

Opérateurs ensemblistes**Exercice 1**

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

1. Démontrer :

$$(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow (A = B)$$

2. Démontrer :

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$$

Exercice 2

Soit E un ensemble.

Soient A , B et C des parties de E .

Démontrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $(A \setminus B) \subset C$

(ii) $(A \setminus C) \subset B$

(iii) $A \subset (B \cup C)$

Exercice 3

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$ dans les cas suivants.

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$

b) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 3]$, $B = [2; +\infty[$

c) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [3; +\infty[$

d) $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$

Exercice 4

Soient X , Y et Z des ensembles.

Démontrer les affirmations suivantes :

a) Si $X \subset Y$ alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

b) $(X \subset Y) \Leftrightarrow (X = X \cap Y)$

c) $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$

d) $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$

Exercice 5 (*un peu de différence ensembliste*)

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

a) Que valent $A \setminus \emptyset$ et $A \setminus A$?

b) Montrer : $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

c) Montrer : $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Exercice 6

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

a) Montrer : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Montrer : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Montrer : $(A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 7 (*équation ensembliste*)

Soit E un ensemble non vide.

Soient A et B des parties de E .

Résoudre, en discutant éventuellement sur la nature des parties A et B , l'équation $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \emptyset$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 8 (*un peu de différence symétrique*)

Soit E un ensemble.

Soient A , B et C des parties de E .

On définit la différence symétrique de A et de B , notée $A\Delta B$ par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

a) Que valent $A\Delta A$ et $A\Delta \emptyset$?

b) Montrer : $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c) Montrer : $A\Delta B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$.

d) Montrer : $(A\Delta B)\Delta B = A$.

e) Montrer : $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

f) En déduire que la loi Δ est associative sur $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$

Exercice 9

Soit E un ensemble.

Soient A , B et C des parties de E .

Montrer : $\left. \begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array} \right\} \Rightarrow B \subset C$.

Exercice 10

Déterminer les ensembles suivants.

a) $]0, 3[\cup [2, 5]$

b) $]0, 3[\cap [2, 5]$

c) $(]0, 3[\cup]5, 9[) \cap [1, 6]$

d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}[$

e) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$

f) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$

Exercice 11 (*de la bonne utilisation du quantificateur universel*)

Soit E un ensemble.

Soit A une partie de E .

a) Démontrer : $(\forall X \in \mathcal{P}(E), A \cup X = E) \Rightarrow A = E$.

b) Démontrer : $(\forall X \in \mathcal{P}(E), A \cap X = \emptyset) \Rightarrow A = \emptyset$.

Exercice 12

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a) $A \subset B$

b) $(E \setminus B) \subset (E \setminus A)$

c) $B \cup (E \setminus A) = E$

Exercice 13

Écrire mathématiquement les ensembles suivants.

1. Ensemble des suites réelles à termes compris entre 1 et 2 (au sens large).

2. Ensemble des suites réelles non décroissantes.

3. Ensemble des suites arithmétiques.

4. Ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ possédant au moins un point d'annulation.

5. Ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et bornées.

6. Ensemble des fonctions constantes réelles définies sur $[0, 1[$ et à valeurs dans $[-1, 1]$.

7. Ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de degré 3 et présentant 2 racines distinctes.

Ensembles finis**Exercice 14**

Parmi ces ensembles, lesquels sont finis ? Écrire les ensembles finis sous forme extensive. Donner 3 éléments distincts des autres ensembles.

- 1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$
- 2) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 0\}$
- 3) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$
- 4) $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 2\}$
- 5) $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 \leq 0\}$
- 6) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$
- 7) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{N}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leq f(x) < k + 1\}$
- 8) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$
- 9) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0\}$
- 10) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall x \in \mathbb{R}, x = 3\}$

Ensemble des parties d'un ensemble E **Exercice 15**

On considère $A = \{\{1, 2\}, 3, \emptyset\}$.

- a) Combien d'éléments possède A ?
- b) Détailler $\mathcal{P}(A)$.
Quel est le cardinal de cet ensemble ? Était-ce prévisible ?

Exercice 16

Soit E un ensemble.

Soient A et B des parties de E .

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. a) Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
b) Y a-t-il égalité ?

Exercice 17

On note $E = \{1\}$ et $F = \{1, \pi\}$.

- a) Détailler $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{P}(F)$.
- b) Est-ce que l'un est inclus dans l'autre ?

Image directe d'une application**Exercice 18**

On considère les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

- a) $f([0, 3])$
- b) $f([-1, 2])$
- c) $f(\mathbb{R})$
- d) $f([-5, 1] \cup [2, 4])$
- e) $f([-5, -3[\cup [2, 4])$

2. Déterminer les ensembles suivants.

1. $g(\mathbb{R})$
2. $g([0, \frac{\pi}{2}])$
3. $g([-\frac{\pi}{4}, 0])$
4. $g([-1, 2])$
5. $g([-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup [0, \frac{\pi}{2}])$

Exercice 12

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie et continue sur un intervalle I .

1. Si f est strictement croissante, que vaut $f(I)$ dans le cas où :

- a) $I = [a, b]$
- b) $I =]a, b]$
- c) $I =]a, b[$
- d) $I = [a, b[$

2. Répondre à la même question lorsque f est strictement décroissante.
3. Que peut-on dire dans le cas où f est simplement (dé)croissante ?
Et si l'on ne connaît pas la monotonie de f ?

Exercice 19

Soient E et F des ensembles.

Soient $f : E \mapsto F$ une application et A_1 et A_2 des parties de E .

- a) Démontrer que : $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
 b) Démontrer que : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 20

Soit E un ensemble.

Soient $f : E \mapsto F$ une application et B_1 et B_2 des parties de F .

- a) Montrer : $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
 b) Montrer : $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
 c) Montrer : $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Image réciproque d'un ensemble**Exercice 21**

Soient E et F des ensembles.

Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Démontrer : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Exercice 22

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Démontrer : $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Établir : f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 23

On considère les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

1. Déterminer les ensembles suivants.

$$\begin{array}{llll} a) f^{-1}([0, 9]) & b) f^{-1}([-1, 2]) & c) f^{-1}(\mathbb{R}) & d) f^{-1}(\mathbb{R}_-) \\ e) f^{-1}([-5, 1[\cup]2, 4]) & & & \end{array}$$

2. Déterminer les ensembles suivants.

$$\begin{array}{llll} 1. g^{-1}(\mathbb{R}) & 2. g^{-1}([0, 1]) & 3. g^{-1}([0, \frac{1}{2}]) & 4. g^{-1}([-1, 2]) \\ 5. g^{-1}([3, 5]) & & & \end{array}$$

Exercice 24

Soient E et F deux ensembles.

Soient A une partie de E ($A \subset E$) et B une partie de F ($B \subset F$).

Montrer : $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 25

1. Représenter graphiquement les ensembles suivants.

$$\begin{array}{lll} a) A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_- & b) B = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & c) C = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R} \\ d) D = \{1, 2, 3\} \times [1, 2] & & \\ e) E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} \times \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y^2 \leq 9\} & & \\ f) F = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 \leq y \leq 3\} & & \end{array}$$

Composée de fonctions**Exercice 26**

On considère les deux applications f et g de $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ dans lui-même définies par leurs tables de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

- a) Représenter de la même façon les applications $g \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $f \circ g$.
 b) Montrer que f est bijective et représenter de la même façon sa réciproque.

Exercice 27

Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n + 1, \quad \begin{cases} g(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = n - 1 \end{cases}$$

- a) Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité, éventuelle de f et g .
 b) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Caractère injectif / surjectif / bijectif**Exercice 28**

Soit $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant : $f \circ f \circ f = id_E$.

Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Exercice 29

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- a) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
 b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 30

Soient E, F, G trois ensembles.

Soient $g : E \rightarrow F$, $h : E \rightarrow F$, $f : F \rightarrow G$ trois applications.

$$\text{Démontrer : } \left. \begin{array}{l} f \circ g = f \circ h \\ f \text{ injective} \end{array} \right\} \Rightarrow g = h.$$

Exercice 31

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Que signifient les propositions suivantes ?

- a) $\forall x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$
 b) $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$
 c) $\exists y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$

Exercice 32

Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

- a) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right|$ e) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right|$ i) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n + 1 \end{array} \right|$
- b) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right|$ f) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right|$ j) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right|$
- c) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right|$ g) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n + 1 \end{array} \right|$ k) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right|$
- d) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right|$ h) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n + 1 \end{array} \right|$ l) $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right|$

Exercice 33

On considère l'application $g : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \mapsto \frac{x+2}{x+1} \end{array} \right.$

a) Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

b) Répondre aux mêmes questions pour $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

Exercice 34

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Montrer que si f est strictement croissante alors f est injective.

b) Le résultat précédent est-il vérifié si f est strictement décroissante ?

c) Trouver les solutions de l'équation en $x : x + e^x = 1$.

Exercice 35

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$, $g : E \rightarrow G$ deux applications.

On considère la fonction h suivante.

$$h : \left\{ \begin{array}{l} E \mapsto F \times G \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. La fonction h est-elle surjective ?

Exercice 36

a) L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

b) L'application $x \mapsto x^2$ est-elle injective, surjective, bijective, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$?
Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}^+$?

Exercice 37

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y .

b) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

c) Montrer : $\forall x \in [-1, 1], f(x) \in [-1, 1]$.

La restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ de f est-elle bijective ?

Exercice 38

Soient E, F, G, H des ensembles.

Soient $f \in \mathcal{A}(E, F)$, $g \in \mathcal{A}(F, G)$ et $h \in \mathcal{A}(G, H)$.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

Démontrer que f, g, h sont bijectives.

(on pourra utiliser le résultat de l'exercice 29)

Exercice 39

On note f la fonction définie par :

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z - \frac{1}{z}$$

1. Montrer que f est surjective mais non injective.

2. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

3. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 40

Soit f une application de A dans B .

1. Montrer que f est surjective si et seulement si : $\forall Y \in \mathcal{P}(B), f(f^{-1}(Y)) = Y$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall X \in \mathcal{P}(A), f^{-1}(f(X)) = X$.

Exercice 41

Donner des bijections reliant les ensembles suivants :

1. l'intervalle $[0, 1]$ et l'intervalle $]0, 1]$,
2. deux intervalles fermés $[a, b]$ et $[c, d]$ quelconques (avec $a < b$ et $c < d$),
3. deux intervalles ouverts $]a, b[$ et $]c, d[$ quelconques (avec $a < b$ et $c < d$),
4. deux intervalles semi-ouverts $]a, b]$ et $[c, d[$ quelconques (avec $a < b$ et $c < d$).

Exercice 42

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $\varphi_{a,b,c}$ l'application suivante.

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b,c} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

On considère alors l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ (a, b, c) &\mapsto \varphi_{a,b,c} \end{aligned}$$

1. Écrit-on $(\Phi(1, 2, -1))(-3)$ ou $\Phi((1, 2, -1)(-3))$? Calculer celui qui a un sens (et qu'on note aussi parfois $\Phi(1, 2, -1)(-3)$).
2. Déterminer $\bigcup_{f \in \Phi([0,1]^3)} f([0,1])$.
3. Montrer que Φ est injective.
4. L'application Φ est-elle bijective ?

Exercice 43

On rappelle qu'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

1. On considère la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme A et de raison 2. Calculer $\delta(v)$.
2. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$\delta^p = \underbrace{\delta \circ \dots \circ \delta}_{p \text{ fois}}$$

Exprimer $\delta^p(u)$ en fonction des termes de la suite u .

3. Montrer que l'application δ est surjective.
4. Est-elle bijective ?

Des propriétés contre-intuitives**Exercice 44**

On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

Démontrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} &\rightarrow 2\mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{cases}$ est bijective.

(conclusion : il y a autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels !)

Exercice 45

Démontrer que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

Exercice 46

Démontrer que l'application f suivante est bijective.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\mapsto 2^a(2b+1) \end{aligned}$$

Applications sur $\mathcal{P}(E)$ **Exercice 47**

Soit E un ensemble et soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

On note :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A : \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cap X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \psi_A : \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{array}$$

a) Sous quelle condition φ_A est-elle surjective ? Injective ?

b) Même question pour ψ_A .

Exercice 48

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E .

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$

a) Démontrer : (f est injective) $\Rightarrow (A \cup B = E)$.

b) Démontrer : (f est injective) $\Leftarrow (A \cup B = E)$.

(on pourra procéder par l'absurde et penser à former $X_1 \cap (A \cup B)$ ainsi que $X_2 \cap (A \cup B)$)

c) Démontrer : f est surjective $\Leftarrow A \cap B = \emptyset$.

d) Démontrer : f est surjective $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

(on pourra procéder par l'absurde et raisonner sur l'existence d'un antécédent à $(A \setminus A \cap B, A \cap B)$)

e) Dans le cas où f est bijective, déterminer f^{-1} .