Interrogation de rentrée

Mise en route

Exercice 1

1. Quel est le thème au programme de PSI en Lettres/Philosophie ?

2. Quels sont les 3 œuvres au programme de PSI en Lettres/Philosophie ? (titres / auteurs)

Démonstration.

1. Le thème au programme cette année est : « Faire croire ».

2. Les 3 œuvres au programme de PSI sont :

- **Les Liaisons dangereuses**, Choderlos de Laclos.
- **Lorenzaccio**, Alfred de Musset.
- **La Crise de la culture**, Hannah Arendt.

□

Exercice 2

1. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \exp(x)$. On fera apparaître l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées (l'échelle n'est pas imposée) ainsi que les tangentes en d'éventuels points d'intérêt.

2. Quel est le lien entre les fonctions f et g ? Comment cela se traduit-il graphiquement ?

Exercices d'été

Exercice 3

Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

1. $\displaystyle\int_2^3 f(t)\ dt$,

2. $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\ dt$,

3. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$,

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,

6. $\exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \pi < k+1$,

7. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.

1. $\displaystyle\int_2^3 f(t)\ dt$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable f est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de l'expression de f.

2. $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\, dt$

(i) Il s'agit d'un réel.

(ii) La variable t est muette car c'est la variable d'intégration (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\int$).
La variable x est libre (elles n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

> Une fois le calcul effectué, le résultat dépendra seulement de la variable x.

3. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

> On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné ne dépend d'aucune variable.

4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

(i) Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

(ii) La variable x est muette (on s'intéresse ici à tous les réels x vérifiant une condition donnée).

> On a ici affaire à un ensemble qui ne dépend d'aucune variable.

Commentaire

Notons que cette conclusion est bien rassurante puisque l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ n'est autre que l'ensemble $\mathbb{R}_+$ (ou $[0, +\infty[$), notations qui ne font pas apparaître de dépendance en une variable x.

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$

(i) Il s'agit d'une proposition quantifiée universellement.

(ii) La variable n est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.

> La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.

6. $\exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \pi < k+1$

(i) Il s'agit d'une proposition quantifiée existentiellement.

(ii) La variable k est muette car elle est sous la portée d'un quantificateur.
La variable π est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique). C'est la variable généralement utilisée pour désigner la constante *pi*.

> La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend que de la variable π.

7. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) Il s'agit d'une suite.

(ii) La variable n est muette (on considère ici la valeur de la suite u à tous les rangs n entiers).

> La suite u (autre notation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ne dépend d'aucune variable.

□

Exercice 4
Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. (E_1) $y' - 5y = 2$

2. (E_2) $y' - 5y = x^2$

Démonstration.

1. Résolvons (E_1).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_1) $y' - 5y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_1).
  Comme le second membre de (E_1) est une constante, on cherche une fonction constante solution de (E_1).
  Soit $c \in \mathbb{R}$. On note alors $g : x \mapsto c$. La fonction g est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - 5\, g(x) = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad -5\, c = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad c = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$
  Ainsi, la fonction $g_1 : x \mapsto -\dfrac{2}{5}$ est une solution particulière de (E_1).

  $\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est : } \{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{5x} - \frac{2}{5} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.}$

2. Résolvons (E_2).

- On commence par résoudre son équation homogène associée (H_2) $y' - 5y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{5x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
- On cherche ensuite une solution particulière de (E_2).
  Comme le second membre de (E_2) est une fonction polynomiale de degré 2, on cherche une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_2).

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On note alors $g : x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$. La fonction g est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{rcl}
g \text{ est solution de } (E_2) & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) - 5\,g(x) = x^2 \\[1ex]
& \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ 2a\,x + b - 5\,(a\,x^2 + b\,x + c) = x^2 \\[1ex]
& \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ -5a\,x^2 + (2a - 5b)\,x + (b - 5c) = x^2 \\[1ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -5a & & & & & = & 1 \\ 2a & - & 5b & & & = & 0 \\ & & b & - & 5c & = & 0 \end{array} \right. \\[3ex]
& \overset{L_2 \leftarrow 5\,L_2 + 2\,L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -5a & & & & & = & 1 \\ & - & 25b & & & = & 2 \\ & & b & - & 5c & = & 0 \end{array} \right. \\[3ex]
& \overset{L_3 \leftarrow 25\,L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -5a & & & & & = & 1 \\ & - & 25b & & & = & 2 \\ & & & - & 125c & = & 2 \end{array} \right. \\[3ex]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{5} \\ b & = & -\frac{2}{25} \\ c & = & -\frac{2}{125} \end{array} \right.
\end{array}
$$

Ainsi, la fonction $g_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{5}\left(x^2 + \dfrac{2}{5}\,x + \dfrac{2}{25}\right)$ est une solution particulière de (E_2).

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{5}\left(x^2 + \frac{2}{5}\,x + \frac{2}{25}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

□

Exercice 5

Soit $E = \mathscr{C}^0\big([0,1]\big)$. On pose, pour $(f,g) \in E \times E$, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ g(t)\ t^2\ dt$.

Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Démonstration.

Remarquons tout d'abord que pour tout $(f,g) \in E \times E$, la fonction $t \mapsto f(t)\ g(t)\ t^2$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$ ce qui démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ g(t)\ t^2\ dt$ est bien définie.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur $E \times E$.

1) Soit $(f,g) \in E \times E$.

$$\langle f, g\rangle \ = \ \int_0^1 f(t)\ g(t)\ t^2\ dt \ = \ \int_0^1 g(t)\ f(t)\ t^2\ dt \ = \ \langle g, f\rangle$$

On en déduit que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

2) Soit $(f_1, f_2, g) \in E \times E \times E$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= \int_0^1 \big(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\big)(t)\ g(t)\ t^2\ dt \\
&= \int_0^1 \big(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\big)\ g(t)\ t^2\ dt && \textit{(par linéarité de l'évaluation en un point)} \\
&= \int_0^1 \big(\lambda_1 f_1(t)\ g(t)\ t^2 + \lambda_2 f_2(t)\ g(t)\ t^2\big)\ dt \\
&= \lambda_1 \int_0^1 f_1(t)\ g(t)\ t^2\ dt + \lambda_2 \int_0^1 f_2(t)\ g(t)\ t^2\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale sur un segment)} \\
&= \lambda_1\ \langle f_1, g \rangle + \lambda_2\ \langle f_2, g \rangle
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'application } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est linéaire à gauche.}}$$

$$\boxed{\text{L'application } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ étant de plus symétrique (démontré en } \textbf{\textit{1.}}\text{), on en conclut qu'elle est bilinéaire.}}$$

3) Démontrons maintenant que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

- Soit $f \in E$.

$$\langle f, f \rangle \ = \ \int_0^1 \big(f(t)\big)^2\ t^2\ dt$$

  Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $\big(f(t)\big)^2\ t^2 \geqslant 0$.
  Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(1 \geqslant 0)$:

$$\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\ t^2\ dt \ \geqslant\ 0$$

$$\boxed{\forall f \in E,\ \langle f, f \rangle \geqslant 0}$$

- Soit $f \in E$. Supposons $\langle f, f \rangle = 0$. Autrement dit :

$$\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\ t^2\ dt \ = \ 0$$

  La fonction $t \mapsto \big(f(t)\big)^2\ t^2$ est :
  × continue sur $[0, 1]$,
  × positive sur $[0, 1]$.
  Cette fonction étant d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, on en déduit :

$$\forall t \in [0, 1], \big(f(t)\big)^2\ t^2 \ = \ 0$$

  Comme pour tout $t \in \,]0, 1]$, $t^2 \ \neq\ 0$, on en conclut : $\forall t \in \,]0, 1], \big(f(t)\big)^2 \ = \ 0$ et finalement :

$$\forall t \in \,]0, 1], f(t) \ = \ 0$$

  Enfin, comme f est continue en 0 alors :

$$f(0) \ = \ \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t) \ = \ \lim_{t \to 0} 0 \ = \ 0$$

$$\boxed{\forall f \in E,\ \langle f, f \rangle = 0 \ \Rightarrow\ f = 0_E}$$

On en conclut que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie positive.

□

Exercice 6
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x}\,dx$

Démonstration.

a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,dx &= \Big[\ \ln\big(|\mathrm{e}^x+x|\big)\ \Big]_0^1 \\ &= \ln\big(|\mathrm{e}^1+1|\big)-\ln\big(|\mathrm{e}^0+0|\big) \\ &= \ln\big(\mathrm{e}^1+1\big)-\cancel{\ln(1)} \ = \ \ln\big(\mathrm{e}^1+1\big)\end{aligned}$$

b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{x}$ est continue sur le `SEGMENT` $[1,\mathrm{e}]$.

Ainsi, l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x}\,dx &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\big(\ln(x)\big)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{\big(\ln(x)\big)^{2+1}}{2+1}\ \right]_1^{\mathrm{e}} \ = \ \frac{1}{3}\,\Big[\ \big(\ln(x)\big)^3\ \Big]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{3}\,\Big(\big(\ln(\mathrm{e})\big)^3-\big(\cancel{\ln(1)}\big)^3\Big) \ = \ \frac{1}{3}\,1^3 \ = \ \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Commentaire

- Dans la rédaction, on fait apparaître une règle classique de « primitivation ».
  On rappelle dans les tableaux ci-dessous les règles à connaître.

Fonction	Tout intervalle I tel que :	Une primitive
$x \mapsto a$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a\,x + \lambda$
$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \ln(x) + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$I \subset \mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \ln(-x) + \lambda$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$
$x \mapsto a^x$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)	$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{a^x}{\ln(a)} + \lambda$

$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ (u(x))^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	× u dérivable sur I. × $u > 0$ sur I.	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	× u dérivable sur I. × $u \neq 0$ sur I.	$x \mapsto \ln(\|u(x)\|) + \lambda$
$x \mapsto u'(x)\ \mathrm{e}^{u(x)}$	× u dérivable sur I.	$x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$

(où λ est un réel quelconque)

- Lorsque la fonction f est positive sur le segment d'intrégration $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$.
  Ainsi, le signe du résultat est une bonne mesure de vérification.

□

Exercice 7
Déterminer (en la justifiant) la nature des séries suivantes.

1. $\sum \dfrac{n}{2^n}$ ***2.*** $\sum \dfrac{(-1)^n \ \ln(n)}{n^3}$ ***3.*** $\sum \ \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$

`MÉTHODO` **Étude des séries numériques (PCSI)**

Afin de déterminer la nature d'une série $\sum u_n$, on pourra penser à utiliser l'une des techniques listées ci-dessous.

1) Étude de la suite (u_n) réelle ou complexe

a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc diverge.

b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement.
La série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.
(une étude plus précise doit être réalisée)

C'est une première étude de la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

2) Si $\sum u_n$ est à termes positifs (c'est-à-dire si : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n \geqslant 0$)

On dispose des quatre outils suivants.

a) Critère de comparaison par inégalité des séries à termes positifs.

b) Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.

c) Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.

d) Critère de comparaison par domination des séries à termes positifs.

On estime ici plus précisément la « taille » du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée. Pour ce faire, on compare u_n au terme général v_n d'une série de référence. On pensera notamment :

× à comparer avec des séries de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ dont la nature est donnée par le critère de Riemann.
(on pourra aussi penser à comparer au terme général d'une série géométrique ou au terme général de la série exponentielle ou plus généralement au terme général d'une série dont on a établi la nature précédemment)

× à utiliser la formule de Stirling (cf cours de $2^{\text{ème}}$ anéne) pour évaluer la taille d'un terme général faisant apparaître des factorielles.

Note : si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on étudie $\sum -u_n$ qui est de même nature que $\sum u_n$.

3) Si $\sum u_n$ est à termes réels de signes non constants ou est à termes complexes

On pourra penser à l'une de ces méthodes.

a) Utilisation du critère spécial des séries alternées si le cadre s'y prête (cf cours de $2^{\text{ème}}$ année).

b) Démontrer de la convergence absolue (comme $|u_n| \geqslant 0$, les techniques du ***3)*** sont utilisables)

- Si $\sum |u_n|$ est convergente (c'est-à-dire $\sum u_n$ absolument convergente) alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\sum |u_n|$ est divergente alors $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente *(une étude plus précise doit être réalisée).*

Démonstration.

1. (i) $\left|\dfrac{n}{2^n}\right| = \dfrac{n}{2^n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(ii) La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{n}{2^n}$ est (absolument) convergente.

2. (i) $\left|\dfrac{(-1)^n\ \ln(n)}{n^3}\right| = \dfrac{\ln(n)}{n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(ii) La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{(-1)^n\ \ln(n)}{n^3}$ est (absolument) convergente.

3. (i) $\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$

(ii) La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\ \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est (absolument) convergente.

$\square$

Exercice 8
Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$

Démonstration.

1.

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & z \\ & - & 2\,y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & 2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right.$$

2.

$$(S_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\ x = -y - z\right.$$

$\square$

Exercice 9

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels λ pour lesquelles la matrice $A - \lambda\, I_3$ est non inversible.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que pour toute matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & \text{La matrice } M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est non inversible} \\ \Leftrightarrow\ & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, MX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

  Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \text{La matrice } A - \lambda \cdot I_n \text{ est non inversible} \\ \Leftrightarrow\ & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \big(A - \lambda \cdot I_n\big)\ X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow\ & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, A\ X = \lambda\ X \end{aligned}$$

- Dans l'exercice 10 de la séance 3, on détermine l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :
  - × $A - I_3$ est non inversible (question ***1.a)***),
  - × $A + 2\, I_3$ est non inversible (question ***1.b)***),
  - × $A - 3\, I_3$ est non inversible (question ***1.c)***).

  Il est légitime de se poser la question de savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux réels 1, -2 et 3. Ce sont exactement les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $A - \lambda\, I_3$ est non inversible. Pour ces 3 valeurs, il existe forcément des vecteurs $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A\,X = \lambda\ X$. On constate dans la séance 3 que chercher l'ensemble des vecteurs vérifiant cette propriété peut permettre de trouver une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = P\ D\ P^{-1}$$

  L'intérêt d'une telle écriture ainsi que le vocabulaire associé à de telles recherches sera détaillé dans le chapitre « Réduction ». Pour ces devoirs de vacances, on vérifie simplement la capacité à résoudre un système linéaire ainsi que la capacité à calculer un déterminant (en l'occurrence le déterminant d'une matrice à paramètre).

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, I_3) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - (5-\lambda)\, L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2\, L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \\ 6-\lambda & -8+2\lambda \end{vmatrix} \quad \textit{(en développant par rapport à la première colonne)} \\
&\overset{L_2 \leftarrow L2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 8-6\,\lambda+\lambda^2 \end{vmatrix} \\
&= (6-\lambda)\ (8-6\,\lambda+\lambda^2) \\
&= (6-\lambda)\ (2-\lambda)\ (4-\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A - \lambda I_3 \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \det\big(A - \lambda I_3\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow 6-\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 2-\lambda = 0 \ \texttt{OU}\ 4-\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = 6 \ \texttt{OU}\ \lambda = 2 \ \texttt{OU}\ \lambda = 4
\end{aligned}$$

□

Exercice 10
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in\ ]0, +\infty[$.

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$

  Alors, comme $x > 0$:

$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x \geqslant 1$$

  On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.}$$

- Enfin, soit $x \in \,]0,+\infty[$:

$$f(x) \;=\; x - \ln(x) \;=\; x\Big(1 - \frac{\ln(x)}{x}\Big)$$

De plus, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \,]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0,1[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$.

$$f(]0,1[) \;=\; \Big]\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x)\Big[\;=\;]1,+\infty[$$

  Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.
- La fonction f est :
  - × continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  - × strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$.

$$f(]1,+\infty[) \;=\; \Big]\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\Big[\;=\;]1,+\infty[$$

  Or $2 \in \,]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$,
  - × $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
    De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et ainsi : $f(4) = 2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6 \geqslant 2$.
  - × $f(b) = 2$.

  On a donc : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.
- Notons g la réciproque de f sur $]1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $g :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. En appliquant g de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} g\big(f(2)\big) & \leqslant & g\big(f(b)\big) & \leqslant & g\big(f(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 2 & \leqslant & b & \leqslant & 4 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } b \in [2, 4].}$$

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation. Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème. □

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad$ où $\quad \mathscr{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array} \right.$

▶ **Initialisation** :
$u_0 = 4$. Or, d'après la question *3.*, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
D'où $\mathscr{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array} \right.$)

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.

- Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
  Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
- Comme $u_n \geqslant b$

$$\begin{array}{rccl} \text{alors} & \ln(u_n) & \geqslant & \ln(b) \quad \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{et} & \ln(u_n) + 2 & \geqslant & \ln(b) + 2 \\ & \shortparallel & & \\ & u_{n+1} & & \end{array}$$

  Enfin, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Ainsi : $\ln(b) = b - 2$.
  On obtient alors :

$$u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathscr{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n \ = \ \ln(u_n) + 2 - u_n \ = \ 2 - (u_n - \ln(u_n)) \ = \ f(b) - f(u_n)$$

  Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
  De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
  D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad$ où $\quad \mathscr{P}(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\ \ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).

$$\begin{array}{cccl}
\text{Tout d'abord} & u_{n+1} \ \leqslant \ u_n & & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
\text{donc} & \ln(u_{n+1}) \ \leqslant \ \ln(u_n) & & \textit{(par croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \\
\text{et} & \underbrace{\ln(u_{n+1}) + 2}_{= u_{n+2}} \ \leqslant \ \underbrace{\ln(u_n) + 2}_{= u_{n+1}} & &
\end{array}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  - × décroissante,
  - × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge. On note } \ell \text{ sa limite.}}$$

- \- Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant b$.
  Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.

- Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
  Donc, par continuité de ln sur $]0, +\infty[$: $\ell = \ln(\ell) + 2$. Or :

$$\ell = \ln(\ell) + 2 \ \Leftrightarrow\ \ell - \ln(\ell) = 2 \ \Leftrightarrow\ f(\ell) = 2$$

  Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc } \ell = b.}$$

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

Démonstration.
On note h la fonction définie par $h : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction h est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  Soit $x \in [b, +\infty[$. Alors $h'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. Ainsi : $\forall x \in [b, +\infty[,\ |h'(x)| = h(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :

$$\forall x \in [b, +\infty[,\ h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  × h est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  × $\forall x \in [b, +\infty[,\ |h'(x)| = h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2,\ |\ h(y) - h(x)\ | \leqslant \frac{1}{2}\ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

$$h(u_n) - h(b) \ = \ |\ h(u_n) - h(b)\ | \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - b| \ = \ \frac{1}{2}\ (u_n - b)$$

  Or :
  × $h(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  × $h(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

$$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- **Initialisation** :
  D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.

  D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.

  Ainsi :
  $$\begin{array}{rcll} u_0 - b & = & 4 - b & \\ & \leqslant & 4 - 2 & \quad \textit{(car } b \geqslant 2 \textit{ d'après la question 3)} \\ & = & 2 \ = \ \dfrac{1}{2^{0-1}} & \end{array}$$

  D'où $\mathscr{P}(0)$.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n}$).

  D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

  Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

  En combinant ces deux résultats, on obtient :
  $$u_{n+1} - b \ \leqslant \ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant \ \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

7. a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def suite(n) :` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n. On admettra que la bibliothèque `numpy` est déjà chargée.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```python
def suite(n) :
    u = 4
    for i in range(n) :
        u = np.log(u) + 2
    return u
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

- **Début de la fonction**
  L'énoncé commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `suite`,
  × elle prend en paramètre d'entrée l'entier `n`,
  × elle renvoie la valeur stockée dans la variable `u`.

```python
def suite(n) :
```

```python
    return u
```

La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 4 : la valeur de u_0.

```python
    u = 4
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
  Pour cela, on utilise une structure itérative (boucle for) :

```
3       for i in range(n) :
4           u = np.log(u) + 2
```

  On tire ici partie de la définition récursive (d'ordre 1) de cette suite. La nouvelle valeur de la suite, que l'on stockera dans la variable `u`, est obtenue à l'aide de la valeur précédente qui est celle alors stockée dans `u`.

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `u` contient la quantité $u_{\mathtt{n}}$ où `n` est le paramètre entré lors de l'appel de la fonction.

Commentaire

- Le programme **Python** consiste à mettre à jour successivement la variable `u` jusqu'à obtention de la valeur que l'on souhaite calculer. L'idée est la suivante.
  Si avant le $i^{\text{ème}}$ tour de boucle (avec $\mathtt{i} \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$) :

  $$\text{la variable } \mathtt{u} \text{ contient la valeur } u_{i-1}$$

  alors, à l'issue de ce tour de boucle :

  $$\text{la variable } \mathtt{u} \text{ contient la valeur } u_i$$

  Cette propriété est ce qu'on appelle un **invariant de boucle**. Elle permet d'assurer la correction de la fonction implémentée et notamment le fait qu'à l'issue du dernier tour de boucle la variable `u` contient $u_{\mathtt{n}}$. □

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon) :
2     n = 0
3     while ............ :
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

  S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :

  $$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$

  Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.

- On complète alors le programme **Python** de la façon suivante :

```
3     while 1 / 2**(n-1) > epsilon
```

On propose le programme suivant :

```
1  def valeur_approchee(epsilon) :
2      n = 0
3      while 1 / 2**(n-1) > epsilon :
4          n = n + 1
5      return suite(n)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début du programme**
  Commençons par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `valeur_approchee`,
  - × elle prend comme paramètre d'entrée le réel `epsilon`,
  - × elle renvoie le résultat de la commande `suite(n)`.

```
1  def valeur_approchee(epsilon)
```

```
5      return suite(n)
```

  On initialise ensuite la variable `n` à 0.

```
2  n = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à déterminer un entier n tel que : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Pour ce faire, on se sert de la condition suffisante exposée ci-dessus à savoir : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$ (si cette condition est vérifiée alors il en est de même de la précédente).
  Le programme consiste donc à incrémenter la variable `n` de 1 jusqu'à ce que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$.
  Autrement dit, on doit incrémenter la variable `n` de 1 tant que : $\frac{1}{2^{n-1}} > \varepsilon$.
  Pour cela on met en place une boucle while :

```
3      while 1 / 2**(n-1) > epsilon :
```

  Puis on met à jour la variable `n`.

```
4          n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient un entier n tel que : $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, ce qui assure : $|u_n - b| \leqslant \varepsilon$. Il n'y a plus qu'à calculer $u_{\mathtt{n}}$ à l'aide de la fonction `suite` définie précédemment.

```
6      return suite(n)
```

□