tous ces termes.

III.1.a) Sommation suivant les lignes

On calcule la somme des termes de la 1^{ère} ligne, puis on ajoute la somme des termes de la 2^{ème} ligne, ..., et enfin la somme des termes de la n ^{ème} ligne.

On a alors : $S = \sum_{j=1}^p u_{1,j} + \sum_{j=1}^p u_{2,j} + \cdots + \sum_{j=1}^p u_{n,j}$

ce qui s'écrit encore : $S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p u_{i,j} \right)$

III.1.b) Sommation suivant les colonnes

On calcule la somme des termes de la 1^{ère} colonne, puis on ajoute la somme des termes de la 2^{ème}, ..., et enfin la somme des termes de la p ^{ème} colonne.

On a alors : $S = \sum_{i=1}^n u_{i,1} + \sum_{i=1}^n u_{i,2} + \cdots + \sum_{i=1}^n u_{i,p}$

ce qui s'écrit encore : $S = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n u_{i,j} \right)$

III.1.c) Formule d'interversion des sommes finies

Bien entendu, nous calculons la même somme avec ces deux méthodes, d'où la **formule d'interversion des sommes finies**.

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p u_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n u_{i,j} \right)$$

- On peut aussi noter ces sommes sous forme compacte.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p u_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n u_{i,j} \right)$$

- Si $n = p$, on pourra utiliser la notation suivante :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n u_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n u_{i,j} \right)$$

Nombre de termes sommés

Il y a deux manières de calculer le nombre de termes sommés.

- 1) Il y en a $n \times p$ puisqu'on somme tous les éléments d'un tableau comportant n lignes et p colonnes.
- 2) On peut noter que chaque terme $u_{i,j}$ compte pour un élément sommé. Le nombre de termes est donc donné par la somme double :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} 1 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p 1 \right) = \sum_{i=1}^n p = n \times p$$

Exercice 6

Calculer la somme double suivante : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} i$.

Démonstration.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p i \right) = \sum_{i=1}^n p \times i = p \sum_{i=1}^n i = p \frac{n(n+1)}{2} \quad \square$$

À retenir

Ce premier exemple simple permet d'illustrer la « technique » de calcul des sommes doubles :

- 1) On écrit la somme double à l'aide de la formule de sommation suivant les lignes (ou les colonnes).
(ce choix pourra modifier la complexité des calculs)
- 2) Le calcul de somme double se résume alors à un calcul de sommes simples.

Exercice 7

Soient $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^p b_j \right)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}} a_i \times b_j &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_i \times b_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifiée car la quantité $\sum_{j=1}^p b_j$ est indépendante de l'indice de sommation i . $\square$

III.2. Sommes doubles à indices dépendants

III.2.a) Somme des termes du triangle supérieur

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons maintenant un tableau carré ($n = p$) et calculons la somme des termes se trouvant au-dessus de la diagonale.

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,i} & \cdots & u_{1,j} & \cdots & u_{1,n} \\
 u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,i} & \cdots & u_{2,j} & \cdots & u_{2,n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 u_{i,1} & u_{i,2} & \cdots & u_{i,i} & \cdots & u_{i,j} & \cdots & u_{i,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 u_{j,1} & u_{j,2} & \cdots & u_{j,i} & \cdots & u_{j,j} & \cdots & u_{j,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,i} & \cdots & u_{n,j} & \cdots & u_{n,n}
 \end{array}$$

- En sommant suivant les lignes, on obtient :

$$T = \sum_{j=1}^n u_{1j} + \sum_{j=2}^n u_{2j} + \cdots + \sum_{j=n}^n u_{nj} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n u_{i,j} \right)$$

- En sommant suivant les colonnes, on obtient :

$$T = \sum_{i=1}^1 u_{i1} + \sum_{i=2}^2 u_{i2} + \cdots + \sum_{i=n}^n u_{in} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j u_{i,j} \right)$$

Ces deux sommes étant égales, on obtient la formule :

$$\boxed{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n u_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j u_{i,j} \right)}$$

Comment retenir cette formule ?

On peut retenir cette formule en considérant l'encadrement $1 \leq i \leq j \leq n$. Si on souhaite obtenir la formule de sommation suivant les lignes (*i.e.* commencer par une somme sur i), on peut procéder comme suit.

- On supprime la variable j de l'encadrement : $1 \leq i \leq \cdot \leq n$

On doit donc considérer une somme : $\sum_{i=1}^n$

- On considère alors l'encadrement immédiat de j : $i \leq j \leq n$

On doit donc considérer une somme : $\sum_{j=i}^n$

On retrouve alors la formule : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n u_{i,j} \right)$

(on procède de même pour la formule de sommation suivant les colonnes)

Nombre de termes sommés

Il y a deux manières de calculer le nombre de termes sommés.

- 1) Il y a n^2 termes dans le tableau carré et n termes sur la diagonale.

Il y a donc $n^2 - n$ termes hors diagonale.

Ainsi, il y a $\frac{n^2 - n}{2}$ termes dans le triangle supérieur strict.

Et donc $\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ termes dans le triangle supérieur.

- 2) On peut noter que chaque terme $u_{i,j}$ compte pour un élément sommé. Le nombre de termes est donc donné par la somme double :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j 1 \right) = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

III.2.b) Sommation des termes du triangle supérieur strict

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule maintenant uniquement les termes du triangle supérieur strict.

$$\begin{array}{cccccccc}
 u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & u_{1,j} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\
 u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & \cdots & u_{2,j} & \cdots & \cdots & u_{2,n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\
 u_{i,1} & u_{i,2} & \cdots & u_{i,i} & u_{i,i+1} & \cdots & \cdots & \cdots & u_{i,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 u_{j,1} & u_{j,2} & \cdots & u_{j,i} & \cdots & u_{j,j} & u_{j,j+1} & \cdots & u_{j,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & u_{n-1,n} \\
 u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,i} & \cdots & u_{n,j} & \cdots & \cdots & u_{n,n}
 \end{array}$$

- En sommant suivant les lignes, on obtient :

$$U = \sum_{j=2}^n u_{1,j} + \sum_{j=3}^n u_{2,j} + \cdots + \sum_{j=n}^n u_{n-1,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n u_{i,j} \right)$$

- En sommant suivant les colonnes, on obtient :

$$U = \sum_{i=1}^1 u_{i2} + \sum_{i=1}^2 u_{i3} + \cdots + \sum_{i=1}^{n-1} u_{in} = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} \right)$$

Ces deux sommes étant égales, on obtient la formule :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n u_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} u_{i,j} \right)$$

Comment retenir cette formule ?

Comme précédemment, on considère l'encadrement $1 \leq i < j \leq n$.

Pour obtenir la formule de sommation suivant les lignes :

- On supprime la variable j de l'encadrement : $1 \leq i < \cdot \leq n$

On doit donc considérer une somme : $\sum_{i=1}^{n-1}$

- On considère alors l'encadrement immédiat de j : $i < j \leq n$

On doit donc considérer une somme : $\sum_{j=i+1}^n$

$$\text{On retrouve alors la formule : } \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n u_{i,j} \right)$$

(on procède de même pour la formule de sommation suivant les colonnes)

Nombre de termes sommés

Il y a deux manières de calculer le nombre de termes sommés.

- 1) On a déjà vu qu'il y a $\frac{n^2-n}{2}$ termes dans le triangle supérieur strict.
- 2) On peut noter que chaque terme $u_{i,j}$ compte pour un élément sommé. Le nombre de termes est donc donné par la somme double :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} 1 \right) = \sum_{j=2}^n (j-1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$$

Exercice 8

Soit $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

IV. Produits finis

IV.1. Définition

Notation Symbole $\prod$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Le produit fini des éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ est noté comme suit.

$$\prod_{i=1}^n u_i = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$$

Remarque

On utilisera, sans distinction, l'une ou l'autre des notations suivantes :

$$\prod_{i=m}^n u_i = \prod_{i \in \llbracket m, n \rrbracket} u_i = \prod_{m \leq i \leq n} u_i$$

On a notamment, si $m > n$: $\prod_{i=m}^n u_i = \prod_{i \in \emptyset} u_i = 1$

et si $m = n$: $\prod_{i=m}^m u_i = u_m$

On réalise l'étude des produits finis par analogie avec celle des sommes finies.

IV.2. Règles de calcul

Proposition 2.

1) Produit fini d'une constante

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leq n$.

$$\prod_{i=1}^n a = a^n$$

$$\prod_{i=m}^n a = a^{n-m+1}$$

- Ces formules sont valables pour tout élément a indépendant de l'indice de multiplication i .

2) Produit par paquets

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leq n$.

$$\prod_{i=1}^n u_i = \prod_{i=1}^m u_i \times \prod_{i=m+1}^n u_i$$

3) Comportement de $\prod$ vis à vis de λu_i et $u_i \times v_i$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $m \leq n$.

$$\prod_{i=1}^n \lambda u_i = \lambda u_1 \times \lambda u_2 \times \dots \times \lambda u_n = \lambda^n \prod_{i=1}^n u_i$$

$$\prod_{j=1}^n (u_j \times v_j) = \prod_{j=1}^n u_j \times \prod_{j=1}^n v_j$$

et

$$\prod_{j=1}^n \frac{u_j}{v_j} = \frac{\prod_{j=1}^n u_j}{\prod_{j=1}^n v_j}$$

- La première formule est valable pour tout élément λ indépendant de l'indice de multiplication i .

4) Changements d'indices

Décalage d'indice :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{j=0}^n u_j = \prod_{k=1}^{n+1} u_{k-1} = \prod_{\ell=2}^{n+2} u_{\ell-2}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } (m, n) \in \mathbb{N}^2. \quad \prod_{j=m}^n u_j &= \prod_{k=0}^{n-m} u_{k+m} \quad \text{en posant } k = j - m \\ &= \prod_{i=m+\ell}^{n+\ell} u_{i-\ell} \quad \text{en posant } i = j + \ell \end{aligned}$$

Multiplier dans l'autre sens : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\prod_{j=0}^n u_j = \prod_{i=0}^n u_{n-i}$$

On peut écrire une formule similaire pour les sommes commençant à l'indice 1

$$\prod_{j=1}^n u_j = \prod_{i=0}^{n-1} u_{n-i}$$

5) Produits télescopiques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe dont aucun des termes n'est nul. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\prod_{k=1}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_1}$$

et

$$\prod_{k=m}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_m}$$

6) Produit sur une union d'ensembles

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe dont aucun des termes n'est nul. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

$$\prod_{i \in A \cup B} u_i = \frac{\prod_{i \in A} u_i \times \prod_{i \in B} u_i}{\prod_{i \in A \cap B} u_i}$$

Remarque

Ces formules s'obtiennent traduction des formules sur les sommes suivant le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{lcl} \Sigma & \longleftrightarrow & \Pi \\ + & \longleftrightarrow & \times \\ - & \longleftrightarrow & / \end{array}$$

Via ce dictionnaire, nous avons donc affaire aux mêmes formules.

IV.3. Fonction factorielle

Définition

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on nomme **factorielle** n et on note $n!$ la quantité :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

- Par convention, on note : $0! = 1$.

(correspond à l'écriture : $0! = \prod_{k=1}^0 k = \prod_{k \in \llbracket 1, 0 \rrbracket} k = \prod_{k \in \emptyset} k = 1$, la quantité 1 étant l'élément neutre pour le produit)

Proposition 3. (immédiate)

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$$