

Intégrales fonctions de leurs bornes**Exercice 1**

Dériver les fonctions suivantes.

$$a. H_1 : x \mapsto \int_3^x e^{\sqrt{t}} dt$$

$$b. H_2 : x \mapsto \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

$$c. H_3 : x \mapsto \int_x^{n^2} e^{\sqrt{t}} dt \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

$$d. H_4 : x \mapsto \int_1^{x^2} e^{5\sqrt{3\ln t}} dt$$

$$e. H_5 : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t+t^2}$$

$$f. H_6 : x \mapsto \int_{-x}^x \sqrt{1+u^2} du$$

$$g. H_7 : x \mapsto \int_{\sqrt{x}}^{e^x} \frac{s}{\ln s} ds$$

Exercice 2

$$1. \text{ Démontrer : } \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}.$$

$$2. \text{ En déduire : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(3).$$

Exercice 3

On note $F : x \mapsto \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$.

a. Donner l'ensemble de définition de F , puis donner le signe de F .

b. Montrer que pour tout $t \geq 0$: $t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$.

c. En déduire un encadrement de $F(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

d. Montrer alors que : $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{3}x^3$.

e. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 4

1. Démontrer : $\forall t \in [0, 1], t \leq e^t - 1 \leq e t$.

2. En déduire : $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 5

Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_x^{x+\frac{1}{x}} e^{-u^2} du$.

Exercice 6

On considère la fonction :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

1. Montrer que F est impaire.

2. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.

3. a) Montrer que la restriction de F sur $\mathbb{R}_+$ présente un maximum en un point dont on précisera le paramètre.

b) Déterminer, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur de ce maximum avec une précision de 10^{-2} .

4. a) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.

5. Donner l'allure du graphe de F .

Exercice 7

On considère la fonction : $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_{-x}^x \sqrt{2 - (\sin(t))^2} dt$$

1. Montrer que F est impaire.
2. Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.
3. Calculer un développement limité de F à l'ordre 3. Que peut-on en déduire sur le graphe de F ?
4. a) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \geq 2x$.
 b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.
 La suite de la question a pour objectif de préciser ce résultat.
 c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence de $k \in \mathbb{N}$ tel que : $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$.
 Puis démontrer :

$$F(x) = 2k \int_0^\pi \sqrt{2 - (\sin(t))^2} dt + 2 \int_{k\pi}^x \sqrt{2 - (\sin(t))^2} dt$$

- d) En déduire que la fonction $x \mapsto F(x) - \frac{F(\pi)x}{\pi}$ est bornée et trouver un équivalent de F au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8

On considère la fonction :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2} dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de F et préciser son domaine d'étude.
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.
3. Donner l'allure du graphe de F .

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction : $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{1+t^n} dt$$

1. Justifier : $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.
2. a) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) \geq \frac{1}{1+x^n} \int_0^x e^t dt$.
 b) En déduire, si elle existe, la limite de F en $+\infty$.
3. Démontrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On désignera sa bijection réciproque par G .
4. Montrer que G est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle : $y' = \frac{1+y^n}{e^y}$.

Exercice 10

On considère la fonction : $F : [-2\pi, 2\pi] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

1. Montrer que F est paire.
2. a) Démontrer : $F(\pi) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{(u+2\pi)^2} - \frac{1}{(u+\pi)^2} \right) \sin(u) du$.
 b) En déduire le signe de $F(\pi)$.
3. En s'inspirant de la question précédente, déterminer le signe de $F(2\pi)$.
4. a) Montrer que F est indéfiniment dérivable sur son ensemble de définition. Préciser la dérivée de F et étudier ses variations.
 b) Montrer alors que F s'annule exactement quatre fois et isoler chacun de ses points d'annulation.
5. a) Vérifier : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |\sin(t) - t| \leq \frac{t^3}{6}$.
 b) En déduire que F se prolonge par continuité en 0 en une fonction G .
 c) Préciser la valeur prise par la fonction G en 0, puis montrer que G est continûment dérivable sur $[-2\pi, 2\pi]$.

Découpage de l'intervalle**Exercice 11**

Calculer les intégrales suivantes.

$$a. \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{11}} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} dx \quad \left| \quad b. \int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1} dx \right.$$

Sommes de Riemann**Exercice 12**

Calculer les limites des suites ci-dessous.

$$a. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad \left| \quad c. w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right.$$

$$b. v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Exercice 13

Calculer, en utilisant une somme de Riemann, les intégrales de $x \mapsto x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin(\pi x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 14

Soit $x \in]-1, +\infty[$.

1. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + x^2 \right) = \frac{(x-1)(x^{2n}-1)}{x+1}$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$.

Exercice 15

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} 1. \left(\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ 2. \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2(k^3+n^3)^{\frac{1}{3}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ 3. \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 4. \left(\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^k \right)^{\frac{1}{n^2}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ 5. \left(\left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \\ 6. \left(\ln(n) - \sum_{p=1}^n \frac{\ln(p+n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \end{array} \right.$$

Exercice 16

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$. On considère la fonction :

$$F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que F induit une bijection continue à réciproque continue de $[0, 1]$ sur $F([0, 1])$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe un unique $x_{n,p} \in [0, 1]$ tel que :

$$\int_0^{x_{n,p}} f(t) dt = \frac{p}{n} \int_0^1 f(t) dt$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(x_{n,p})$. Démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt \right) \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^{-1}$$

Exercice 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}$.
2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_n - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{6n^2}$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Sommation discrète et intégration**Exercice 18**

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

1. Étudier les variations de f .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on pose : $u_n = \sum_{p=2}^n f(p)$.
 - a) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, comparer u_n et la valeur de l'intégrale I_n de la restriction de f sur $[1, n]$.
 - b) Majorer la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - c) En déduire le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

Exercice 19

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{nk}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Croissance de l'intégrale**Exercice 20**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Démontrer :

$$\int_{[a,b]} |f| = \left| \int_{[a,b]} f \right| \Leftrightarrow f \text{ positive ou négative}$$

Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue par morceaux sur le segment $[a, b]$?

Exercice 21

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soient f et g deux fonctions réelles définies et continues sur $[a, b]$.

1. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^b (f(t) + x g(t))^2 dt \end{aligned}$$

Montrer que φ est une fonction polynomiale positive et que, sauf dans un cas particulier que l'on identifiera, son degré est 2.

2. Établir, dans tous les cas, la formule :

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt} \sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}$$

3. Démontrer : $\sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt} + \sqrt{\int_a^b (g(t))^2 dt}$.

Exercice 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$.

- On suppose que f s'annule au plus n fois.
 - Justifier l'existence d'une fonction polynomiale P de degré au plus n dont les racines sont les points d'annulation de f en lesquels la fonction f « change de signe » et sont simples.
 - Montrer alors que l'intégrale de $f \times P$ sur $[0, 1]$ est non nulle.
- On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'intégrale $\int_0^1 x^k f(x) dx$ est nulle. Démontrer que la fonction f admet au moins $n + 1$ points d'annulation.

Exercice 23

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi])$.

- On suppose que f ne s'annule pas sur $]0, \pi[$. Montrer que l'intégrale de la fonction $x \mapsto f(x) \sin(x)$ est non nulle.
- On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que la restriction de f sur $[0, \alpha]$ ne prenne que des valeurs positives et la restriction de f sur $[\alpha, \pi]$ ne prenne que des valeurs négatives.
 - Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la restriction sur $[0, \pi]$ de $x \mapsto \sin(x) + \lambda \cos(x)$ s'annule une unique fois, au point α .
 - Montrer que l'intégrale sur $[0, \pi]$ de la fonction $x \mapsto (\sin(x) + \lambda \cos(x)) f(x)$ est nulle si et seulement si f l'est.
- On suppose :

$$\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx = \int_0^\pi f(x) \cos(x) dx = 0$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois.

Autour de la formule de Taylor**Exercice 24**

Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left((n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 25

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$.

- Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n+1,p-1}$. En déduire, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, une expression explicite de $I_{n,p}$.
- En interprétant, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ comme le reste dans une formule de Taylor-Lagrange, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 26

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $|f|$ et $|f''|$ soient majorées respectivement par M et M'' .

- En appliquant deux fois une inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre 2, montrer que pour tout réel strictement positif a :

$$|2a f'(0) + f(-a) - f(a)| \leq M'' a^2$$

$$b) \text{ En déduire : } |f'(0)| \leq 2 \sqrt{M M''}.$$

(on pourra utiliser une valeur particulière de a dans l'estimation précédente)

- En appliquant la question précédente aux fonctions $t \mapsto f(t+x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f'|$ est bornée et majorer alors sa borne supérieure par un réel ne dépendant que des bornes supérieures de $|f|$ et $|f''|$.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 27

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ telle que : $\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$.

1. Démontrer : $\int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$.
2. Calculer alors : $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + (\cos(t))^2} dt$.

Exercice 28

Calculer les intégrales suivantes.

- a. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Changement de variable : } u = e^x \\ \text{i.e. } \varphi : u \mapsto \ln u \end{array} \right)$
- b. $\int_1^2 \frac{dx}{x + 2\sqrt{x}}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Changement de variable : } u = \sqrt{x} \\ \text{i.e. } \varphi : u \mapsto u^2 \end{array} \right)$
- c. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ $\left(\begin{array}{l} \text{Changement de variable : } u = e^{\sqrt{x}} \\ \text{i.e. } \varphi : u \mapsto (\ln u)^2 \end{array} \right)$
- d. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Changement de variable : } u = \sqrt{1 + e^x} \\ \text{i.e. } \varphi : u \mapsto \ln(u^2 - 1) \end{array} \right)$
- e. $\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx$ $\left(\begin{array}{l} \text{Changement de variable : } u = \sqrt{x^3 + 1} \\ \text{i.e. } \varphi : u \mapsto (u^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right)$
- f. $\int_8^{27} \frac{1}{1 + \sqrt{x^3}} dx$ $\left(\begin{array}{l} \text{Changement de variable : } u = \sqrt[3]{x} \\ \text{i.e. } \varphi : u \mapsto u^3 \end{array} \right)$
- g. $\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$ $\left(\begin{array}{l} \text{Changement de variable : } u = \sqrt{x} \\ \text{i.e. } \varphi : u \mapsto u^2 \end{array} \right)$

Exercice 29

Calculer les intégrales suivantes par changement de variable.
(*changement non précisé !*)

- | | |
|---|---|
| $a. \int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t-2}} dt$ | $c. \int_2^3 \ln(\sqrt[3]{t} - 1) dt$ |
| $b. \int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{2t+1}} dt$ | $d. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$ |

Exercice 30

En faisant les changements de variables indiqués, calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $]0, \frac{\pi}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$ et poser $t = \cos(x)$.

$$x \mapsto \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(3x)}$$
2. $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et poser $t = e^x$.

$$x \mapsto \frac{1}{2 \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) + 1}$$
3. $]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et poser $t = \sqrt{x-2}$.

$$x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x-2}}$$
4. $[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ et poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$x \mapsto \frac{1}{3 \sin(x) + 1}$$
5. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et poser $t = \cos(2x)$.

$$x \mapsto \frac{\cos^3(x) \sin^3(x)}{1 + \sin^2(x)}$$

Exercice 31

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On considère la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1 + \varepsilon t^2}$.

1. À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, trouver une primitive de f considérée sur $] -1, 1[$ lorsque $\varepsilon = -1$.
2. À l'aide du changement de variable $t = \operatorname{sh}(u)$, trouver une primitive de f considérée sur $\mathbb{R}$ lorsque $\varepsilon = 1$.
3. À l'aide d'une intégration par parties judicieuse, retrouver les résultats des questions précédentes.

Exercice 32

Pour tout $x \in] -1, +\infty[$, on pose : $I(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

1. Pour tout $x \in] -1, +\infty[$, donner une expression explicite de $I(x)$.
2. Pour tout $x \in] -1, +\infty[$, calculer $\int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^2}$ en fonction de x et de $I(x)$.
3. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, calculer $\int_0^x \frac{dt}{y^3 + t^3}$ en fonction de x , y et de valeurs prises par la fonction I .

Exercice 33

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on pose : $I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$.

1. Montrer que la fonction I est paire.
2. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, I(x^2) = 2I(x)$.
3. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, I\left(\frac{1}{x}\right) = I(x) - 2\pi \ln(|x|)$.
4. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, |I(x)| \leq 2\pi \ln(1 + |x|)$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $I(x)$.