

Calcul de limites**Exercice 1**

Déterminer les limites des fonctions suivantes.

- a.* Limite de $f : x \mapsto \frac{-5x^2 + 37x - 4}{8x^2 - 2}$ en $+\infty$.
- b.* Limite de $f : x \mapsto \frac{x^7 e^x - x e^{2x}}{x^3(\ln x) + x(\ln x)^5}$ en $+\infty$.
- c.* Limite de $g : x \mapsto \frac{x e^x + x^2 + e^{x^3}}{x^7 + 5}$ en $-\infty$.
- d.* Limite de $h : x \mapsto \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ en $+\infty$.
- e.* Limite de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}$ en $+\infty$.
- f.* Limite de $g : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.
- g.* Limite de $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x^2 + 1)} - \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$ en $+\infty$.
- h.* Limite de $g : x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$ en 0^+ .
- i.* Limite de $f : x \mapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\pi - 4x}$ en $\frac{\pi}{4}$.
- j.* Limite de $g : x \mapsto \cos \left(x + \frac{1}{x} \right)$ en $+\infty$.
- k.* Limite de $f : x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 3x + 1} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$ en $+\infty$.
- l.* Limite de $f : x \mapsto \sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x))$ en $+\infty$.
- m.* Limite de $g : x \mapsto \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$ en 0 .

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes.

- a.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{9x^3}$
- b.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x-1}}{(\ln x)^4}$
- c.* $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$
- d.* $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x+3) - \ln(x-1)$
- e.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+6} - \sqrt{x-2}$
- f.* $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}$
- g.* $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- h.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3)^x}{(3x)^3}$
- i.* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^3)^x}{(3x)^3}$
- j.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+3) - \ln(x-1)$
- k.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) - 2 \ln x$
- l.* $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\sqrt{x}+1}$
- m.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$
- n.* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^3}}{x}$

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

1. Que vaut : $\sum_{k=1}^n \left(f \left(\frac{x}{2^{k-1}} \right) - f \left(\frac{x}{2^k} \right) \right) + f \left(\frac{x}{2^n} \right)$?
2. En déduire : $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Calcul de limites par changement de variable

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes.

- a.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$ (on pourra poser $X = \frac{1}{x}$)
- b.** $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 \ln(x-1)$ (on pourra poser $X = x-1$)
- c.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ (on pourra poser $X = \frac{1}{x}$)
- d.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (on pourra poser $X = \sqrt{x}$)

Utilisation du taux d'accroissement

Exercice 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que f est non nulle au voisinage de x_0 .

On suppose enfin que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

- 1.** Démontrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

(autrement dit : $\ln(1+f(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$)

- 2.** En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+e^{-x})$.

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes.

- a.** $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$
- b.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes.

- a.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^3)^{1/x}$
- b.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-5x)}{x}$
- c.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
- d.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
- e.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
- f.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$
- g.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$
- h.** $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}$
- i.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$
- j.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+5}{x+3}\right)$

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = (\ln x)^{\ln(e-x)}$ et on se propose de déterminer sa limite pour $x \rightarrow e^-$ (e par valeurs strictement inférieures).

- a.** On pose $t = \frac{x}{e}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de t .

- b.** Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1+\ln(t))}{t-1} = 1$.

- c.** Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1+\ln(1-t)}{\ln(1-t)} = 1$.

- d.** En déduire que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \exp(-(1-t) \ln(1-t) H(t))$$

où H est une fonction vérifiant : $\lim_{t \rightarrow 1^-} H(t) = 1$.

- e.** En déduire $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$.
(on pourra poser $u = 1-t$)

Limite à droite, limite à gauche**Exercice 9**

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- a.* La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est-elle continue en a ?
b. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ est-elle continue en a ?

Exercice 10

Étudier la continuité au point x_0 des fonctions suivantes.

- a.* $x_0 = 2$ et $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
b. $x_0 = -\frac{1}{2}$ et $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 + 5x - 4}{2x + 1} & \text{si } x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$
c. $x_0 = 0$ et $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
d. $x_0 = 0$ et $h(x) = \begin{cases} x \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
e. $x_0 = 1$ et $j(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
f. $x_0 = 0$ et $k(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

Utilisation d'inégalités**Exercice 11**

Déterminer les limites suivantes.

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor} \qquad b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\lfloor \frac{3}{x} \rfloor}$$

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes.

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^3}}{x} \qquad b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x + x^2 + e^{x^3}}{x^3 + 5}$$

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto (x - 1)e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

Le but est de trouver la limite de f en 1^- .

- a.* Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.
b. Démontrer que : $\forall u > -1, \ln(1 + u) \leq u$.
c. En déduire que : $\forall u > -1, u \times e^{\frac{1}{\ln(1+u)}} \geq u \times e^{\frac{1}{u}}$.
d. Déterminer $\lim_{u \rightarrow +\infty} u \times e^{\frac{1}{u}}$ et conclure.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$

Le but est de trouver la limite de f en 1^+ .

- a.* Effectuer le changement de variable $X = 1 - x$.
b. Démontrer que : $\forall u > 0, 0 < \frac{(1-u)^3}{\sqrt{u}} \times e^{\frac{1}{-u+u^2}} \leq (1-u)^3 \times \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$.
c. Déterminer $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{u}}}{\sqrt{u}}$ et conclure.

Calcul d'équivalents

Exercice 15

Donner un équivalent simple des fonctions suivantes aux points indiqués.

- a)** $f_1 : x \mapsto \frac{x^3 - \ln x}{2 + xe^{-x}}$ en 0 et en $+\infty$
b) $f_2 : x \mapsto x^2 (\ln(1+x))^4$ en 0 et en $+\infty$
c) $f_3 : x \mapsto \ln(x) - \ln(2)$ en 2
d) $f_4 : x \mapsto \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $\frac{\pi}{4}$
e) $f_5 : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en 0 et en $+\infty$
f) $f_6 : x \mapsto x \ln(1+x) - (x+1) \ln x$ en 0 et en $+\infty$
g) $f_7 : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right)$ en $+\infty$
h) $f_8 : x \mapsto e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}$ en 0

Limites infinies, définitions équivalentes

Exercice 16

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$.

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- a.** f admet la limite $+\infty$ en x_0 .
b. $\forall B > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq B)$
c. $\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq B)$

Exercice 17

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$.

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- a.** f admet la limite $-\infty$ en x_0 .
b. $\forall B > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq -B)$
c. $\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq B)$

Exercice 18

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- a.** f admet la limite $-\infty$ en $+\infty$.
b. $\forall B > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x \geq A \Rightarrow f(x) \leq -B)$
c. $\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B)$

Démonstration « avec les ε »

Exercice 19

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$.

a. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} (f + g)(x) = +\infty$$

Quel énoncé peut-on écrire quand $x \rightarrow x_0^+$?

b. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell_2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = \ell_1 + \ell_2$$

c. Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = \ell_1 \ell_2$$

On pourra remarquer que :

$$f(x)g(x) - \ell_1 \ell_2 = f(x)(g(x) - \ell_2) + \ell_2(f(x) - \ell_1).$$

Exercice 20

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$.

Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ bornée} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = 0$$

Exercice 21

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

Exercice 22

Montrer qu'une fonction réelle définie et périodique sur $\mathbb{R}$, admettant une limite en $+\infty$ est constante.

Exercice 23

Montrer qu'une fonction réelle f , définie sur $\mathbb{R}$, admettant une limite en 0 et vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R} : f(2x) = f(x)$ est constante.

Régularité des fonctions réelles**Exercice 24**

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1 - a$, et d'une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que la suite $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, f est discontinue en a (on pourra raisonner par l'absurde).
3. Montrer que f est continue en $\frac{1}{2}$ (on reviendra à la définition formelle de la notion de limite).

Exercice 25

On considère la fonction :

$$f :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $]0, \pi[$.
2. Démontrer que f réalise une bijection de réciproque dérivable.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression explicite $(f^{-1})'(x)$.
4. Calculer alors la dérivée de $\arctan + f^{-1}$. Que peut-on en conclure ?

Prolongement par continuité**Exercice 26**

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis rechercher si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes de cet ensemble de définition :

$$\begin{array}{ll} a. f_1(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2} & c. f_3(x) = \frac{x \ln x}{x - 1} \\ b. f_2(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{\sqrt{x + 2}} & d. f_4(x) = \frac{x - 1}{\ln x} \end{array}$$

Exercice 27

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1 - \sin(x)}{\sin(\cos(x))}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Prolonger f par continuité en tous les points de $\mathbb{R}$ où cela est possible.

Exercice 28

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Suites implicites**Exercice 29**

On considère la fonction :

$$f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[\\ t \mapsto t + \ln(t)$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = f^{-1}(n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2u_n \geq n$. Que peut-on déduire sur le comportement asymptotique de la suite (u_n) ?
3. Démontrer : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = u_n - n$.
 - a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n + \ln\left(1 + \frac{v_n}{n}\right) + \ln(n) = 0$.
 - b) En déduire un équivalent de $(u_n - n)$.

Exercice 30

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction :

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{e^t}{1 + t^n}$$

1. Expliciter, pour tout entier naturel non nul n , la dérivée de f_n .
2. Dans cette question, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
 - a) Déterminer une fonction polynomiale g_n telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} f'_n(t) = 0 & \Leftrightarrow & g_n(t) = 0 \\ f'_n(t) > 0 & \Leftrightarrow & g_n(t) > 0 \end{cases}$$

- b) Montrer alors que g_n s'annule exactement deux fois : une fois sur $]0, 1[$ et une fois sur $]1, +\infty[$.
 - c) Dresser le tableau de variations complet de f_n
3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note a_n la solution de l'équation $g_n(x) = 0$ d'inconnue x appartenant à $]0, 1[$.
 - a) Si A est un élément de $]0, 1[$, préciser, si elle existe, la limite de la suite $(1 + A^n - n A^{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - b) En déduire l'existence d'un entier N supérieur ou égal à 3 tel que, pour tout $n \geq N$, $A \leq a_n \leq 1$. Que vient-on de démontrer ?
 4. Démontrer : $a_n^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Déterminer enfin, si elle existe, la limite de la suite $(f_n(u_n))_{n \geq 3}$.

Fonctions trigonométriques réciproques**Exercice 31**

Simplifier les expressions : $\sin(\arccos(x))$, $\tan(\arcsin(x))$, $\tan(2\arcsin(x))$ et $\sin(2\arctan(x))$ pour les réels x pour lesquels elles sont définies.

Exercice 32

On pose $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$. Calculer $\cos(2x)$ et donner une valeur explicite de x .

Exercice 33

Déterminer les domaines de définition de chacune des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \arcsin(2x^2 - 3x + 2)$

2. $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$

3. $x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Exercice 34

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

- Donner le domaine de définition de f et préciser la régularité de f .
- Donner une expression explicite de f' . Simplifier alors l'expression de f .
- En calculant, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ où cela a un sens, $f(\tan(x))$, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 35

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Que pouvez-vous dire concernant la régularité de f sans étude particulière?
- Donner une expression explicite de $f'(x)$ pour tout réel x où cela a un sens. Que pouvez-vous en conclure? Que dire alors de la dérivabilité de f en 1?

Exercice 36

- Démontrer : $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
- Résoudre alors le système suivant, d'inconnue $(x, y) \in [-1, 1]^2$.

$$\begin{cases} \arcsin(y) &= 2 \arcsin(x) \\ 2 \arccos(y) &= \arccos(x) \end{cases}$$

Exercice 37

Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Écrire une relation analogue valable sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 38

Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Exercice 39

On considère l'équation (E) $\arctan(x) + \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$ d'inconnue réelle x , dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

- Montrer que si x est une solution de (E), alors : $\frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x}$. (on pourra utiliser la fonction tangente)
- Déduire de la question précédente : $\mathcal{S} \subset \{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$.
- On introduit la fonction f définie par $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(x-1) + \arctan(x+1)$.
 - Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ ainsi que les variations de f au sens strict. Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\mathcal{S}$?
 - Calculer $f(0)$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 40

En s'inspirant des méthodes de l'exercice 39, résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x .

1. $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$

Exercice 41

On considère l'équation (E) $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ d'inconnue réelle x , dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1. On considère la fonction :

$$\begin{array}{ccc} g : [-1, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x^2(1-x^2) \end{array}$$

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par cette fonction est inclus dans $[0, 1]$ (on pourra étudier directement deux inéquations ou déterminer les variations de la fonction).

En déduire que l'ensemble $\mathcal{S}$ est inclus dans l'intervalle $[-1, 1]$.

2. Soit $x \in [-1, 1]$.

- a) Justifier l'existence et l'unicité de $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que : $\sin(\alpha) = x$.
- b) Montrer alors que x est une solution de l'équation (E) si et seulement si $2\alpha = \arcsin(\sin(2\alpha))$.
- c) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Théorème des valeurs intermédiaires**Exercice 42**

Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Exercice 43

Montrer que les équations suivantes ont une solution dans l'intervalle I :

- a) $\ln x = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$ sur $I = [1, 10]$.
- b) $x^{2015} - x^{2016} = -1$ sur $I = [-1, 1]$.
- c) $x^n + 9x^2 - 4 = 0$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (n est un entier positif).
- d) $x \ln x = 2$ sur $I = [2, 3]$.

Exercice 44

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

On suppose que : $\forall x \in I, |f(x)| = 1$.

Montrer que f est constante sur I .

Exercice 45

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

On suppose que : $\forall x \in I, f^2(x) = 1$.

Montrer que f est constante sur I .

Exercice 46

Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$.

Montrer que f admet un point fixe : $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = x_0$.

(on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$)

Exercice 47

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :

$$f(0) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = g(0) = 1$$

Montrer que : $\forall \lambda \geq 0, \exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = \lambda g(x_0)$.

(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$)

Continuité sur un segment**Exercice 48**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$.

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49

1. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer :

$$\sup_{[a,b]} (f) = \sup_{]a,b[} (f)$$

On commencera par montrer que ces bornes supérieures existent.

3. Soient f et g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq k g(x)$$

Exercice 50

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose que : $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. Qu'en est-il de sa borne inférieure ?

Exercice 51

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x \in [-1, 1], f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $f(x) \geq m$.

Théorème de la bijection**Exercice 52**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.

- a) Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Montrer qu'il existe un unique u_n strictement positif tel que $f_n(u_n) = 0$.
- c) Calculer u_1 .
- d) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
- e) En déduire le signe de u_n et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.
- f) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- g) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, f_n(x) = \frac{2x - x^{n+1} - 1}{1 - x}$.
- h) En déduire que : $2u_n - 1 = u_n^{n+1}$.
- i) Démontrer que (u_n^{n+1}) converge vers 0 et en déduire la limite de (u_n) .

Exercice 53

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ puis déterminer son signe.
Pour ce faire, on pourra étudier la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ définie pour $x > -1$.
- c) Montrer que f peut être prolongée par continuité à $[-1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
- d) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in [-1, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.
- e) Montrer que : $3 < \alpha < 4$.

On pourra utiliser le fait que : $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 5 \approx 1,61$.

Exercice 54

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$

- a) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
- b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- c) Calculer les limites de f_n quand $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$.
- d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.
On notera u_n cette solution.

e) Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n} < u_n < 0$.

f) En déduire la limite de la suite (u_n) .

g) En revenant à la définition de u_n , montrer que : $nu_n \rightarrow -\frac{1}{2}$.

Théorème de la limite monotone**Exercice 55**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

On souhaite démontrer que la fonction f admet un unique point fixe autrement dit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.

Pour ce faire, on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

a) Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

b) En déduire que f admet un point fixe.

c) En procédant par l'absurde, démontrer que ce point fixe est unique.

d) Ce résultat est-il valable si la fonction f est croissante ?

Exercice 56

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante sur un intervalle I .

On suppose que $f(I)$ est un intervalle.

On souhaite démontrer que la fonction f est continue.

1. a) Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Démontrer que f admet une limite finie ℓ à droite en a qui vérifie : $f(a) \leq \ell$.

b) Démontrer que : $\forall x \in I, x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.

c) Démontrer que : $\forall x \in I, x > a \Rightarrow f(x) \geq \ell$.

Ceci permet de démontrer que f n'atteint aucune valeur entre $f(a)$ et ℓ .

On suppose maintenant par l'absurde que $f(a) < \ell$.

2. a) Si $b \in I$ est tel que $b > a$, démontrer que : $f(a) \leq \ell \leq f(b)$.

(question supplémentaire : pourquoi existe-t-il un tel élément b ?)

b) En déduire que ℓ est une valeur atteinte par f .

c) En déduire une contradiction.

d) En conclure que f est continue sur I .

3. Le résultat est-il valable si f est décroissante ?

(ce résultat est la brique manquante de la démonstration du théorème de la bijection présentée dans le cours)