

Étude de fonctions**Exercice 1**

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \text{a. } f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 2} & \text{c. } f : x \mapsto \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2 + 1} \\ \text{b. } f : x \mapsto e^x \ln(2x + 3) & \text{d. } f : x \mapsto \ln(x^5 + 1) \end{array}$$

Exercice 2 *Entraînement au calcul*

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{l|l} \text{a. } f : x \mapsto 1 + \ln(1 + x) & \text{e. } f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{x^2 - 1} \\ \text{b. } f : x \mapsto \frac{1 + x}{1 + e^x} - x & \text{f. } f : x \mapsto \frac{e^{-7x}}{7} - 1 \\ \text{c. } f : x \mapsto x^{1/x} & \text{g. } f : x \mapsto \sin(2\pi x) + e^{-2x} \\ \text{d. } f : x \mapsto \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right) & \end{array}$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $f : x \mapsto \frac{2x}{1 + x^2}$.

a. Faire l'étude de la fonction f .

b. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre d'antécédents de y par f .

Exercice 4

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$. On a donc trouvé une fonction périodique qui n'admet pas de plus petite période strictement positive.

Exercice 5 *Étude de fonctions*

$$\begin{array}{l|l} \text{a. } f : x \mapsto x^3 - 3x + 1 & \text{f. } f : x \mapsto e^{1/\ln x} \\ \text{b. } f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1} & \text{g. } f : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x}) \\ \text{c. } f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1} & \text{h. } f : x \mapsto x\sqrt{x} \\ \text{d. } f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1 & \text{i. } f : x \mapsto [x] + (x - [x])^2 \\ \text{e. } f : x \mapsto \frac{x}{1 + e^x} & \text{j. } f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \end{array}$$

Logarithme, exponentielle et puissances**Exercice 6**

Montrer (dans cet ordre !) les propriétés suivantes.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$

Exercice 7

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

b. Faire l'étude graphique de la fonction suivante.

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}$$

Exercice 8

Proposer deux méthodes différentes pour définir la fonction racine cinquième. Que pouvez-vous dire des ensembles de définition des deux fonctions que vous venez de définir ?

Exercice 9 *Où l'on démontre que $-1 = 1 \dots$*

Commenter la démonstration suivante.

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Exercice 10

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes, d'inconnue réelle x .

$$(1) \quad 3^{2x} + 7^x = 9^{x+1} \quad | \quad (2) \quad 2^{x+1} - 4^x = 2^{2x+1} - 1 \quad | \quad (3) \quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$$

Exercice 11

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les couples $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} (\ln(x))^2 + (\ln(y))^2 = a(\ln(2))^2 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 12

Résoudre l'inéquation $\ln(|2x+1|) + \ln(|2x-1|) - \ln(|x+1|) < \ln(2)$ d'inconnue réelle x .

Exercice 13

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $1 < a < b$.

1. On considère les deux fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto a^{(b^x)} \quad g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{(a^x)}$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = b^x \left(\ln(a) - \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln(b)\right)$.

b) En déduire la limite de la fonction $\frac{f}{g}$ en $+\infty$. La connaissance de cette limite permet de savoir quelle fonction est « négligeable » au voisinage de $+\infty$; on dit que l'on fait une comparaison locale au voisinage de $+\infty$ des fonctions f et g .

2. En suivant une méthode analogue à celle de la question précédente, comparer les fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$.

$$f_1: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto a^{(a^x)} \quad g_1: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^{(x^a)}$$

$$f_2: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto a^{(b^{\log_a(x)})} \quad g_2: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{(a^{\log_b(x)})}$$

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

1. a) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$.

b) En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.

2. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n}$.

b) En déduire que la suite $(u_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

c) Étudier les variations de la suite $(u_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

d) Justifier alors l'existence d'un réel γ , appelé constante d'Euler, tel que la suite $(u_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ .

3. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n \leq \ln(2) \leq u_{2n} - u_n + \frac{1}{2n}$.

b) En déduire que la suite $(u_{2n} - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$. En utilisant l'encadrement précédent, donner une estimation de $\ln(2)$ avec une précision de 10^{-1} .

Exercice 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_- &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-nx^2} \end{aligned}$$

et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser la régularité de f_n et donner une expression de f'_n et f''_n .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f''_n s'annule en un unique point a_n . Vérifier que le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse a_n appartient à une droite indépendante de l'entier n choisi.
3. Montrer que lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$, la tangente à $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse a_n passe par un point indépendant de n dont on précisera les coordonnées.

Exercice 16

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^2 - 2 \ln(e^x - x) \end{aligned}$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x + 1$.
2. Déterminer le domaine de définition de f et préciser la régularité de cette fonction.
3. Étudier les variations de f .
4. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = x^2 - 2 \ln(-x) - 2 \ln\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$.

En déduire que f admet une limite en $-\infty$, que l'on déterminera.

5. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = x^2 - 2x - 2 \ln(1 - xe^{-x})$.
6. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera, puis que le graphe Γ de f est asymptote à une parabole $\mathcal{P}$ dont on déterminera une équation.
Étudier alors la position relative de Γ et de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 17

L'objectif de l'exercice est de montrer que pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\min(m^{\frac{1}{n}}, n^{\frac{1}{m}}) \leq 3^{\frac{1}{3}}$$

On rappelle que si $\mathcal{E}$ est un ensemble fini de réels, on désigne par $\min(\mathcal{E})$ le plus petit élément de $\mathcal{E}$.

1. Étudier les variations de la fonction suivante.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Déterminer alors la valeur maximale prise par la fonction f .

2. Comparer $f(2)$ et $f(3)$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{3}}$.
3. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
a) Vérifier : $\left(\min(m^{\frac{1}{n}}, n^{\frac{1}{m}})\right)^{\frac{m}{n} + \frac{n}{m}} \leq f(m)f(n)$.
b) Vérifier : $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$. Conclure quant à l'objectif de cet exercice.

Exercice 18

Résoudre : $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leq \ln(2)$.

Exercice 19

Résoudre dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$: $\begin{cases} 2 \log_x(y) + 2 \log_y(x) = -5 \\ xy = e \end{cases}$

Exercice 20

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x .

1. $2^{(x^3)} = 3^{(x^2)}$
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $\log_a(x) = \log_x(a)$
3. $\log_2(x) - \log_2(x) = 1$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^x + 2^{x+1} + \dots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \dots + 3^{x+n}$

Fonctions trigonométriques**Exercice 21**

Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques sur leur domaine de définition $\mathcal{D}_f$ (à déterminer) et déterminer leur plus petite période, c'est-à-dire le plus petit réel $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x+T) = f(x)$.

$$\begin{array}{l|l} 1. f : t \mapsto \cos(\omega t + \varphi), \text{ où } (\omega, \varphi) \in \mathbb{R}^2 & 3. f : x \mapsto \frac{1}{\cos(t) + \cos(2t)} \\ 2. f : t \mapsto \sin^2(t) \cos(2t) & 4. f : x \mapsto 1 - \tan^2(t) \end{array}$$

Exercice 22

Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$$

Exercice 23

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

Exercice 24

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes, d'inconnue réelle x .

$$\begin{array}{l|l|l} (1) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) & (3) \sin(x) + \cos(2x) = 0 & (5) \tan(x) = \sin(2x) \\ (2) \sin(x) = \cos(x) & (4) \tan(x) = \cos(x) & (6) \tan(2x) = \cos(x) \end{array}$$

Exercice 25

Déterminer l'ensemble des solutions des inéquations suivantes, d'inconnue réelle x .

$$(1) \sin(x) + \cos(x) > 1 \quad | \quad (2) \tan(x) \leq \sin(x) \quad | \quad (3) \tan(2x) \geq \cos(x)$$

Exercice 26

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes, d'inconnue réelle x .

$$\begin{array}{l|l} (1) \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 & (3) \tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) = 0 \\ (2) \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 & \end{array}$$

On pourra factoriser les expressions mises en jeu dans les deux premières équations et transformer la dernière en une équation en $\tan(x)$.

Exercice 27

On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples de $[-\pi, \pi[\times]0, \pi]$ tels que :

$$\begin{cases} \cos(2x) = \cos(2y) \\ \sin(3x) = \sin(3y) \end{cases}$$

Montrer qu'un élément (x, y) de $[-\pi, \pi[\times]0, \pi]$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si l'une des quatre assertions suivantes est vérifiée.

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{cases} x - y \equiv 0 \quad [\pi] \\ x - y \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} & (2) \begin{cases} x + y \equiv 0 \quad [\pi] \\ x - y \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} \\ (3) \begin{cases} x - y \equiv 0 \quad [\pi] \\ x + y \equiv \frac{\pi}{3} \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} & (4) \begin{cases} x + y \equiv 0 \quad [\pi] \\ x + y \equiv \frac{\pi}{3} \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases} \end{array}$$

Déterminer alors explicitement l'ensemble $\mathcal{S}$. En déduire tous les couples de réels

$$(x, y) \text{ vérifiant } \begin{cases} \cos(2x) = \cos(2y) \\ \sin(3x) = \sin(3y) \end{cases}.$$

Exercice 28

On considère l'équation (E) $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$ d'inconnue réelle x , dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions. On se propose de résoudre l'équation (E) par trois méthodes distinctes.

1. Démontrer : $\mathcal{S} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$.

2. 1^{ère} méthode de résolution.

- a) Montrer que toute solution x de (E) vérifie $\sin(x) + \cos(x) \leq 1$.
- b) Déterminer l'ensemble des réels x de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ tel que : $\sqrt{2} \sin(x) \leq 1$.
- c) Démontrer : $\mathcal{S} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

3. 2^{ème} méthode de résolution. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

- a) Développer l'expression $\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} \right)^4$.
- b) Montrer que x est une solution de (E) si et seulement si $\sin(x) \cos(x) = 0$.
- c) Retrouver l'ensemble des solutions de (E) .

4. 3^{ème} méthode de résolution. On pose :

$$\begin{array}{ccc} f : [0, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} \end{array}$$

a) Préciser la régularité de f puis montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$f'(x) = \frac{(\cos(x))^{\frac{3}{2}} - (\sin(x))^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\sin(x)\cos(x)}}.$$

- b) Étudier les variations de f au sens strict.
- c) En déduire l'ensemble des réels de $[0, \frac{\pi}{2}]$ en lesquels la fonction f prend la valeur 1.
- d) Retrouver alors l'ensemble $\mathcal{S}$.

Fonctions hyperboliques**Exercice 29**

Soit $(n, x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$. Donner une expression sans symbole de sommation du réel $\sum_{p=0}^n \operatorname{ch}(x + py)$.

Exercice 30

Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 31

Résoudre l'équation $5 \operatorname{ch}(x) - 4 \operatorname{sh}(x) = 3$ d'inconnue réelle x .

Exercice 32

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples de fonctions réelles (f, g) définies sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(a) \ f(0) = 1 \quad \mid \quad (b) \ g' = f \quad \mid \quad (c) \ f^2 - g^2 = 1$$

- 1. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}$. Montrer que la fonction f ne s'annule pas, puis : $f' = g$. (on pourra « dériver » l'équation fonctionnelle (c))
- 2. Soit $(f, g) \in \mathcal{E}$. On pose $u = f + g$ et $v = f - g$. Trouver une équation différentielle très simple vérifiée par u (resp. v).
En déduire une expression explicite de cette fonction. (on pourra en premier lieu calculer la valeur de $g(0)$)
- 3. Démontrer : $\mathcal{E} = \{(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})\}$.

Exercice 33

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le système d'inconnue (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$:

$$(S_{a,b}) \begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$$

Dans toute la suite de cet exercice, (a, b) désigne un couple de réels.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + e^y = a + b \\ (a - b)e^x e^y = a + b \end{cases}$$

2. Montrer que si $(S_{a,b})$ admet des solutions alors $a \geq 2$, $a + b > 0$ et $a - b > 0$.

3. On suppose : $a \geq 2$, $a + b > 0$ et $a - b > 0$. Montrer que le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est une solution de $(S_{a,b})$ si et seulement si (e^x, e^y) est une système de solutions de l'équation d'inconnue réelle z :

$$z^2 - (a + b)z + \frac{a + b}{a - b} = 0$$

En distinguant alors trois cas en fonction du discriminant de l'équation du second degré précédente, résoudre le système d'équations $(S_{a,b})$.

Exercice 34

1. Étudier la fonction $\operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

2. Montrer que la fonction th réalise une bijection entre deux intervalles à déterminer et donner l'expression de la réciproque de cette bijection à l'aide de fonctions usuelles. On notera argth sa bijection réciproque.

3. Déterminer la dérivée de argth .

Inégalité triangulaire**Exercice 35**

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y|^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2$.

b. À l'aide de ce résultat, démontrez l'inégalité triangulaire.

Exercice 36

On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire). Montrer, dans cet ordre :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y|$

Partie entière**Exercice 37**

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

b. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

c. Démontrer alors que si p et q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors :

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Exercice 38

Soient x et y deux nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer : $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?

2. Démontrer : $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Valeur absolue**Exercice 39** (*Valeur absolue*)

Écrire sans valeur absolue les quantités suivantes.

- a. $|x + 1| + |x + 2|$
- b. $|x^2 - 1| - |x^2 + 1| + |2x^2 - x + 1|$
- c. $\frac{|2x + 7| + 3}{7 - |3x + 2|}$

Exercice 40

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- a. $|x + 1| + |x + 2| = 1$
- b. $|x + 1| + |2x + 3| + |4x + 5| = 7$
- c. $|x^2 + x - 7| + |x| < 5$

Théorème de la bijection**Exercice 41**

Soit $n \geq 3$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1. Étudier la fonction f_n et dresser son tableau de variations complet.
2. En déduire l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
3. Montrer, pour tout $n \geq 3$: $1 < u_n < e$.
4. Que vaut $f_n(u_n)$? et $f_{n+1}(u_{n+1})$? Montrer alors : $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante puis qu'elle converge.

Exercice 42

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.
- b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0, x_n < x_{n+1}$.
- c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leq 1$.
- d. Démontrer que : $\forall n > 0, x_n \leq \ell$.
- e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.