Révisions interversions de symboles

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

1. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

Démonstration.

- La fonction $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $]0,1]$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$ est impropre seulement en 0.
- D'autre part :
  × $\left|\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\right| = \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{|\,1+x\,|} = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1} = \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx$ est une intégrale de Riemann impropre en 0. Elle est donc convergente si et seulement si $1-\alpha < 1$ c'est-à-dire si $\alpha > 0$.

  Comme $\alpha > 0$ (puisque $\alpha \in\,]0,1[$ d'après l'énoncé), on en déduit, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \text{ est intégrable sur }]0,1].}$$

- La fonction $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$ est impropre seulement en $+\infty$.
- D'autre part :
  × $\left|\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\right| = \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{|\,1+x\,|} = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{x^{\alpha-1}}{x} = x^{\alpha-2} = \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$. Elle est donc convergente si et seulement si $2-\alpha > 1$ c'est-à-dire si $\alpha < 1$.

  Comme $\alpha < 1$ (puisque $\alpha \in\,]0,1[$ d'après l'énoncé), on en déduit, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[.}$$

Commentaire

- Rappelons qu'une fonction h est dite intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si :
  - $\times$ h est continue par morceaux sur I,
  - $\times$ l'intégrale $\displaystyle\int_I h(t)\ dt$ est absolument convergente.
- On peut rédiger légèrement différemment en remplaçant la deuxième partie par :

> - D'autre part :
>   - $\times$ $\left|\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\right| = \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{|\,1+x\,|} = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{\alpha-1}}{x} = x^{\alpha-2} = \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$
>   - $\times$ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ est intégrable en $+\infty$ par critère de Riemann seulement si $2-\alpha > 1$ c'est-à-dire si $\alpha < 1$.
>
> Comme $\alpha < 1$ (puisque $\alpha \in \,]0,1[$ d'après l'énoncé), on en déduit, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable en $+\infty$.

- Déterminer l'intégrabilité d'une fonction h sur un intervalle I, c'est déterminer la nature d'une intégrale. Pour ce faire, la méthodologie est toujours la même.

  1) Étude de la continuité de h sur I.
  Dans le cas particulier où la fonction h est continue (par morceaux) sur le `SEGMENT` $I = [a,b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h(t)\ dt$ est bien définie. Ainsi, la fonction h est intégrable sur $[a,b]$ et l'étude prend fin.

  2) Étude de la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b h(t)\ dt$
  On est alors dans le cas où la fonction h est continue (par morceaux) sur l'intervalle $I = \,]a,b]$ (resp. $[a,b[$, resp. $]a,b[$).

  Il faut alors vérifier que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b h(t)\ dt$, impropre en a (resp. b, resp. impropre à la fois en a et en b), est **absolument** convergente. Pour ce faire, le bon outil est celui du **théorème de comparaison** des intégrales généralisées de fonctions continues positives.

- Il arrive parfois qu'on se ramène à l'intégrabilité d'une autre fonction par changement de variable ou par intégration par parties. Lorsque c'est le cas, l'énoncé précisera la démarche à suivre.
- Attention à ne pas surinterpréter le point précédent. Lorsque la question consiste à déterminer la nature d'une intégrale (ou même d'une série), il est illusoire de penser qu'on va réussir à résoudre le problème par un calcul. En particulier, il est (presque) certain que l'intégrande étudiée ne possède pas de primitive à vue. Si c'était le cas, l'exercice proposé aurait peu d'intérêt : si on connaît une primitive, le symbole d'intégration disparaît et il ne s'agit plus d'un exercice d'intégration.
- Le seul cas où il est pertinent d'envisager le calcul est lorsque l'énoncé le suggère :

  « Démontrer que l'intégrale est convergente et déterminer sa valeur »

  Dans ce cas, le théorème de comparaison est inutile. On calcule l'intégrale sur le `SEGMENT` $[A,b]$ (resp. $[a,B]$, resp. $[A,B]$) et on vérifie que le résultat possède une limite finie lorsque $A \to a$ (resp. $B \to b$, resp. $A \to a$ et $B \to b$).

2. Démontrer : $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

Démonstration.
Effectuons le changement de variable $\psi : t \mapsto \frac{1}{t}$. La fonction ψ est :

- de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$. De plus, pour tout $t \in]0,1[$: $\psi'(t) = \frac{-1}{t^2}$.
- une bijection strictement décroissante de $[1,+\infty[$ dans $]0,1]$.

Comme $1-\alpha \in]0,1[$, alors d'après la question précédente, l'intégrale $I(1-\alpha) = \int_0^1 g_{1-\alpha}(x)\ dx$ est convergente (où $g_\alpha : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$) et le changement de variable est licite :

$$\begin{aligned}
(\ I(1-\alpha)\ =\ )\ \int_0^1 \frac{x^{(1-\alpha)-1}}{1+x}\ dx \ &= \ \int_{+\infty}^1 (g_{1-\alpha}\circ\psi)(t)\ \psi'(t)\ dt \\
&= \int_{+\infty}^1 g_{1-\alpha}\left(\frac{1}{t}\right)\ \frac{-1}{t^2}\ dt \\
&= \int_1^{+\infty} g_{1-\alpha}\left(\frac{1}{t}\right)\ \frac{1}{t^2}\ dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{-\alpha}}{1+\frac{1}{t}}\ \frac{1}{t^2}\ dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\frac{t+1}{t}}\ \frac{1}{t^2}\ dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha \times t}{t+1}\ \frac{1}{t^2}\ dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1}\ \frac{1}{t}\ dt \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ dt \\
&= J(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } I(1-\alpha) = J(\alpha).}$$

Commentaire

- Le programme officiel autorise le changement de variable directement sur les intégrales généralisées. Cela peut avoir pour conséquence de complexifier la recherche de bornes de l'intégrale résultat. En effet, lorsqu'on considère une intégrale généralisée, les bornes de l'intégrale initiale ne sont pas nécessairement finies et elles ne peuvent donc pas forcément s'écrire sous la forme $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$. Pour se prémunir d'une telle écriture et d'une discussion sur le fait que les bornes initiales puissent être atteinte par ψ, le programme officiel préfère considérer le cas d'une fonction :
$$\psi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$$
où a et b sont les bornes de l'intégrale de départ et α et β celles d'arrivée. Le caractère bijectif et strictement croissant assure que $a = \lim\limits_{t \to \alpha} \psi(t)$ et $b = \lim\limits_{t \to \beta} \psi(t)$. C'est essentiellement à cela que sert cette hypothèse : faire le lien entre a et α ainsi qu'entre b et β. On obtient alors un théorème qui s'écrit simplement mais dont l'utilisation est un peu pénible.
- Pour éviter la discussion sur le caractère $\mathscr{C}^1$ bijectif du changement de variable, on peut aussi décider de l'effectuer d'abord sur un segment puis faire tendre la borne où se situe l'impropreté. Typiquement, si l'intégrale initiale est impropre en b, on considère d'abord cette intégrale sur le segment $[a, B]$ (où $B \in [a, b[$), puis on effectue le changement de variable sur $[a, B]$ et enfin on fait tendre B vers b pour obtenir le résultat (ce qui est valide si l'on sait qu'au moins l'une des deux intégrales (celle de départ ou celle d'arrivée) est convergente.
- Globalement, le programme officiel semble considérer que les changements de variable sont des techniques calculatoires et qu'il convient de ne pas trop s'appesantir sur les hypothèses. Dans cette question, on serait tenté de poser le changement de variable sous la forme $\boxed{t = \dfrac{1}{x}}$ et de raisonner alors comme suit :
$$\left|\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{x} \ \text{ donc } x = \dfrac{1}{t} \qquad\qquad \textit{(on note alors } \psi : t \mapsto \dfrac{1}{t}\textit{)} \\ \hookrightarrow dx = -\dfrac{1}{t^2}\, dt \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ t = +\infty \\ \bullet\ x = 1 \ \Rightarrow\ t = \dfrac{1}{1} = 1 \end{array}\right.$$
On peut alors justifier du caractère valide de ce changement de variable par le fait que $\psi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui est bijective et strictement décroissante de $]0, 1]$ dans $[1, +\infty[$.
- Enfin, notons que le programme officiel stipule que l'on peut utiliser la technique du changement de variable sur les intégrales généralisées sans aucune justification dès lors que le changement de variable est usuel. Ce dernier terme n'est pas précisé. Un changement de variable affine sera certainement considéré comme usuel. Le changement de variable considéré ici celui qui est classiquement utilisé pour passer d'une intégrale impropre en 0 à une intégrale impropre en $+\infty$ (et inversement). On peut donc penser que tous les points de cette question seront attribués à tout candidat effectuant le bon changement de variable même si la rédaction n'est pas détaillée. $\square$

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

3. **Première tentative**

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \ x^{n+\alpha-1}$. Montrer :

$$\forall x \in]0,1[, \ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?

Démonstration.
Soit $x \in]0,1[$.

- La série **numérique** $\sum (-1)^n \ x^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $-x \in]-1,1[$. De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\,-x\,)^n \\ &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

- On en déduit que la série **numérique** $\sum f_n(x)$ est elle aussi convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ x^{n+\alpha-1} \\ &= x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ x^n \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in]0,1[, \ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).}$$

- Démontrons que la série **de fonctions** $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.
  On procède par l'absurde.
  Supposons que la série **de fonctions** $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0,1[$.

  × $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) \ = \ \lim\limits_{x\to 1} (-1)^n \ x^{n+\alpha-1} \ = \ (-1)^n \ 1^{n+\alpha-1} \ = \ (-1)^n$
  × La série **de fonctions** $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0,1[$.

  Ainsi, par le théorème de la double limite, la série numérique $\sum (-1)^n$ est convergente. Absurde : cette série diverge (grossièrement).

On a ainsi démontré par l'absurde que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Commentaire

- Dans le premier point, on cite la convergence de la série **numérique** $\sum (-1)^n \ x^n$. Il est aussi possible de justifier par le fait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Commentaire

- Dans le premier point, on cite la convergence de la série **numérique** $\sum (-1)^n\, x^n$. Il est aussi possible de justifier par le fait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.
- Le but de l'exercice est d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme. On a jusque là démontré :

$$I(\alpha) \ = \ \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \ = \ \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{n+\alpha-1} \right) dx$$

À cette étape, on se demande si l'on peut écrire :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{n+\alpha-1} \right) dx \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \ (-1)^n\, x^{n+\alpha-1}\, dx \right)$$

Il s'agit donc de savoir si l'on peut intervertir les symboles $\displaystyle\int_0^1$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$. Pour ce faire, on peut penser à deux méthodes :

1) <u>Interversion par convergence uniforme</u>

On est dans le cas d'une intégrale sur un `SEGMENT`. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto (-1)^n\, x^{n+\alpha-1}$ est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$. L'argument de convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,1]$ permettrait de conclure qu'on peut réaliser cette interversion. Cependant, comme le démontre cette question, cette hypothèse de convergence uniforme n'est pas valable.

2) <u>Interversion par théorème d'intégration terme à terme</u>

Commençons par rappeler ce théorème.

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.
>
> ***(i)*** Existence d'une limite finie - étude « en n »
>
> - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
>
> ***(ii)*** Intégrabilité - étude « en t »
>
> - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.
>
> ***(iii)*** Hypothèse spécifique
>
> - La série numérique $\sum \displaystyle\int_I \, |\, f_n(t)\, |\ dt$ converge.
>
> Alors :
>
> × la fonction $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est intégrable sur I.
>
> × la suite $\left(\displaystyle\int_I \ S_n(t)\ dt \right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie définie par :
>
> $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I \ S_n(t)\ dt \ = \ \int_I \ \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(t) \right) \ dt \ = \ \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \ dt}$$

Commentaire

En particulier, on doit démontrer la convergence de la série **numérique** $\sum \displaystyle\int_I |\, f_n(t) \,| \; dt$. Or ici :

$$\int_I |\, f_n(t) \,| \; dt \;=\; \int_0^1 |\,(-1)^n \; x^{n+\alpha-1} \,| \; dt \;=\; \int_0^1 x^{n+\alpha-1} \; dt \;=\; \left[\frac{x^{n+\alpha}}{n+\alpha} \right]_0^1 \;=\; \frac{1}{n+\alpha}$$

Comme la série numérique $\sum \dfrac{1}{n+\alpha}$ est divergente, le théorème d'intégration terme à terme ne peut être utilisé. Il reste encore un espoir : il est possible que l'on puisse utiliser le théorème de convergence dominée à la suite (S_n). La question suivante établit cette possibilité. □

4. **Deuxième tentative**

Pour tout $x \in \,]0,1[$, on pose : $S_n(x) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \; x^{k+\alpha-1}$.

A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer : $I(\alpha) \;=\; \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 S_n(x) \; dx$.

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Démonstration.

- Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite **de fonctions** (S_n).

  (i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

  - Soit $x_0 \in \,]0,1[$. En question *3* on a démontré que la suite **numérique** $(S_n(x_0))$ est convergente, de limite :
  $$S(x_0) \;=\; \lim_{n \to +\infty} S_n(x_0) \;=\; \frac{x_0^{\alpha-1}}{1+x_0}$$
  Cela démontre que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $S : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$.
  - La fonction $S : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.

  (ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en x »

  - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.
  - Remarquons tout d'abord que pour tout $x \in \,]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|\, S_n(x) \,| \;&=\; \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \\
&=\; \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \; x^{k+\alpha-1} \right| \\
&=\; \left| x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n} \big(-x \big)^k \right| \\
&=\; \left| x^{\alpha-1} \, \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} \right| \\
&=\; |\, x^{\alpha-1} \,| \; \frac{\left|1-(-x)^{n+1}\right|}{\left|1+x\right|}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcll}
\text{Ainsi : } \left| S_n(x) \right| & = & x^{\alpha-1} \dfrac{\left|1-(-x)^{n+1}\right|}{1+x} & \textit{(car } 1+x \geqslant 0 \textit{ et } x^{\alpha-1} \geqslant 0\textit{)} \\
& \leqslant & x^{\alpha-1} \dfrac{1+\left|(-x)^{n+1}\right|}{1+x} & \\
& = & x^{\alpha-1} \dfrac{1+\left|(-x)\right|^{n+1}}{1+x} & \\
& = & x^{\alpha-1} \dfrac{1+x^{n+1}}{1+x} & \\
& \leqslant & x^{\alpha-1} \left(1+x^{n+1}\right) & \textit{(car } 1+x \geqslant 1 \textit{ donc } \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1\textit{)} \\
& \leqslant & x^{\alpha-1} \times \left(1+1\right) & \textit{(car } x^{n+1} \leqslant 1 \textit{ et } x^{\alpha-1} \geqslant 0\textit{)} \\
& \leqslant & 2 &
\end{array}$$

et $T : x \mapsto 2$ est intégrable sur $]0,1[$.
Cette inégalité démontre au passage que la fonction S_n est intégrable sur $]0,1[$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction S est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\ dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x) \right) dx = \int_0^1 S(x)\ dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\ dx = I(\alpha)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\ dx.}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
I(\alpha) & = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\ dx & \\
& = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right) dx \right) & \\
& = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(x)\ dx \right) & \textit{(par linéarité de l'intégrale sur le } \texttt{SEGMENT } [0,1]\textit{)} \\
& = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k\ x^{k+\alpha-1}\ dx \right) & \\
& = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1}\ dx \right) & \textit{(par linéarité de l'intégrale sur le } \texttt{SEGMENT } [0,1]\textit{)} \\
& = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{\alpha+k}}{\alpha+k} \right]_0^1 \right) & \\
& = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{1^{\alpha+k}}{\alpha+k} - \cancel{\frac{0^{\alpha+k}}{\alpha+k}} \right) \right) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}}$$

□

5. En déduire : $I(\alpha) + J(\alpha) \; = \; \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \; = \; \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) &= \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx && \textit{(par relation de Chasles, les deux intégrales étant convergentes)} \end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1-\alpha) && \textit{(d'après la question 2)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(1-\alpha)+k} && \textit{(d'après la question précédente appliquée en } 1-\alpha \in \,]0,1[\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(1-\alpha)+k-1} \right) && \textit{(en séparant le premier terme et par décalage d'indice)} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \frac{(-1)^{k-1}}{k-\alpha} \right) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \frac{(-1)^k}{\alpha-k} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k \,(\alpha-k) + (-1)^k \,(\alpha+k)}{(\alpha-k)\,(\alpha+k)} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k \,\big((\alpha - \cancel{k}) + (\alpha + \cancel{k})\big)}{\alpha^2 - k^2} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } I(\alpha) + J(\alpha) \; = \; \frac{1}{\alpha} + 2\,\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2}.}$$

□

On admet la formule suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\; \cos(\alpha\, x) = \dfrac{\sin(\pi\,\alpha)}{\pi} \left(\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{2\,\alpha\, \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right)$.

6. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \; = \; \frac{\pi}{\sin(\alpha\,\pi)}$.

Démonstration.

En utilisant la formule admise en $x = 0$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \,\times 0) &= \frac{\sin(\pi\,\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{2\,\alpha\, \cos(n \times 0)}{\alpha^2 - n^2} \right) \\ &= \frac{\sin(\pi\,\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\,\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \right) && \textit{(car } \cos(0) = 1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \frac{1}{\alpha} + 2\,\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \; = \; \frac{\pi}{\sin(\pi\,\alpha)}.}$$

$$\boxed{\text{Par la question précédente : } \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \; = \; I(\alpha) + J(\alpha) \; = \; \frac{1}{\alpha} + 2\,\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \; = \; \frac{\pi}{\sin(\pi\,\alpha)}}$$

□

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite on pose : $\forall x \in \,]0,+\infty[, \ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$

et : $\forall x \in [0,+\infty[, \ f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \, \mathrm{e}^{-xt} \, dt$.

7. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

- La fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1) \, \ln(t)} \, \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

- Démontrons tout d'abord la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

  × $\forall t \in \,]0,1], \, t^{x-1} \geqslant 0$.

  × $t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{0} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{1-x}} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant $1-x$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $1-x < 1$, c'est-à-dire si $x > 0$, ce qui est le cas.

  $$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre } \int_0^1 t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \text{ est convergente.}}$$

- Démontrons maintenant la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

  × $\forall t \in [1,+\infty[, \, t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

  × $t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} = \underset{t \to +\infty}{o} \left(\dfrac{1}{t^2} \right)$.
  En effet : $\dfrac{t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{x+1} \, \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$).
  Elle est donc convergente.

  $$\boxed{\text{Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre } \int_1^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \text{ est convergente.}}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, que pour tout } x > 0, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \text{ est convergente ce qui signifie que la fonction } \Gamma \text{ est définie sur }]0,+\infty[.}$$

Commentaire

- Lorsque l'énoncé demande de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, il faut mettre en place un raisonnement du type :

La quantité $\Gamma(x)$ est bien définie $\Leftrightarrow$ Le réel x appartient à l'intervalle ...

- Ici, l'énoncé est différent : on demande de démontrer que la fonction Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$. Non seulement l'intervalle nous est fourni mais en plus on ne demande de résultat que sur cet intervalle et pas sur le reste des réels. On peut donc limiter l'étude à cet intervalle.
- En réalité, avec le raisonnement effectué, on peut conclure que le domaine de définition de Γ est $]0, +\infty[$. En effet, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est convergente quelle que soit la valeur de x. Ainsi, la convergence de l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ ne dépend que de celle de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$ et le critère d'équivalence démontre que la convergence de celle-ci a lieu si et seulement si $x > 0$.

$\square$

8. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.
Dans toute la suite :

× on note $h : (x, t) \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}$.

× pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto h(x_0, t)$.

× pour tout $t_0 \in]0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto h(x, t_0)$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^0$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $A = [0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- Soit $(x, t) \in A\times\ ]0, +\infty[$.

$$|\ \underline{h}_t(x)\ | = \left|\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}\right| = \left|\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\right|\ \left|\mathrm{e}^{-xt}\right| = \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}\ \leqslant\ \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$$

En effet, comme $x \geqslant 0$ et $t > 0$ alors $x\,t \geqslant 0$ donc $-x\,t \leqslant 0$ et enfin, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\exp\big(-xt\big) \leqslant \mathrm{e}^0 = 1$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (c'est le résultat de la question ***1.***).
(cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{h}_t(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par domination)

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction f_α est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $A = [0, +\infty[$.

$\square$

9. Démontrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{e}^{-t\,x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A =]0,+\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in A$:

$$\underline{h}_t{}'(x) = \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \big(\ -t\ \mathrm{e}^{-t\,x}\ \big) = -\frac{t^{\alpha}}{t+1}\ \mathrm{e}^{-t\,x}$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

  Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (c'est le résultat de la question ***1.***).
- Intégrabilité par domination
  - Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{h}'_t(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
  - Soit $(a,b) \in]0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[$. On suppose $a \leqslant b$.
    Soit $(x,t) \in [a,b]\ \times\ ]0,+\infty[$.

$$\left|\,\underline{h}'_t(x)\,\right| = \left|-\frac{t^\alpha}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}\right| = |-1|\ \left|\frac{t^\alpha}{t+1}\right|\ \left|\mathrm{e}^{-xt}\right| = \frac{t^\alpha}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}$$

    Or :

    × comme $t > 0$, alors $t+1 > 1$ puis $\dfrac{1}{t+1} < 1$ et enfin : $\dfrac{t^\alpha}{t+1} < t^\alpha$.

    × comme $t > 0$ et $a \leqslant x \leqslant b$, alors $a\,t \leqslant x\,t \leqslant b\,t$ et $-a\,t \geqslant -x\,t \geqslant -b\,t$. Enfin :

$$\mathrm{e}^{-b\,t} \quad\leqslant\quad \mathrm{e}^{-x\,t} \quad\leqslant\quad \mathrm{e}^{-a\,t} \qquad \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)}$$

    Finalement :

$$\left|\,\underline{h}'_t(x)\,\right| = \frac{t^\alpha}{t+1}\ \mathrm{e}^{-xt}\ \leqslant\ t^\alpha\ \mathrm{e}^{-a\,t}$$

    Or, comme $a > 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto t^\alpha\ \mathrm{e}^{-a\,t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
    (cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{h}'_t(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par domination)

> Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A =]0,+\infty[$.

- On en déduit de plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \underline{h}_t{}'(x)\ dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha}{t+1}\ \mathrm{e}^{-t\,x}\ dt \end{aligned}$$

> Finalement : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'_\alpha(x) \ = \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha}{t+1}\ \mathrm{e}^{-t\,x}\ dt.$

Commentaire

- L'étape d'intégrabilité par domination consiste à exhiber une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ qui est intégrable sur le domaine d'intégration étudié et dont l'expression ne contient plus la variable x.
- Lorsqu'on utilise un théorème de régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre, la domination peut s'effectuer sur tout segment $[a, b]$ de l'intervalle de régularité A. Formellement, cela démontre que la fonction f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de l'intervalle A et ainsi qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A tout en entier.
- Au passage, notons que le réel b n'apparaît pas dans la domination. On aurait aussi pu démontrer la domination pour n'importe quel intervalle du type $[a, +\infty[$ ce qui permet de conclure au caractère $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ et donc au caractère $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. □

10. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$.

Démonstration.
Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en x »

- ▶ Pour tout $t \in \,]0, +\infty[$, la fonction $\underline{h_t} : x \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1} \, \mathrm{e}^{-t\,x}$ admet une limite finie en $+\infty$. Plus précisément :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \, \mathrm{e}^{-t\,x} = 0 \qquad \left(\textit{car } e^{-t\,x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \textit{ puisque } -tx \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty\right)$$

- ▶ La fonction $t \mapsto 0$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- ▶ Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{h_t}(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- ▶ Soit $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Comme vu en question ***8*** :

$$|\, \underline{h_t}(x) \,| \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$$

Et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Alors, par théorème de convergence dominée, la fonction f_α admet une limite en $+\infty$ donnée par :

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \, \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \, \mathrm{e}^{-x\,t} \right) dt = \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0$$

Commentaire

Dans la question, on doit déterminer la limite de la fonction f_α en $+\infty$. L'hypothèse de domination doit alors être effectuée sur n'importe quel intervalle dont la plus grande borne est $+\infty$. Ici, le choix $x \in [0, +\infty[$ permet d'obtenir la domination souhaitée. Cependant, on aurait pu conclure de la même manière en travaillant sur l'intervalle $[1, +\infty[$ ou $[100, +\infty[$ ...

□

11. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
- Démontrons tout d'abord la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$.
  × $\left| \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \right| = \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{e^{-0}}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t^\alpha}$.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{t^\alpha}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant α ($\alpha < 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$ est (absolument) convergente.

- Démontrons maintenant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$.
  × $\left| \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \right| = \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \leqslant e^{-t}$ puisque comme $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t^\alpha} \leqslant 1$.
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ est convergente comme intégrale de référence d'exposant $\alpha > 0$.

Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$ est (absolument) convergente.

- Par relation de Chasles, les intégrales en présence étant convergentes, on obtient, pour tout $x > 0$:
  $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt = \int_0^{x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt - \int_0^{x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt \\ &\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt \quad \textit{(par définition d'intégrale convergente)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en conclut : $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt = 0$.

□

Partie III - Vers la formule des compléments

12. Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, démontrer :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Démonstration.
Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha}{t+1}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, \mathrm{e}^{-x\,t} + \frac{t^\alpha}{t+1}\, \mathrm{e}^{-x\,t} \right) dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale, les intégrales en présence étant convergentes)} \\
&= \int_0^{+\infty} \cancel{(1+t)}\, \frac{t^{\alpha-1}}{\cancel{t+1}}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt
\end{aligned}$$

- Effectuons le changement de variable $\psi : t \mapsto \dfrac{t}{x}$. La fonction ψ est :
  × de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car polynomiale. De plus, pour tout $t > 0$: $\psi'(t) = \dfrac{1}{x}$.
  × une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

  Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt$ est convergente, le changement de variable est licite et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt &= \int_0^{+\infty} \big(\psi(t)\big)^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x\,\psi(t)}\, \psi'(t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\cancel{x}\,\frac{t}{\cancel{x}}}\, \frac{1}{x}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{x^\alpha}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
&= \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.}$$

Commentaire

On a ici affaire à un changement de variable affine, ce qu'on peut considéré comme changement de variable habituel. Comme précisé précédemment, la rédaction suivante permettra (certainement) d'obtenir tous les points. On pose $\boxed{u = x\,t}$:

$u = x\,t$ donc $t = \dfrac{u}{x}$ *(on note alors $\psi : u \mapsto \dfrac{u}{x}$)*

$\hookrightarrow dt = \dfrac{1}{x}\,du$

- $t = 0 \;\Rightarrow\; u = x \times 0 = 0$
- $t = +\infty \;\Rightarrow\; u = +\infty$

On peut alors justifier du caractère valide de ce changement de variable par le fait que $\psi : u \mapsto \dfrac{u}{x}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui est bijective et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. $\square$

13. Pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) \;=\; \Gamma(\alpha)\;\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \;\; f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord la dérivée de la fonction $h_\alpha : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt$.

  Remarquons que pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt \;&=\; \int_x^{1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt \;+\; \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt \qquad &&\textit{(par relation de Chasles, les intégrales en présence étant convergentes)}\\ &=\; \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt \;-\; \int_1^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt\end{aligned}$$

  La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
  Elle admet donc une primitive R de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle.

- On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt \;&=\; \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt \;-\; \big[\; R(t)\;\big]_1^x\\ &=\; \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt \;-\; \big(\; R(x) - R(1)\;\big)\end{aligned}$$

  La fonction $h_\alpha : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\;dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car la fonction R l'est. De plus :

$$h'_\alpha(x) \;=\; 0 - \big(R'(x) - 0\big) \;=\; -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^\alpha} \qquad \textit{(par définition de } R\textit{)}$$

- La fonction $g_\alpha = \Gamma(\alpha)\ \exp \times h_\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car est le produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle. De plus, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha)\ \left(\ e^x\ h_\alpha(x)\ +\ e^x\ h'_\alpha(x)\ \right) \\ &= \Gamma(\alpha)\ e^x\ h_\alpha(x)\ +\ \Gamma(\alpha)\ e^x\ h'_\alpha(x) \\ &= g_\alpha(x)\ +\ \Gamma(\alpha)\ e^x\ \frac{-e^{-x}}{x^\alpha} \\ &= g_\alpha(x)\ -\ \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

On en conclut : $\forall x > 0,\ g'_\alpha(x) = g_\alpha(x) - \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ ou encore :

$$\forall x > 0,\ g_\alpha(x) - g'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

> Finalement, la fonction g_α est bien une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

Commentaire

- On peut aussi rédiger en se servant du fait que la fonction $T : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$ est la primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule au point 1. On en déduit alors immédiatement que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et de dérivée : $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ T'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$.
- L'intérêt de la démonstration aoptée dans la question est qu'elle est plus générale et peut donc être adaptée à des intégrales dont les bornes sont plus complexes. Rappelons que seule les fonctions intégrales dont la borne basse est une constante et la borne haute est la variable x sont des primitives de la fonction intégrée. Typiquement, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_1^{2x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$ ou encore $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\, dt$ `NE SONT PAS` des primitives de la fonction de la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$.

- Il s'agit maintenant de résoudre cette équation différentielle (E) : $y' - y = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

  × On commence par résoudre l'équation homogène associée (H) $y' - y = 0$.
  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'ensemble de ses solutions est donc :
  $$\{x \mapsto \lambda\, e^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

  × On cherche ensuite une solution particulière de (E).
  Le début de question permet d'affirmer que g_α est une telle solution particulière.

> On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est : $\{x \mapsto \lambda\, e^x + g_\alpha(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- D'après la question ***12.***, la fonction f_α est solution de l'équation différentielle (E).
  Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \mu\,\mathrm{e}^x + g_\alpha(x) \\ &= \mu\,\mathrm{e}^x + \Gamma(\alpha)\ \mathrm{e}^x \ \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt \\ &= \mathrm{e}^x \ \left(\mu + \Gamma(\alpha) \ \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt \right) \end{aligned}$$

  Démontrons $\mu = 0$. On procède par l'absurde.
  Supposons $\mu > 0$ (le cas $\mu < 0$ se traite de manière similaire).
  $\times$ D'après la question ***11***, $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt = 0$.
  Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\mu + \Gamma(\alpha) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt \right) = \mu$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, on en conclut :

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x \ \left(\mu + \Gamma(\alpha) \ \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt \right) = +\infty$$

  $\times$ D'après la question ***10***, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0$.
  Absurde !

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mu = 0 \text{ et ainsi : } \forall x > 0,\ f_\alpha(x) = g_\alpha(x).}$$

□

14. En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ dt \ = \ \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt$$

Démonstration.

- D'après la question ***8***, la fonction f_α est continue sur $[0, +\infty[$. On en déduit :

$$\lim_{x \to 0} f_\alpha(x) \ = \ f_\alpha(0) \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{e}^0\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ dt$$

Commentaire

Il faut comprendre le théorème de continuité des intégrales à paramètre comme une machine à intervertir les symboles $\lim\limits_{x \to a}$ et $\displaystyle\int_I$. En effet, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \int_I h(x,t)\ dt &= \lim_{x \to a} f(x) \\ &= f(a) && \textit{(car } f \textit{ est continue en } a \in A\textit{)} \\ &= \int_I h(a,t)\ dt \\ &= \int_I \underline{h}_t(a)\ dt \\ &= \int_I \left(\lim_{x \to a} \underline{h}_t(x) \right)\ dt && \textit{(car } \underline{h}_t \textit{ est continue en } a \in A\textit{)} \\ &= \int_I \left(\lim_{x \to a} h(x,t) \right)\ dt \end{aligned}$$

- Par ailleurs, d'après la question précédente : $f_\alpha = g_\alpha$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 0} f_\alpha(x) & = & \lim\limits_{x \to 0} g_\alpha(x) \\ & = & \lim\limits_{x \to 0} \left(\Gamma(\alpha)\ \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt \right) \\ & = & \Gamma(\alpha)\ \mathrm{e}^0 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt \end{array}$$

(par produit de limites et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\ dt$ est convergente)

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ dt \ = \ \lim_{x \to 0} f_\alpha(x) \ = \ \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt.}$$

□

15. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\alpha) \ = \ \frac{\pi}{\sin\left(\alpha\,\pi\right)}$$

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $\alpha \in\ ]0,1[$ alors $1-\alpha \in\ ]0,1[\ \subset\ ]0,+\infty[$ et par définition de la fonction Γ (définie en début de la Partie ***II***) :

$$\Gamma(1-\alpha) \ = \ \int_0^{+\infty} t^{(\cancel{1}-\alpha)-\cancel{1}}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\,\pi)} & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ dt \\ & = & \Gamma(\alpha) \times \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^\alpha}\ dt \\ & = & \Gamma(\alpha) \times \Gamma(1-\alpha) \end{array}$$

*(d'après la question **6**)*

$$\boxed{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\alpha) \ = \ \frac{\pi}{\sin\left(\alpha\,\pi\right)}}$$

□

16. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$$

Démonstration.

- Pour déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$, commençons par effectuer changement le changement de variable $\boxed{u = t^2}$:

$$\left| \begin{array}{l} u = t^2 \ \text{ donc } t = \sqrt{u} \qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto \sqrt{u}\textit{)} \\ \hookrightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\, du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0^2 = 0 \\ \bullet\ t = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est licite car la fonction $\psi : u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \; = \; \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \, \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du \; = \; \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \, du \; = \; \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-u} \, du$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \; = \; \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}-1} \, \mathrm{e}^{-u} \, du \; = \; \frac{1}{2} \, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

- En utilisant la question précédente en $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \, \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) \; = \; \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \; = \; \pi$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 = \pi \text{ et donc : } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \; = \; \sqrt{\pi}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt \; = \; \frac{1}{2} \, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \; = \; \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

□