

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln(x)$.

- a. Dresser le tableau de variations de f .
- b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
On la note u_n .
- c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x \ln(x) - 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
4. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
On note u_n cette solution. Justifier que $u_n > 1$.
6. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
 - a) Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.
 - b) Donner le tableau de variations complet de la réciproque g^{-1} sur J .
 - c) Exprimez u_n à l'aide de g^{-1} .
En déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.
- b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0, x_n < x_{n+1}$.
- c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leq 1$.
- d. Démontrer que : $\forall n > 0, x_n \leq \ell$.
- e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 4

Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + e^x} + nx$. On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a. Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
b. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n , de $(\mathcal{C}_n)$.
c. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_1)$.
- 3) a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$.
c. En déduire la limite de la suite (u_n) .
d. En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.
e. En déduire la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

- a. Faire l'étude de la fonction f_n .
- b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n .
- c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 6

Pour tout entier n positif, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1. a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition. Dresser son tableau de variations.
b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.
c) Tracer dans un même repère les courbes de f_0 , f_1 et f_2 .
d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n .
e) Préciser la valeur de u_0 . Dans la suite on supposera que $n \geq 1$.
f) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1[$.
2. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à 0,001 près par la méthode de dichotomie.
3. a) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n) .
c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.
e) Donner enfin la valeur de ℓ .
f) Montrer que $\sqrt{\frac{n}{2}} u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Dans tout cet exercice, n est un entier naturel non nul, et on se propose d'étudier les racines positives de l'équation suivante :

$$(E_n) : e^x = x^n$$

Pour ce faire, on introduit la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$$

1. Étude des cas $n = 1$ et $n = 2$.

- a) Étudier les variations de f_1 et f_2 .
On dressera leur tableau de variation en précisant les limites.
- b) Représenter graphiquement f_1 et f_2 .
- c) Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2) .

2. Étude des racines positives de (E_3) .

- a) Étudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3 . En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elle par deux entiers consécutifs.
On donne les valeurs approchées $e^2 \approx 7,4$, $e^3 \approx 20,1$, $e^4 \approx 54,6$ et $e^5 \approx 148,4$.
- b) Soit (y_n) une suite telle que $y_0 > u$, et vérifiant la relation de récurrence $y_{n+1} = 3 \ln(y_n)$.
— Montrer que si $u < y_0 \leq v$, alors pour tout entier naturel n on a $u < y_n \leq v$.
— Montrer que si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel n on a $v \leq y_n$.
— Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.
- c) En déduire, selon la position de y_0 par rapport à v , le sens de variation de (y_n) .
Étudier enfin la convergence de la suite (y_n) et préciser sa limite.
- d) On choisit désormais $y_0 = 4$.
Écrire une fonction **Python** qui prend un entier n et qui calcule y_n .
La première ligne de cette fonction s'écrira **function y = suite(n)**.

3. Étude des racines positives de (E_n) pour $n \geq 3$.

a) Étudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n .

Montrer que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n , avec $1 < u_n < v_n$.

b) Pour $n \geq 4$, déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$.

Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n) .
Montrer que (u_n) converge.

c) Montrer que $u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right)$ et en déduire la limite ℓ de la suite (u_n) .

Montrer que $n(u_n - \ell)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer pour $n \geq 4$ le signe de $f_{n-1}(v_n)$. Déduire des variations de la fonction f_{n-1} le sens de variation de la suite (v_n) puis étudier la limite de celle-ci.

e) Pour tout réel $x > 1$, on pose $g(x) = x - \ln(x)$.

Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.

Établir que $g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$. Montrer à l'aide de la bijection réciproque g^{-1} que (v_n) tend vers $+\infty$, et enfin que $\frac{v_n}{n \ln(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.