Révisions séries numériques

Exercice 1

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

1. ***a)*** Montrer : $(u_n - u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} (u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.

d) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

e) En déduire que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.

a) Vérifier : $\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\right)$.

b) En déduire : $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

c) Conclure : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

a) Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

b) Vérifier : $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$ puis : $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

c) Conclure que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note $m_n = \min\ \{k \in \mathbb{N}^* \mid H_k \geqslant n\}$ et on pose :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

a) Justifier l'existence de m_n.

b) Etablir : $\exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n}) \ \leqslant\ m_n \ <\ 1 + \exp(n - \gamma - \varepsilon_{m_n - 1})$.

c) En déduire un équivalent de m_n.

d) Conclure : $\lim_{n\to+\infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} = \mathrm{e}$.

Exercice 2

1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et soit f une fonction continue, décroissante et positive de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k)$.

a) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant n_0}$ de terme général $\gamma_n = S_n - \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\, dt$ est monotone est convergente.

b) En déduire, l'existence d'un réel, noté C tel que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\, \ln(k)} = \ln\big(\ln(n)\big) + C + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

c) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t\,\big(\ln(t)\big)^2}\, dt$ et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\, \ln(n)}$.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n\,(n-1)}$ est convergente.

On note $K = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k\,(k-1)}$ sa somme.

3. ***a)*** Prouver, pour tout entier naturel n au moins égal à 2, l'inégalité :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geqslant n\, \ln(n) - n + 1$$

b) En déduire : $\ln(n!) = n\, \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{O}(n)$.

4. ***a)*** Soit λ un réel strictement positif. Justifier, pour tout $\in \mathbb{N}^*$, l'existence et l'unicité d'un réel $x > 0$ tel que $x\, \ln(x) - \lambda\, x = \ln(n)$. On note r_n cet unique réel.

b) Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$ et établir : $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln\big(\ln(n)\big)}$.