Révisions interversions de symboles

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

1. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

2. Démontrer : $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

3. **Première tentative**

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n\ x^{n+\alpha-1}$. Montrer :

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

4. **Deuxième tentative**

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ x^{k+\alpha-1}$$

A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer :

$$I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

5. En déduire :

$$I(\alpha)+J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\alpha\,x) = \frac{\sin(\pi\,\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{2\,\alpha\,\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right)$$

6. Démontrer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\,\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\,dt$$

et :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}\,dt$$

7. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

8. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

9. Démontrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

10. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

11. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\, dt$$

Partie III - Vers la formule des compléments

12. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

13. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) \;=\; \Gamma(\alpha)\ \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\, dt$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

14. En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, dt \;=\; \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\, dt$$

15. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\alpha) \;=\; \frac{\pi}{\sin\left(\alpha\,\pi\right)}$$

16. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$